ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVI 1968 4

УДК 517—948

МАТЕМАТИКА

М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян

К теории S-матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 14/II 1968)

1. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$ (I_n — единичная матрица n-го порядка),

$V(r)$ $(0 \leq r < \infty)$ — эрмитова матрица-функция $2n$-го порядка. С помощью матриц-функций J и $V(r)$ можно написать каноническое дифференциальное уравнение с комплексным параметром λ:

$$J\frac{dY}{dr} = \lambda Y = V(r)Y \tag{1}$$

для $(2n \times n)$-матрицы-функции $Y(r; \lambda)$ $(0 \leq r < \infty)$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, уравнение (1) рассматривается в предположении суммируемости потенциала

$$V(r) \ (V(r) = V^*(r) \in L^1_{2n\times 2n}(0, \infty)^*).$$

При этом предположении уравнение (1) имеет одно и только одно решение $Y = X(r; \lambda)$, допускающее асимптотику:

$$X(r; \lambda) = \begin{pmatrix} I_n \\ -iI_n \end{pmatrix} e^{i\lambda r} S(\lambda) + \begin{pmatrix} I_n \\ iI_n \end{pmatrix} e^{-i\lambda r} + 0(1) \quad (r \to \infty), \tag{2}$$

где $S(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — некоторая унитарная матрица-функция n-го порядка. Последняя называется *S-матрицей* уравнения (1).

Как известно (см., например, ([1])), с помощью простой подстановки, сохраняющей суммируемость потенциала и S-матрицу уравнения, каноническое дифференциальное уравнение (1) может быть преобразовано к уравнению с потенциалом $V(r)$, удовлетворяющим условию J-эрмитовости: $JV = -VJ$. Потенциал, удовлетворяющий этому условию, будем называть *нормализованным*.

---

* Через $L^p_{n\times m}(a, b)$ обозначается класс $(n\times m)$-матриц функций с элементами из $L^p(a, b)$.

При условии вещественности потенциала $V(r)$ ($\in \mathbf{L}^1_{2n\times 2n}(0, \infty)$) существование решения $X(r; \lambda)$ уравнения (1) с асимптотикой (2), вместе с рядом структурных свойств S-матрицы $S(\lambda)$, было установлено в ([2]). В случае эрмитова суммируемого потенциала $V(r)$ (и даже для бесконечномерного канонического уравнения) существование решения $X(r; \lambda)$ с асимптотикой (2) было доказано в ([1]). Там же было показано, что матрица-функция определяемая асимптотическим соотношением (2), может быть также истолкована как матрица рассеяния в рамках нестационарной теории рассеяния.

Здесь в обобщении результатов статьи ([2]) устанавливается предложение, в некотором отношении окончательное.

Теорема 1. *Пусть $S(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) — унитарная матрица n-го порядка: $S^*S = I_n$. Для того, чтобы она была S-матрицей некоторого канонического дифференциального уравнения* (1) *с суммируемым потенциалом $V(r)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *матрица-функция $S(\lambda)$ допускает представление*

$$S(\lambda) = I_n - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t) e^{-i\lambda t} dt, \tag{3}$$

где $\Gamma \in \mathbf{L}^1_{n\times n}(0, \infty)$.

2) Частные индексы матрицы-функции $S(\lambda)$ равны нулю. При выполнении этих условий существует единственное каноническое дифференциальное уравнение с нормализованным потенциалом $V \in \mathbf{L}^1_{2n\times 2n}(0, \infty)$, имеющее данную матрицу-функцию $S(\lambda)$ своей S-матрицей.

Поясним смысл второго условия. Как показано в ([3]), если для некоторой матрицы-функции $S(\lambda)$ (не обязательно унитарной) выполняется условие 1) и $\det S(\lambda) \neq 0$ ($-\infty < \lambda < \infty$), то существует единственная правая факторизация матрицы-функции $S(\lambda)$:

$$S(\lambda) = S_-(\lambda) D(\lambda) S_+(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty) \tag{4}$$

