

МАТЕМАТИКА

УДК 517.948

Р. А. Ширкян

Спектральный анализ систем вида $y' = kA(x)y$ на полуоси

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 10/II 1968)

1. Спектральным анализом оператора $l_h (BL_2 \equiv L_2(0, \infty))$

$$ly = -y'' + q(x)y$$

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

занимался М. А. Наймарк⁽¹⁾. Им получены доказательство теоремы разложения по собственным и присоединенным функциям оператора l_h и некоторые результаты о спектре. В частности он доказал, что если $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\sup_x |q(x)| \exp(\varepsilon x) < \infty, \quad \varepsilon > 0, \quad (1)$$

то оператор l_h имеет конечное число собственных значений. Б. С. Павлов⁽²⁾ получил более точный результат. А именно: условие (1) можно заменить условием

$$\sup_x |q(x)| \exp(\varepsilon \sqrt{x}) < \infty, \quad \varepsilon < 0.$$

В настоящей статье рассматриваются аналогичные вопросы для уравнения:

$$y' = kA(x)y, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

где $A(x)$ — квадратная матрица порядка $2n$, собственные значения которой равны

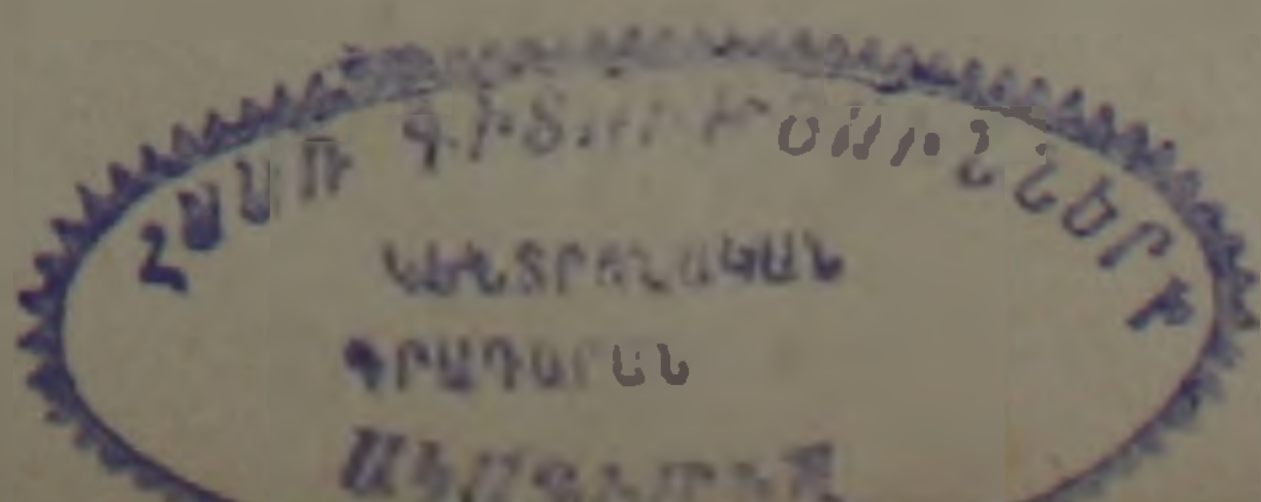
$$\lambda_j = i\rho_j(x),$$

где $\rho_j(x) \rightarrow c_j \neq 0, \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Числа c_j — вещественны, различны, половина из них — положительны, половина — отрицательны.

Введем оператор

$$l = \frac{d}{dx} - kA(x).$$

Пусть D — совокупность всех вектор-функций $y \in L_2$, все компоненты которых абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0, a)$, $a > 0$ и таких, что $ly \in L_2$. Пусть $\Omega = \|\omega_{ij}\|$ произвольная квадратная матрица порядка $2n$, ранг которой равен n . Через D_Ω обозна-



чим совокупность всех вектор-функций $y \in D$ таких, что $\Omega y(0) = 0$. Через L_Ω обозначим оператор в L_2 с областью определения D_Ω и $L_\Omega y = \Omega y$ при $y \in D_\Omega$. Пусть $\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \dots, \omega_{l_n}$ — линейно независимые строки матрицы Ω . Обозначим $\Omega_0(k)$ матрицу с элементами

$$\Omega_0(k) = (\omega_{l_m}, y_l(0, k)), \quad 1 \leq m, l \leq n,$$

где под скалярным произведением понимается матричное умножение строки ω_{l_m} на столбец y_l .

В работе доказывается, что если

$$\|A'(x)\| \leq c \exp(-\varepsilon \sqrt{x}), \quad c > 0, \varepsilon > 0,$$

то число собственных значений оператора L_Ω конечно.

2. Сформулируем основные условия на уравнения (2).!

1° $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = A(+\infty)$ существует, конечна и невырождена.

2° $\lim_{x \rightarrow +\infty} \|A'(x)\| = 0, \quad \|A'(x)\| \in L_1 \equiv L_1(0, \infty)$

3° $\|A'(x)\|^2 + \|A''(x)\| \in L_1$.

Введем диагональные матрицы Λ_0 и Λ_1 с элементами

$$(\Lambda_0)_{ii} = \lambda_i, \quad (\Lambda_1)_{ii} = \lambda_i^{(1)},$$

где λ_i определяется формулой (3), $\lambda_i^{(1)} = -(T_0^{-1} T_0')_{ii}$. Матрица T_0 определяется из условия

$$T_0^{-1} A T_0 = \Lambda_0.$$

Обозначим

$$y_{l_0}(x_0, x, k) = \exp \left\{ k \int_{x_0}^x (\lambda_l + k^{-1} \lambda_l^{(1)}) dt \right\}.$$

Лемма 1. Пусть условия 1°—3° выполнены. Тогда существует $x_1 > 0$ такое, что уравнение (2) при $x \geq x_1, \operatorname{Im} k \geq 0$ имеет $2n$ линейно независимых решений $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ регулярных при $\operatorname{Im} k > 0$, непрерывных при $\operatorname{Im} k \geq 0$. Решение $y_1, \dots, y_n \in L_2$, а решения $y_{n+1}, \dots, y_{2n}$ и никакая их нетривиальная комбинация не принадлежит L_2 .

