ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVI 1968 4

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

А. Б. Нерсесян

О некоторых свойствах обобщенных уравнений типа Вольтерра

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 5/I 1968)

В работе ([1]) был выделен класс интегральных уравнений, являющихся естественным обобщением классического уравнения Вольтерра. В предлагаемой заметке для изучения этих уравнений вводится соответствующая символика, а также устанавливаются дальнейшие их свойства и указываются некоторые возможности применения полученных результатов.

1°. Пусть D — произвольное открытое множество n-мерного эвклидова пространства ($n \geqslant 1$). Следуя ([1]), назовем открытое множество $S \subset D \times D$ вольтерровским, если любое ядро $K(x, t) \in L_2(D \times D)$, тождественно равное нулю вне S, не имеет собственных значений. Особый интерес представляет случай, когда вместе с множеством S вольтерровским является и его дополнение $CS = D \times D - \overline{S}$, — в этом случае S будем называть максимальным вольтерровским множеством. Полная характеристика вольтерровских множеств дается теоремами 1 и 2 ([1]).

Пусть S некоторое (в дальнейшем зафиксированное) максимальное вольтерровское множество. Несколько отклоняясь от обозначений работы ([1]), условимся записывать $x \succ t$, если $(x, t) \in \overline{S}$ и $x \prec t$ — в противном случае*. Под обозначением

$$\int_t^x f(\tau)\, d\tau \qquad (x, t \in D)$$

будем подразумевать n-мерный интеграл функции f, распространенный на часть области D, характеризуемую условием $t \prec \tau \prec x$, если $x \succ t$. Если же $x \prec t$, то в этом интеграле следует переставить „пре-

* Такая запись оправдывается тем обстоятельством, что, согласно теореме 2 ([1]), множество S индуцирует операцию упорядочения в множестве точек области D, удовлетворяющую следующим аксиомам: а) из $x \prec y$ ($x \neq y$) следует $y \succ x$, б) из $x \succ y \succ z$ следует $x \succ z$.

делы" и изменить знак на обратный. Обозначим теперь через x^0 и x^1 соответственно „наибольшую" и „наименьшую" точки множества D, т. е. будем считать, что для всех $x \in D$ $x^0 \prec x \prec x^1$ (при этом необязательно отождествлять точки x^0 и x^1 с некоторыми точками из D).

В указанных обозначениях обобщенное уравнение типа Вольтерра второго рода записывается в виде

$$y(x) = \lambda \int_{x^0}^{x} K(x, t)\, y(t)\, dt + f(x), \tag{1}$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D, \quad K(x, t) \in L_2(S), \quad f(x) \in L_2(D).$$

Сопряженное уравнение записывается в виде

$$z(x) = \int_{x}^{x^1} \overline{K(t, x)}\, z(t)\, dt + f(x). \tag{1*}$$

Уравнение Фредгольма второго рода в этих обозначениях запишется в виде (1) с точкой x^1 вместо переменного „верхнего предела" x интеграла.

2°. Оказывается, что все основные результаты классической теории уравнений Вольтерра полностью сохраняют свою силу в случае уравнения (1), причем даже аналитическая запись формул формально не меняется. Последнее обстоятельство является следствием следующего легко проверяемого „правила Дирихле" перестановки интегралов с переменными пределами

$$\int_t^x \int_t^\tau f(s, \tau)\, ds\, d\tau = \int_t^x \int_s^x f(s, \tau)\, d\tau\, ds \tag{2}$$

из которого, в частности, следует, что уравнения (1) и (1*) являются взаимно сопряженными.

Пусть теперь ядро уравнения (1) удовлетворяет оценке

$$|K(x, t)| \leqslant A(x)\, B(t), \qquad x^0 \prec t \prec x \prec x^1, \tag{3}$$

где A, $B \in L_2(D)$. Тогда итерированные ядра будут удовлетворять оценке

$$\int_t^x \int_t^\tau |K_n(\tau, s)|^2\, ds\, d\tau \leqslant \frac{1}{[(n-1)!]^2} \int_t^x A^2(\tau) \int_t^\tau B^2(s) \left[\int_s^\tau A(r)\, B(r)\, dr \right]^{2n-2} ds\, d\tau, \tag{4}$$

