

УДК 537.312.62

ФИЗИКА

Р. М. Арутюнян

Об уравнениях Гинзбурга—Ландау при наличии тока в сверхпроводнике

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 2/XII 1967)

Как известно, вблизи критической температуры $T_{кр}$ ($T - T_{кр} \ll T_{кр}$), плотность свободной энергии сверхпроводника равна ⁽¹⁾:

$$F_s = F_{n_0} - \alpha \psi \psi^* + \frac{1}{2} \beta \psi^2 \psi^{*2} + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{2m} \left| -i\hbar \vec{\nabla} \psi - \frac{e}{c} \vec{A} \psi \right|^2, \quad (1)$$

где F_{n_0} — свободная энергия в нормальном состоянии при отсутствии тока и внешнего магнитного поля, ψ — величина, пропорциональная щели сверхпроводника, α и β — коэффициенты, зависящие от температуры, $\vec{A}$ — вектор-потенциал, а m и e — соответственно масса и заряд пары. Варьированием свободной энергии по ψ^* и $\vec{A}$ Гинзбургом и Ландау получены следующие уравнения ⁽¹⁾:

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi - \alpha \psi + \beta \psi^2 \psi^* = 0, \quad (2)$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \vec{j} = -\frac{ie\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) - \frac{e^2}{mc} \vec{A} \psi \psi^*. \quad (3)$$

Рассмотрим сверхпроводник в присутствии тока, при заданной величине магнитного поля H , обусловленного током на поверхности. Аналогично случаю во внешнем магнитном поле ⁽²⁾, при отклонении системы от равновесного состояния, энергетический баланс имеет вид

$$\Delta E = \Delta Q - \frac{c}{4\pi} \Delta t \int [\vec{E} \vec{H}] d\vec{z}, \quad (4)$$

где ΔE — изменения энергии сверхпроводника, ΔQ — тепло, подводимое к нему, а интегральный член — электромагнитная энергия, втекающая в сверхпроводник. Так как источники магнитного поля — токи с постоянной плотностью j_0 находятся в сверхпроводнике, то любое состояние с неравномерным распределением токов соответствует наложению на источники индуцированных токов. Поэтому в отличие от

сверхпроводника во внешнем магнитном поле $\vec{H}_0$ ⁽²⁾ при наличии тока необходимо учесть и работу, совершаемую индуцированными электрическими полями $\vec{E}$ над источниками $\vec{j}_0$ ⁽³⁾. Действительно, из соотношения (4) нетрудно получить:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta Q - \frac{c}{4\pi} \Delta t \int \operatorname{div} [\vec{E}\vec{H}] dv = \Delta Q - \frac{c}{4\pi} \Delta t \int (\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}) dv = \\ &= \Delta Q + \frac{c}{4\pi} \int \vec{H} \vec{B} dv + \Delta t \int \vec{E} \vec{j}_0 dv.\end{aligned}$$

где $\vec{H}$ и $\vec{B}$ — напряженность и индукция магнитного поля, удовлетворяющие уравнениям электродинамики:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Пользуясь соотношением $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ и учитывая, что $\Delta Q \leq T \Delta S$ (где ΔS — изменение энтропии системы), найдем, что при $T = \text{const}$ и $\vec{j}_0 = \text{const}$ в равновесии должно быть минимальным выражение:

$$\Phi_s = E - ST - \int \left(\frac{\vec{H}\vec{B}}{4\pi} - \frac{1}{c} \vec{j}_0 \vec{A} \right) dv, \quad (5)$$

где $E - ST = F$ свободная энергия, определяемая формулой (1). При $\vec{j}_0 = 0$, т. е. когда источники поля находятся вне сверхпроводника, получается известное выражение для свободной энергии Φ_s во внешнем магнитном поле $\vec{H}_0$ ⁽²⁾. Варьированием Φ_s (5) по ψ^* и $\vec{A}$ независимо друг от друга получаются уравнения Гинзбурга—Ландау (2), (3). Однако согласно первоначальной постановке задачи нам необходимо искать экстремум функционала (5) при дополнительном условии постоянства магнитного поля $\vec{H}_1$ на поверхности. Это условие можно выразить в виде:

$$\vec{H}_1 = -\frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}\vec{R}]}{R^3} dv, \quad (6)$$

где $\vec{R}$ — расстояние от элемента объема сверхпроводника до произвольно выбранной точки начала координат на поверхности.

Если учесть, что плотность тока $\vec{j}$ функционально зависит от волновой функции ψ и вектор потенциала $\vec{A}$, то становится очевидным, что необходимо варьировать по ψ^* и $\vec{A}$ не Φ_s (5), а функционал ⁽⁴⁾:

$$\Phi'_s = \Phi_s - \frac{\vec{\lambda}}{c} \int \frac{[\vec{j} \vec{R}]}{R^3} dv, \quad (6a)$$