Лемма 2. Пусть условия 1°—3° выполнены. Тогда для решений, построенных в лемме 1, при $x \geq x_1, \operatorname{Im} k \geq 0, |k| \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические формулы:

$$y_l = T_0(x) y_{l_0}(x_0, x, k) (f_l + k^{-1} \varphi_l(x, k)), \quad 1 \leq l \leq 2n, \quad (4)$$

где

$$|\varphi_l(x, k)| \leq \varphi(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0.$$

Лемма 3. Пусть условия 1°—3° выполнены. Тогда при $x \geq 0, \operatorname{Im} k \geq 0$ существуют решения $\tilde{y}_l$, для которых при $|k| \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические формулы (4). Решения $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n \in L_2$, а реше-

ния $\tilde{y}_{n+1}, \dots, \tilde{y}_{2n}$ и никакая их нетривиальная комбинация не принадлежит L_2 .

Таким образом мы получили две системы фундаментальных решений уравнения (2). Обозначим их соответственно $\{y_i\}$ $\{\tilde{y}_i\}$.

Лемма 4. Системы решений $\{y_i\}$, $\{\tilde{y}_i\}$ связаны формулой:

$$y(x, k) = \sum_{l=1}^{2n} \tilde{y}_l(x, k) c_l(k),$$

где $c_l(k) = \rho_l + O(k^{-2})$ являются регулярными функциями по K .

3. Введем функцию

$$D_{\pm}(k) = \det \Omega_0(k).$$

Следуя Б. С. Павлову ⁽²⁾ будем называть точку $K = K_0$ особой точкой оператора $L_{\pm}$, если $D_{\pm}(k_0) = 0$. Кратностью особой точки $K = K_0$ будем называть кратность корня $D_{\pm}(k_0) = 0$. Множество всех особых точек оператора $L_{\pm}$ обозначим через E ; множество всех собственных значений — через E_0 ; множество всех особых точек, лежащих на вещественной оси $(-\infty, +\infty)$ — через E_1 ; множество всех точек накопления собственных значений — через E_3 .

Лемма 5. Пусть выполнены условия 1°—3°. Тогда функция $D_{\pm}(k)$ регулярна при $\operatorname{Im} k > 0$, непрерывна при $\operatorname{Im} k \geq 0$ и для нее верна асимптотическая формула

$$D_{\pm}(k) = c + O(k^{-1}), \quad c \neq 0, \quad |k| \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1°—3°. Тогда

1) множество собственных значений, занумерованных с учетом кратности, удовлетворяет условию

$$\sum \operatorname{Im} k_0 < \infty;$$

2) $E_3 \subset E_1$; 3) множество E_1 ограничено, замкнуто, имеет меру нуль и удовлетворяет условию

$$\sum |l_k| \ln |l_k| > -\infty,$$

где $|l_k|$ — длина интервала смежности l_k к множеству E_1 и суммирование распространяется на все ограниченные интервалы смежности.

Лемма 6. Пусть выполняется условие 1°—3° и

$$\|A'(x)\| \leq c \exp(-\varepsilon x^{\alpha}), \quad c > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad (5)$$

тогда

$$|D_{\pm}^{(m)}(k)| \leq c_1 d^m m^{\frac{m}{\alpha}}, \quad m \geq 1, \quad \operatorname{Im} k \geq 0,$$

где c_1 не зависит от m , $d = \text{const}$.

Теорема 2. Пусть выполняется условие $1^\circ-3^\circ$ и (5). Тогда
 1) $E_3 \subset E_2$; 2) множество E_2 ограничено, замкнуто, имеет меру
 нуль и удовлетворяет условию

$$\sum |l_k|^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} < \infty,$$

где $|l_k|$ — длина интервала смежности l_k к множеству E_2 и суммирование распространяется на все ограниченные интервалы смежности.

Теорема 3. Если выполняются все условия теоремы 2 и $\alpha = \frac{1}{2}$, то число собственных значений оператора L_2 конечно.

Методы доказательств аналогичны методам, которые применялись в работах (2, 3).

Выражаю глубокую благодарность М. В. Федорюку за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Московский физико-технический
 институт

Խ. Ա. ՇԻՐԻԿՅԱՆ

$y' = kA(x)y$ տեսքի սխառեմի սպեկտրալ անալիզը կիսաանոնցքի վրա

հիտարկվում է

$$y' = kA(x)y, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

հավասարումը, որտեղ $A(x)$ -ը $2n$ կարգի քառակուսային մատրիցա է, որի սեփական արժեքների կեսը զտնվում է վերին կիսահարթության մեջ, կեսը՝ ստորին կիսահարթության մեջ:

Սահմանված է L_2 օպերատորը $L_2(0, \infty)$ տարածությունում և ապացուցվում է որ, եթե՝

$$\|A'(x)\| \leq c \exp(-\varepsilon \sqrt{x}), \quad c > 0, \quad \varepsilon > 0,$$

ապա L_2 -ի արժեքները կլինեն վերջավոր թվով:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ М. А. Наймарк. Тр. Моск. матем. о-ва, т. 3, 181—270, 1954. ² Б. С. Павлов. Проблемы матем. физики, Вып. 1, Л., 1966. ³ М. В. Федорюк, ДАН СССР, т. 169, № 2, 288—291 (1966).