а решение уравнения (1) (почти всюду на D) — оценке

$$|y(x)| \leqslant |f(x)| +$$

$$+ |\lambda|\, A(x) \int_{x^0}^{x} B(t) \exp\left\{ |\lambda| \int_t^x A(\tau)\, B(\tau)\, d\tau \right\} |f(t)|\, dt. \tag{5}$$

Указанные оценки можно доказать, пользуясь формулой

$$\int_t^x \varphi(s)\left(\int_t^s \varphi(\tau)\,d\tau\right)^{\alpha-1}\left(\int_s^x \varphi(\tau)\,d\tau\right)^{\beta-1} ds =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\int_t^x \varphi(\tau)\,d\tau\right)^{\alpha+\beta-1} \qquad (\mathrm{Re}\,\alpha,\ \mathrm{Re}\,\beta > -1). \tag{6}$$

Заметим, что эта формула доказывается не так просто, как в классическом случае, так как интегрированием по частям нельзя воспользоваться.

Если не подвергать ядро $K \in L_2$ ограничению (3), то нормы итерированных ядер, вообще говоря, стремятся к нулю медленнее, чем в оценке (4). Можно доказать, что в этом случае

$$\int_t^x \int_t^\tau |K_n(\tau,\ s)|^2\,ds\,d\tau \leqslant \frac{1}{n!}\left[\int_t^x \int_t^\tau |K(\tau,\ s)|^2\,ds\,d\tau\right]^n, \tag{7}$$

причем эту оценку (доказанную в классическом одномерном случае Ф. Трикоми [2]), вообще говоря, нельзя улучшить.

3°. Рассмотрим теперь следующее уравнение с интегралом Стилтьеса

$$y(x) = \lambda \int_{x^0}^x y(\tau)\,K(x,\,d\tau) + f(x), \quad x^0 \prec x \prec x^1, \tag{8}$$

где $K(x,\ E)$ — функция точки $x = (x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n) \in D$ и аддитивная функция множества $E \subset D$.

Интегрирование, как и в (1), производится по области $x^0 \prec \tau \prec x$, т. е. функция $K(x,\ E)$ определена для тех значений аргумента, для которых $e \prec x$ $(e \in E)$.

Для определенности предположим, что интеграл в уравнении (8) непрерывен в $\overline{D}$ для любой непрерывной в $\overline{D}$ функции $y(x)$.

Нас интересуют случаи, когда уравнение (8) с произвольной непрерывной функцией f имеет единственное непрерывное решение, получаемое, к тому же, методом последовательных приближений. Простейшие примеры показывают, что ни одно из этих условий, вообще говоря, не выполняются. Оказывается, что для выполнения всех этих условий достаточно, чтбы ядро K удовлетворяло оценке

$$\theta = \inf_{x \to t} \operatorname{Sup}_{t \prec \tau \prec x} \int_t^x |K(\tau,\ ds)| < |\lambda|^{-1}. \tag{9}$$

Интересно отметить, что это ограничение касается поведения ядра $K(x,\ E)$ лишь вблизи границы ∂S зафиксированного в п. 1° вольтерроеского множества S (т. е. при тех значениях $(x,\ E)$, для которых множество точек вида $(x,\ e)$, $e \in E$, лежит вблизи ∂S). В частности, если функция $K(x, E)$ непрерывна на ∂S, то $\theta = 0$ и, таким образом, уравнение (8) обладает требуемыми свойствами при любом $\lambda \neq \infty$. В этом случае уравнение (8) обладает свойствами уравнений Вольтерра, хотя интегрирование в нем может производиться одновременно по многообразиям различных измерений (от нуль-мерных до n-мерных).

4°. Большинство классических задач для гиперболических и параболических уравнений путем соответствующего подбора ядра можно свести к уравнению вида (8) с $\theta = 0$. Однако результаты п. 3° можно применить к гораздо более общим дифференциально-функциональным уравнениям и, в частности, к уравнениям с отклоняющимся аргументом. В последнем случае особый интерес представляют по существу не исследованные пока задачи для уравнений с частными производными. Имеющиеся в этой области некоторые результаты И. М. Гуля ([3]) могут быть усилены применением критерия (9).