где $\vec{\lambda}$ — постоянный вектор. С помощью (1), (3) и (5) выражение для Φ'_s (6a) в приведенных единицах ⁽¹⁾ примет вид:

$$\begin{aligned} \Phi'_s = & \frac{H_{\text{KM}}^2}{4\pi} \int \left\{ \vec{B}^2 - 2\vec{H}\vec{B} + 2j_0\vec{A} - \psi\psi^* + \frac{1}{2} \psi^2\psi^{*2} + \right. \\ & \left. + \left(-\frac{i}{\chi} \vec{\nabla}\psi - \vec{A}\psi \right) \left(\frac{i}{\chi} \vec{\nabla}\psi - \vec{A}\psi^* \right) \right\} dv - \\ & - \frac{\vec{\lambda}' H_{\text{KM}}^2}{4\pi} \int \left\{ \left[\frac{i}{2\chi} (\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*) + \vec{A}\psi\psi^* \right] \times \vec{R} \right\} \frac{dv}{R^3} + \int F_{n_0} dv, \quad (7) \end{aligned}$$

где H_{KM} — критическое поле для массивного образца, а

$$\lambda' = \frac{\sqrt{2} \lambda}{H_{\text{KM}} \delta_0^3}.$$

В выражениях (5) и (7) надо иметь в виду факт замкнутости токов.

Варьируя (7) по ψ^* и $\vec{A}$ получаем уравнения:

$$\left(\frac{i}{\chi} \vec{\nabla} + \vec{A} \right)^2 \psi + \frac{\vec{\lambda}}{R^3} \left\{ \vec{R} \times \left(\frac{i}{\chi} \vec{\nabla} + \vec{A} \right) \right\} \psi - \psi + \psi^2\psi^* = 0, \quad (8)$$

$$-\text{rot rot } \vec{A} = \frac{i}{2\chi} (\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*) + \vec{A}\psi\psi^* - \frac{\vec{\lambda} \times \vec{R}}{R^3} \psi\psi^*. \quad (9)$$

Сравнение уравнений (8) и (9) с (2) и (3) (в приведенных единицах) показывает, что при нашей постановке задачи появляются члены с пропорциональным множителем λ . Как следует из (8) и (9), вклад этих членов существенен вблизи поверхности сверхпроводника, так как при $R \gg 1$ ими можно пренебречь. В простейшем случае равномерного распределения тока с плотностью $j = j_0$ условие (6) заменяется выражением для тока (3):

$$\vec{j}_0 = -\frac{ie\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*) - \frac{e^2}{mc} \vec{A}\psi\psi^*. \quad (10)$$

Подставляя значение $\vec{A}$ из (10) в функцию (5), получим (в приведенных единицах ⁽¹⁾):

$$\begin{aligned} \Phi_s = & \int F_{n_0} dv + \frac{H_{\text{KM}}^2}{4\pi} \int \left\{ -\vec{H}^2 - \psi\psi^* + \frac{1}{2} \psi^2\psi^{*2} - \frac{j_0^2}{\psi\psi^*} + \frac{1}{\chi^2} \vec{\nabla}\psi \vec{\nabla}\psi^* + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\chi^2} \frac{(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*)^2}{\psi\psi^*} - \frac{i}{\chi} j_0 \frac{(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*)}{\psi\psi^*} \right\} dv, \quad (11) \end{aligned}$$

где κ — параметр теории (¹). Итак, в этом случае приходим к вариационной задаче без дополнительного условия.

Варьируя Φ_s (10) по ψ^* , находим:

$$-\psi + \psi^2\psi^* + \frac{j_0^2}{\psi\psi^{*2}} - \frac{1}{2\kappa^2} \frac{\psi^*\vec{\nabla}^2\psi + \psi\vec{\nabla}^2\psi^*}{\psi^*} + \frac{1}{4\kappa^2} \frac{(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)^2}{\psi\psi^{*2}} = 0. \quad (12)$$

Учитывая, что в общем случае ψ функция комплексная

$$\psi(r) = f(r) \exp[i\varphi(r)],$$

из (11) получим:

$$-f(r) + f^3(r) + \frac{j_0^2}{f^3(r)} = \frac{1}{\kappa^2} \vec{\nabla}^2 f(r). \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что то же самое уравнение для модуля волновой функции $f(r)$ получится при подстановке значения $\bar{A}$ из выражения тока (10) в уравнение (2).

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Գինգբուրգ—Լանդաուի հավասարումները գերհաղորդչիում հոսանքի առկայության դեպքում

Ֆենոմենոլոգիական տեսության շրջանակներում քննարկվում են Գինգբուրգ-Լանդաուի հավասարումներն այն դեպքում, երբ գերհաղորդչի միջով հոսանք է անցնում: Տույց է տրված, որ հոսանքի առկայության դեպքում գերհաղորդչի ազատ էներգիան չի կարելի վարիացիայի ենթարկել՝ դիտարկելով ալիքային ֆունկցիան և վեկտոր-պոտենցիալը իրարից անկախ: Հաշվի առնելով այդ հանգամանքը, ազատ էներգիայի մինիմումի սկզբունքից հանգում ենք այն բանին, որ Գինգբուրգ-Լանդաուի հավասարումներում առաջանում են կազրանժի արտադրիչին համեմատական անդամներ: Այդ անդամները կարևոր են զանգվածային գերհաղորդչներում մակերևույթի անմիջական մոտերքում: Լոնդոնյան թափանցելիության խորությանը գերազանցող հեռավորությունների վրա այդ լրացուցիչ անդամները կարելի է արհամարհել:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 20, 1064 (1950). ² В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 34, 113 (1958). ³ Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, § 30, 1957. ⁴ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Гостехиздат, М., § 68, 1957.