

УДК 537.312.62

Р. М. Арутюнян

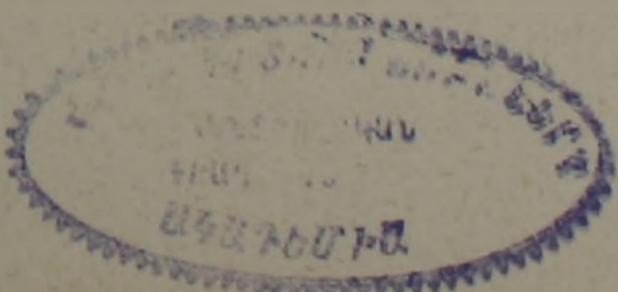
О сверхпроводящем состоянии пленки с током

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 2/XII 1967)

В работе Гинзбурга и Ландау ⁽¹⁾ было показано, что в случае тонких сверхпроводящих пленок в присутствии тока решение для волновой функции ψ (ψ — величина, пропорциональная щели) может существовать до значения плотности тока $j_{\text{окр}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$; (здесь и ниже все величины даны в приведенных единицах ⁽¹⁾). Но при $j_0 = j_{\text{окр}}$ свободная энергия в сверхпроводящем состоянии F_s меньше свободной энергии в нормальном состоянии F_{n_0} ⁽²⁾. Поэтому интересно поведение волновой функции ψ при значениях плотности тока $j_0 > j_{\text{окр}}$. В работах ^(1, 3) учитывается координатная зависимость ψ только по толщине пленки, что при $x \ll 1$ (где x — параметр, входящий в теорию) приводит к значению $\psi = \text{const}$. Естественно рассмотреть координатную зависимость ψ и по направлению тока. На аналогичную ситуацию указал Блох ⁽⁴⁾ при изучении вопроса о сверхпроводящем состоянии тонкого цилиндрического кольца с током. Наша задача — в рамках феноменологической теории Гинзбурга—Ландау изучить этот вопрос для пленки с током, при толщине пленки $2d < \delta_0$ (δ_0 — лондонская глубина проникновения). Для равномерного распределения тока с плотностью $j = j_0$, свободная энергия Φ_s сверхпроводника имеет вид ⁽⁵⁾:

$$\Phi_s = \int F_{n_0} dV + \frac{H_{\text{к.м}}^2}{4\pi} \int \left\{ -\vec{H}^2 - \psi\psi^* + \frac{1}{2}\psi^2\psi^{*2} - \frac{j_0^2}{\psi\psi^*} + \frac{1}{x^2} \vec{\nabla}\psi \vec{\nabla}\psi^* + \right. \\ \left. + \frac{1}{4x^2} \frac{(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*)^2}{\psi\psi^*} - \frac{i}{x} j_0 \frac{(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*)}{\psi\psi^*} \right\} dV, \quad (1)$$

где F_{n_0} — свободная энергия в нормальном состоянии, H — магнитное поле, обусловленное током, а $H_{\text{к.м}}$ — критическое магнитное поле для массивного образца. Варьируя Φ_s (1) по ψ^* , получается уравнение ⁽⁵⁾:



$$-\psi + \psi^2\psi^* + \frac{j_0^2}{\psi\psi^{*2}} - \frac{1}{2x^2} \frac{\psi^* \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \psi^*}{\psi^*} + \frac{1}{4x^2} \frac{(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)^2}{\psi\psi^{*2}} = 0. \quad (2)$$

Подставляя функцию $\psi(r) = f(r) \exp[i\varphi(r)]$ в (2), приходим к следующему уравнению:

$$-f(r) + f^3(r) + \frac{j_0^2}{f^3(r)} = \frac{1}{x^2} \nabla^2 f(r). \quad (3)$$

Так как мы рассматриваем задачу в направлении тока (по координатной оси ox), то тем самым пренебрегаем изменением величин ψ , j и вектор потенциала \vec{A} по толщине пленки. При значениях $x \ll 1$ и $2d \ll \lambda_0$ такое приближение вполне допустимо. Действительно, пользуясь решением для \vec{A} (1)

$$A = \frac{H_1 \operatorname{ch} \psi z}{\psi \operatorname{sh} \psi d}$$

(справедливого при $\psi = \text{const}$) находим, что $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ пропорционально $\frac{x}{d}$, а

уравнения для \vec{A} (1) удовлетворяются с точностью членов, пропорциональных $\frac{x}{d}$ и $\frac{x^2}{d}$ (впоследствии увидим, что для полученных нами

решений $\psi(x)$ действительно $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ пропорциональны x , x^2).