Гораздо бо́льшие возможности для применений представляет предложенная в работе ([4]) (§ 2) идея „выделения вольтерровской части". Суть ее состоит в том, что в уравнении Фредгольма второго рода выбором подходящей максимальной вольтерровской области S интеграл представляется в виде суммы двух интегралов типа (1) и (1*) соответственно. Если при этом окажется, что в области $CS = D \times D - S$ ядро $K(x, t)$ достаточно „мало", то это уравнение мы можем решить в два приема: сначала, приняв второй интеграл за известный, решим соответствующее уравнение типа Вольтерра, а потом, использовав „малость" ядра K на CS, решим полученное уравнение Фредгольма. Если, например, окажется, что в области S (т. е. в обозначениях п. 1°, при $x^0 < t < x$) удовлетворяется оценка (3), а в дополнительной области CS (т. е. при $x < t < x^1$) $|K(x, t)| \leqslant \varepsilon(x, t)$ ($\varepsilon(x, t) \equiv 0$ при $x > t$ и $\varepsilon(x, t) \in L_2(CS)$), то указанная схема осуществима, если норма функции

$$|\lambda| A(x) \int_{x_0}^{x} B(\tau) \exp\left\{|\lambda| \int_{\tau}^{x} A(s) B(s)\, ds\right\} \varepsilon(\tau, t)\, dt \tag{10}$$

в $L_2(D \times D)$ меньше единицы. В противном случае этот процесс можно повторить уже применительно к преобразованному ядру, выбрав подходящее (вообще говоря, отличное от S) максимальное вольтерровское множество S' и т. д.

Этот же подход можно применить и при изучении уравнений с интегралами Стилтьеса.

5°. Как можно было заметить, вышеприведенные результаты, как и результаты работы ([1]), основывались на систематическом использовании понятия вольтерровского множества, индуцирующего соответствующее упорядочение. Конечномерность пространства нигде существенной роли не играла, поэтому указанные результаты, как и соответствующая символика, привлечением теории абстрактного интегрирования могут быть перенесены на случай абстрактных пространств.

Здесь необходимо отметить, что попытка построить теорию уравнений Вольтерра в абстрактных пространствах, по-видимому, впервые была предпринята В. М. Добровским ([5]), который трактовал понятие уравнения Вольтерра с несколько иной, но более широкой, точки зрения.

В заключение отметим, что, подобно классическому случаю, результаты этой заметки могут быть перенесены на случай других классов ядер в уравнении (1) (изменится разве что оценка (7)), а также на случай нелинейных функциональных уравнений (см., например, ([4])).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Վոլտերայի տիպի ընդհանրացված հավասարումների հատկությունների մասին

Աշխատանքի ([1]) արդյունքների հիման վրա դուրս են բերվում ընդհանրացված Վոլտերայի տիպի ինտեգրալ հավասարումների որոշ հատկություններ։ Մտցված են հարմար նշանակումներ, որոնք նպաստում են այն հանգամանքին, որ բանաձևերի արտաքին տեսքը մնում է այնպիսին, ինչպիսին էր կլասիկ Վոլտերայի տիպի հավասարումների դեպքում։

Ուսումնասիրվում են նաև Ստիլտյեսի ինտեգրալներով հավասարումները։ Այստեղ ստացված են պայմաններ, որոնք ապահովում են հաջորդական մոտավորությունների եղանակի զուգամիտությունը։

Նշվում են կիրառման հնարավորությունները։ Մասնավորապես, արդյունքները կարելի է օգտագործել շեղվող արգումենտով հավասարումների համար Կոշու խնդրի ուսումնասիրության ժամանակ։

Հիմնավորվում է այսպես կոչված «Վոլտերայի մասի անջատման» եղանակը ([4])։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Б. Нерсесян*, ДАН СССР, 155, № 5, 1006 (1964). [2] *Ф. Трикоми*, Интегральные уравнения, М., 1960. [3] *И. М. Гуль*, УМН, 10, вып. 2, 153 (1955). [4] *А. Б. Нерсесян*, ДАН АрмССР, 36, № 4, 193 (1963). [5] *В. М. Дубровский*, Мат. сб., 7 (49), № 1, 167 (1940).