такая, что

$$S_-(\lambda) = I_n - \int_0^{\infty} s_-(t) e^{-i\lambda t}\, dt \quad (s_- \in \mathbf{L}^1_{n\times n}(0, \infty);\ \det S_-(\lambda) \neq 0$$

$$\text{при } \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0 \tag{5}$$

$$S_+(\lambda) = I_n + \int_0^{\infty} s_+(t) e^{i\lambda t} dt \quad (s_+ \in \mathbf{L}^1_{n\times n}(0, \infty);\ \det S_+(\lambda) \neq 0 \text{ при } \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0, \tag{6}$$

а $D(\lambda)$ — диагональная матрица:

$$D(\lambda) = \|\delta_{jk}\zeta^{\varkappa_j}\|_1^n \quad \left(\zeta = \frac{\lambda - i}{\lambda + i};\ \varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \varkappa_n \text{ — целые числа}\right).$$

Числа $\varkappa_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ называются *частными индексами* (*правыми*) матрицы-функции $S(\lambda)$. Если для матрицы-функции $S(\lambda)$ выполняется условие 1) и она унитарна то $|\det S(\lambda)| = 1$, а поэтому в этом случае $S(\lambda)$ допускает факторизацию (4). Условие 2) теоремы 1 означает, что $D(\lambda) = I_n$, так что

$$S(\lambda) = S_-(\lambda) S_+(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{7}$$

2. При доказательстве теоремы 1 попутно устанавливается факторизационная теорема, представляющая самостоятельный интерес.

Прежде чем ее сформулировать, условимся относительно следующего обозначения: если $\mathbf{\Gamma} \in \mathbf{L}^1_{n\times n}(0, \infty)$, то через Γ обозначается оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}^2_{n\times 1}(0, \infty)$ * следующим образом:

$$(\mathbf{\Gamma} f)(t) = \int_0^\infty \Gamma(t+s) f(s)\, ds \quad (f \in \mathbf{L}^2_{n\times 1}(0, \infty)).$$

Через $\|\mathbf{\Gamma}\|$ обозначается норма оператора Γ в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}^2_{n\times 1}(0, \infty)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы данная матрица-функция* $\Gamma_0 \in \mathbf{L}^1_{n\times n}(0, \infty)$ *допускала продолжение* $\Gamma \in \mathbf{L}^1_{n\times n}(-\infty, \infty)$ $(\Gamma(t) = \Gamma_0(t)$ *при* $t \in [0, \infty))$, *для которого матрица-функция* $S(\lambda)$, *определяемая равенством* (3), *была унитарна и имела частные индексы, равные нулю, необходимо и достаточно, чтобы* $\|\Gamma_0\| < 1$. *При выполнении этого условия требуемое продолжение* Γ $(\in \mathbf{L}^1_{n\times n}(-\infty, \infty))$ *определяется единственным образом.*

Укажем процедуру построения матрицы-функции $S(\lambda)$ по данному $\Gamma_0 \in \mathbf{L}^1_{n\times n}(0, \infty)$. Оказывается, условие $\|\mathbf{\Gamma}_0\| < 1$ обеспечивает существование в классе $\mathbf{L}^1_{2n\times n}(0, \infty)$ единственного решения уравнения

$$\begin{pmatrix} g_-(t) \\ g_+(t) \end{pmatrix} + \int_0^\infty \begin{pmatrix} 0 & \Gamma(t+s) \\ \Gamma^*(t+s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_-(s) \\ g_+(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \Gamma(t) \\ \Gamma^*(t) \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{9}$$

Положим

$$\begin{aligned} G_-(\lambda) &= I_n - \int_0^\infty g_-(t) e^{-i\lambda t}\, dt \quad (\operatorname{Im} \lambda \leqslant 0); \\ G_+(\lambda) &= I_n - \int_0^\infty g_+(t) e^{i\lambda t}\, dt \quad (\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0). \end{aligned} \tag{10}$$

---

* Скалярное произведение в $\mathbf{L}^2_{n\times 1}(a, b)$ вводится обычным образом: если $f = \{f_j\}_1^n \in \mathbf{L}^2_{n\times 1}(a, b)$, $g = \{g_j\}_1^n \in \mathbf{L}^2_{n\times 1}(a, b)$, то $(f, g) = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(s) \overline{g_j(s)}\, ds$