Очевидно, что при нашей постановке задачи следует учесть и наличие фазы $\varphi(x)$ в волновой функции $\psi(x)$. После однократного интегрирования уравнения (3) получим:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = x^2 \left\{ -f^2 + \frac{1}{2} f^4 - \frac{H_1^2}{d^2 f^2} + C^2 \right\}, \quad (4)$$

где C^2 — постоянная интегрирования, а $\frac{H_1}{d} = j_0$.

Все возможные значения выражения

$$-f^2(x) + \frac{1}{2} f^4(x) - \frac{H_1^2}{d^2 f^2(x)}$$

при данном $\frac{H_1}{d}$ лежат на кривых рис. 1 (6).

Ввиду того, что левая часть (4) положительная, то C^2 запишем в виде:

$$C^2 = f_0^2 - \frac{1}{2} f_0^4 + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2}, \quad (5)$$

где f_0 — минимальное значение $f(x)$. Делая подстановку $u^2(x) = f^2(x) - f_0^2$ из (4), (5), приходим к уравнению:

$$\frac{du}{\left\{ u^4 + (3f_0^2 - 2)u^2 + 2\left(f_0^4 - f_0^2 + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2} \right) \right\}^{1/2}} = \pm \frac{x}{V\sqrt{2}} dx. \quad (6)$$

Характер решения $f(x)$ (3) существенно зависит от значения дискриминанта биквадратного уравнения:

$$u^4 + (3f_0^2 - 2)u^2 + 2\left(f_0^4 - f_0^2 + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2} \right) = 0, \quad (6a)$$