Таким образом, $G_-(\lambda)$ ($G_+(\lambda)$) — матрица-функция n-го порядка, голоморфная внутри нижней (верхней) полуплоскости и непрерывная вплоть до границы. Далее обнаруживается, что и определители $\det G_\mp(\lambda) \neq 0$ в соответствующих (замкнутых) полуплоскостях. Поэтому матрица-функция

$$S(\lambda) = G_-(\lambda) G_+(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty) \tag{11}$$

унитарна и имеет частные индексы, равные нулю. После этого легко проверяется, что $S(\lambda)$ допускает представление (3), в котором $\Gamma(\in \mathbf{L}^1_{n\times n}(-\infty, \infty)$ есть требуемое продолжение данного $\Gamma_0(\in \mathbf{L}^1_{n\times n}(0, \infty))$.

3. Можно указать две процедуры восстановления уравнения (1) с суммируемым потенциалом V по его S-матрице $S(\lambda)$. Одна из них (с которой мы и начнем) является переносом с некоторой переработкой на уравнение (1) процедуры, разработанной в ([4]) для случая векторного дифференциального уравнения 2-го порядка. Тут же укажем, что при других предположениях на потенциал V перенос этой процедуры на уравнение (1) был уже осуществлен в работах ([5, 6]). Вторая процедура является дальнейшим развитием процедуры, указанной в ([2, 7]).

Условимся для $\Gamma \in \mathbf{L}^1_{n\times n}(0, \infty)$ через $\mathbf{\Gamma}_r$ $(0 \leqslant r < \infty)$ обозначать оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}^2_{n\times n}(0, \infty)$ по формуле

$$(\mathbf{\Gamma}_r f)(t) = \int_0^\infty \Gamma(r + t + s) f(s)\, ds \qquad (f \in \mathbf{L}^2_{n\times 1}(0, \infty)).$$

Пусть унитарная матрица-функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 1. Образуем для $r \geqslant 0$ с помощью матрицы-функции $\Gamma(t)$, взятой из представления (3), матричные интегральные уравнения:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_r \mathbf{\Gamma}_r^*)\, \Phi_r(t) = \Gamma(r + t) \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{12}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_r^* \mathbf{\Gamma}_r)\, \Psi_r(t) = \Gamma^*(r + t) \qquad (0 \leqslant t < \infty). \tag{13}$$

На основании теоремы 2 можно утверждать, что в классе $L^1_{n\times n}(0, \infty)$ эти уравнения имеют единственные решения Φ_r, Ψ_r. С помощью их потенциал V уравнения (1) с S-матрицей, равной $S(\lambda)$, находится по формуле

$$V(r) = \begin{pmatrix} A(r) & B(r) \\ B(r) & -A(r) \end{pmatrix} \qquad (0 \leqslant r < \infty), \tag{14}$$

где

$$A(r) = \frac{\Phi_r(r) - \Psi_r(r)}{2i}, \quad B(r) = \frac{\Phi_r(r) + \Psi_r(r)}{2i}.$$

4. Локально суммируемая матрица-функция n-го порядка $H(t) = H^*(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ называется здесь *эрмитовой акселерантой* (ср. ([2, 8])), если векторное интегральное уравнение

$$\varphi(t) + \int_0^r H(t - s)\, \varphi(s)\, ds = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant r)$$

при любом $r > 0$ имеет единственнсе непрерывное решение $\varphi(t) \equiv 0$.

Для акселеранты при любом $r>0$ существует резольвентное ядро $\Gamma_r(t, s)$, определяемое из уравнения

$$\Gamma_r(t, s)+\int_0^r H(t-u)\,\Gamma_r(u, s)\,du = H(t-s) \quad (0\leqslant t, s\leqslant r) \quad (15)$$

как непрерывная вектор-функция от s со значениями из $\mathbf{L}^1_{n\times n}(0, r)$. Можно придать точный смысл матрицам-функциям

$$A(r) = -2\,\mathrm{Im}\,\Gamma_{2r}(0, 2r); \quad B(r) = 2\,\mathrm{Re}\,\Gamma_{2r}(0, 2r), \quad (16)$$

которые при этом оказываются локально суммируемыми. После этого можно образовать каноническое дифференциальное уравнение (1) с потенциалом $V(r)$, определяемым по формуле (14).

Имеет место предложение, согласно которому каждое каноническое уравнение (1) с нормализованным потенциалом порождается указанным образом одной и только одной акселерантой ([7, 2, 8]). Это предложение может быть дополнено следующей теоремой.

Теорема 3. *Для того, чтобы некоторая локально суммируемая матрица-функция* $H(t)=H^*(-t)$ $(-\infty<t<\infty)$ *была акселерантой некоторого канонического дифференциального уравнения* (1) *с суммируемым нормализованным потенциалом, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующим двум условиям:*

$$1)\ H(t)\in \mathbf{L}^1_{n\times n}(-\infty, \infty) \ \text{и}\ 2)\ \det\left(I_n+\int_{-\infty}^{\infty} H(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\right)>0 \ (-\infty<\lambda<\infty).$$

Связь между акселерантой, порождающей уравнение (1), и S-матрицей этого уравнения устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть* $S(\lambda)=S_-(\lambda)\,S_+(\lambda)$ *факторизация* S*-матрицы канонического дифференциального уравнения* (1) *с суммируемым нормализованным потенциалом* V. *Тогда имеет место равенство*

$$S_+(\lambda)\,S_+^*(\lambda) = I_n+\int_{-\infty}^{\infty} H(t)\,e^{i\lambda t}\,dt = S_-^{-1}(\lambda)\,S_-^{*-1}(\lambda)\ (-\infty<\lambda<\infty), \quad (17)$$

где $H(t)$ — *акселеранта рассматриваемого уравнения* (1).

Таким образом, вторая процедура восстановления канонического дифференциального уравнения (1) заключается в следующем. По формулам (9) и (10) производится факторизация матрицы $S(\lambda)$ т. е. определяются $S_-(\lambda)=G_-(\lambda)$ и $S_+(\lambda)=G_+^{-1}(\lambda)$; затем из (17) находится эрмитова акселеранта $H(t)$, которая позволяет уже по формулам (15), (16) и (14) получить искомый потенциал V.

Отметим, что средний член в равенстве (17) есть не что иное, как $d\Sigma(\lambda)/d\lambda$, где $\Sigma(\lambda)$ — спектральная матрица-функция канонического дефференциального уравнения (1) (о спектральной матрице-функции уравнения (1) см. ([5])).

Одесский инженерно-строительный институт
Ереванский государственный университет

Մ. Գ. ԿՐԵՅՆ, Ֆ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ

Հանրագումարելի պոտենցիալով կանոնիկ դիֆերենցիալ հավասարումների S-մատրիցների տեսության մասին

Հոդվածում ապացուցվում է անհրաժեշտ և բավարար պայմանը այն բանի, որ տվյալ n կարգի $S(\lambda)$ *ունիտար մատրից-ֆունկցիան լինի* $V(r)$ $(0<r<\infty)$ *հանրագումարելի պոտենցիալով որոշ (1) կանոնիկ հավասարման S-մատրից։*

Միաժամանակ ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման այն բանի, որ (3) տեսքի $S(\lambda)$ *ունիտար մատրից-ֆունկցյան թույլատրի (7) տեսքի ֆակտորիզացիա։*

Ստացված է նաև հանրագումարելի պոտենցիալով (1) տեսքի կանոնիկ դիֆերենցիալ հավասարումը ծնող աքսելերանտի լրիվ բնութագիրը։ Այն արտահայտվում է 4 թեորեմի 1) և 2) պայմանների տեսքով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. М. Адамян*, ДАН СССР, 178, № 1 (1968). [2] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, 111, № 6 (1956). [3] *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, УмН 13, вып. 2 (80) (1958). [4] *З. С. Агранович* и *В. А. Марченко*, Обратная задача теории рассеяния. Харьковский государственный университет, 1959. [5]. *М. Г. Гасымов* и *Б. М. Левитан*, ДАН СССР, 167, № 5 (1966). [6] *М. Г. Гасымов*, ДАН СССР, 169. № 5 (1966). [7] *М. Г. Крейн*. ДАН СССР, 105, № 4 (1955). [8] *Ф. Э. Мелик-Адамян*, ДАН АрмССР, т. 45, № 4 (1967).