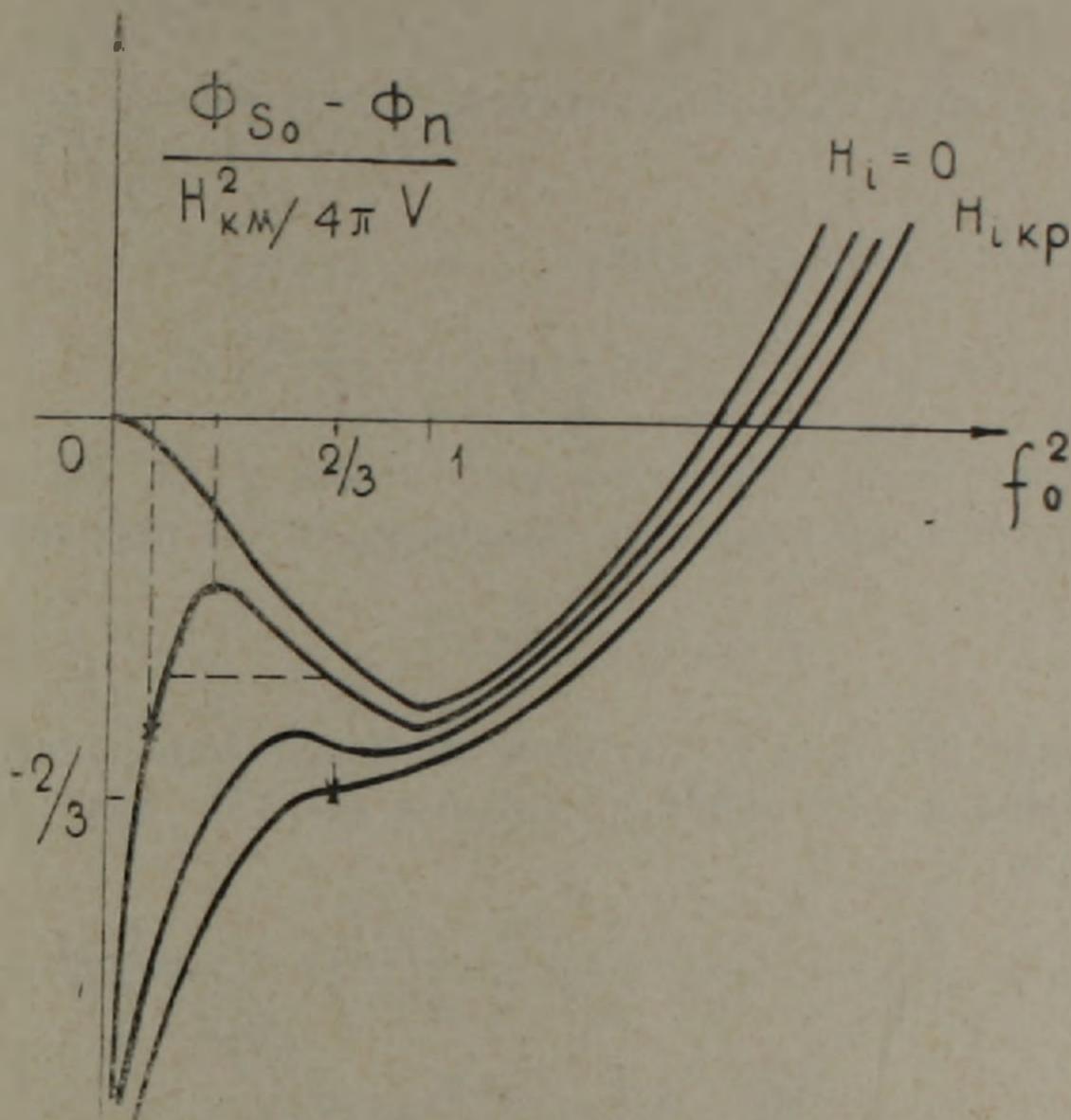


Рис. 1.

Все гладкие решения $f(x)$ получаются при положительном значении дискриминанта. В этом случае решение (4) выражается через эллиптические функции:

$$f^2(x) = a(f_0) \operatorname{Sn}^2\left(b^{1/2} \frac{x}{V\sqrt{2}} + C_1\right) + f_0^2,$$

$$a = -\frac{3f_0^2 - 2}{2} - \sqrt{\left(\frac{3f_0^2 - 2}{2}\right)^2 - 2\left(f_0^4 - f_0^2 + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2}\right)} > 0, \quad (7)$$

$$b = -\frac{3f_0^2 - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{3f_0^2 - 2}{2}\right)^2 - 2\left(f_0^4 - f_0^2 + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2}\right)} > 0, \quad (7a)$$

Sn — эллиптический синус Якоби, а постоянная C_1 определяется выбором точки $x = 0$.

Модуль $a(f_0)$ и параметр f_0 меняются (7) в пределах, показанных пунктиром на рис. 1. При данном $\frac{H_1}{d}$, $a(f_0)$ изменяется от нуля при

$$f_0^4 - f_0^2 + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2} = 0 \quad (8)$$

$$\text{до } 1 - \frac{3}{2} f_0^2 \text{ при } \left(\frac{3f_0^2 - 2}{2} \right)^2 - 2 \left(f_0^4 - f_0^2 + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2} \right) = 0.$$

Соответственно период $f(x)$ (7) увеличивается от $\frac{\pi}{\left(1 - \frac{3}{2} f_0^2\right)^{1/2}}$ до ∞

и решение (8) при этом переходит в

$$f^2(x) = f_0^2 + \left(1 - \frac{3}{2} f_0^2\right) \text{th}^2 \frac{x}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{3}{2} f_0^2\right) x, \quad (9)$$

где приняли $C_1 = 0$. Если C_1 выбрать так, чтобы $f(x)$ (9) в точке $x = 0$ принимала свое максимальное значение, то (9) переходит в

$$f^2(x) = 1 - \frac{1}{2} f_0^2. \quad (10)$$

(10) есть решение (8) (1), а f_0 при этом нетрудно определить из (8) и рис. 1. Подставляя $\psi(x)$ в (1) и учитывая (4), (5) для свободной энергии, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_s - \Phi_n}{H_{км}^2/4\pi} = \int \left\{ 2 \left(-f^2 + \frac{1}{2} f^4 - \frac{H_1^2}{d^2 f^2} \right) + f_0^2 - \frac{1}{2} f_0^4 + \right. \\ \left. + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2} + \frac{2}{x} j_0 \frac{d\varphi}{dx} \right\} dV, \quad (11) \end{aligned}$$

где $\Phi_n = \int \left(F_n + \frac{1}{c} \vec{j}_0 \vec{A} \right) dV$ (5). Из (4) следует, что при $x = 0$,

$f = \text{const}$. В лондоновском приближении $\vec{E} = \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t}$ (6) и ввиду того, что

член, связанный с фазой в (11) отсутствует, получаем:

$$\frac{\Phi_{s_0} - \Phi_n}{\frac{H_{км}^2}{4\pi} \cdot V} = -f_0^2 + \frac{1}{2} f_0^4 - \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2}. \quad (11a)$$

Интегрируя (11) по x , без учета члена с фазой, для Φ_s получаем кривую, соединяющую точки максимума и минимума на рис. 1 (6). Учет члена с фазой не влияет на экстремальные значения $f(x)$ (являющиеся решениями (8) (1)), но в этом случае кривые свободной энергии оказываются сдвинутыми. Это показано сплошными линиями на рис. 2, где по оси абсцисс отложены максимальные значения (7).

С увеличением j_0 , $a(f_0)$ в (7) уменьшается и при $j_0 = j_{\text{окр}}$ стремится к нулю. Соответственно экстремальные значения $f(x)$ приближаясь, сливаются при значении $f_{\text{окр}}^2 = \frac{2}{3}$ (1) (рис. 2). Итак, все гладкие решения (4) возможны при $j_0 \leq j_{\text{окр}}$. Поэтому для полноты картины необходимо рассмотреть и все негладкие решения (4). В этом случае дискриминант (6а) отрицателен и из (6) находим:

$$\frac{2q^{1/2} dt}{\left\{ \left(\frac{2q + pq^{1/2}}{2q - pq^{1/2}} t^2 + 1 \right) \left(\frac{2q - pq^{1/2}}{2q + pq^{1/2}} t^2 + 1 \right) \right\}^{1/2}} = \pm \frac{x}{V\sqrt{2}} (4q^2 - p^2q) dx, \quad (12)$$

где

$$(f^2(x) - f_0^2)^{1/2} = q^{1/2} \frac{t(x) - 1}{t(x) + 1},$$

$$q = \left\{ 2 \left(f_0^4 - f_0^2 + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2} \right) \right\}^{1/2},$$

$$p = (2q + 2 - 3f_0^2)^{1/2}. \quad (13)$$

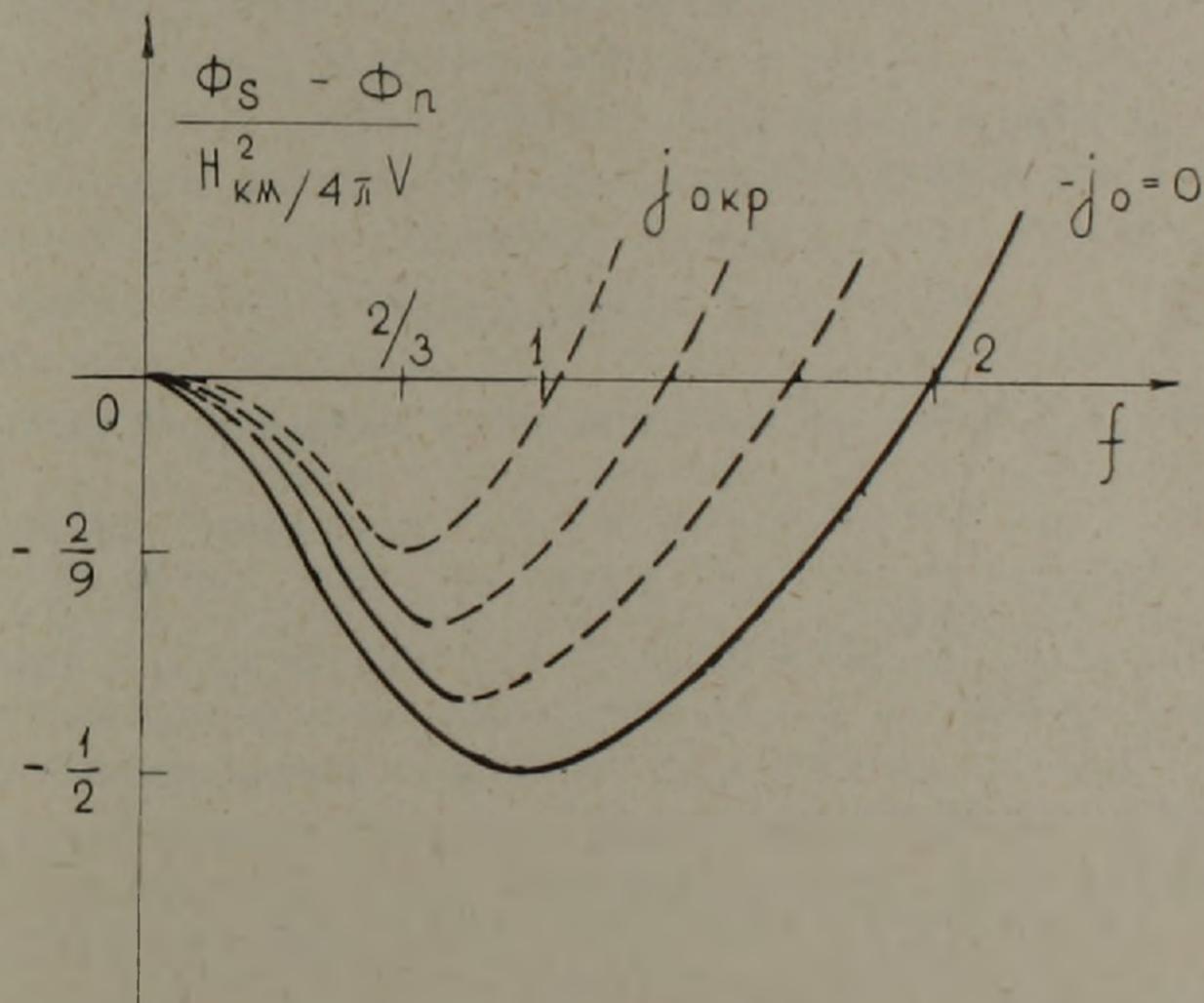


Рис. 2.

Окончательное решение уравнения (4) в зависимости от параметра f_0 запишется в виде:

$$f^2(x) = f_0^2 + \left\{ 2 \left(f_0^4 - f_0^2 + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2} \right) \right\}^{1/2} \left(\frac{Z(x) - K\sqrt{1 - Z^2(x)}}{Z(x) + K\sqrt{1 - Z^2(x)}} \right)^2,$$

$$K^2 = \frac{2q^{1/2} + p}{2q^{1/2} - p} > 0, \quad Z(x) = \text{Sn} \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} (2q^{1/2} + p)x + C_1 \right). \quad (14)$$

Здесь $f(x)$ периодическая функция, расходящаяся на концах каждого периода. Это обстоятельство указывает на то, что в пленке обра-

зуются области, не находящиеся в сверхпроводящем состоянии, в которых уравнения Гинзбурга—Ландау ⁽¹⁾ неприменимы. Воспользуясь выражением тока ⁽¹⁾ для свободной энергии из (11) получим:

$$\frac{\Phi_s - \Phi_n}{H_{к.к.}^2/4\pi} = \int \left\{ 2 \left(-f^2(x) + \frac{1}{2} f^4(x) \right) + f_0^2 - \frac{1}{2} f_0^4 + \frac{H_1^2}{d^2 f_0^2} \right\} dV. \quad (15)$$

Из рис. 1 нетрудно заметить, что при данном значении параметра f_0 , Φ_s (15) минимально при максимальном значении $f(x)$ (14), равном единице. В этом случае при $j_0 > j_{окр}$ в пленке, по направлению тока образуется периодическая картина, при которой $f(x)$ (14) меняется от минимального значения f_0 до максимального, равного единице. В точках максимумов этой картины $\frac{df}{dx}$ скачком меняет знак, что указывает на необходимость микроскопического рассмотрения. Хотя и при $f_0^2 = 2/3$ и $j_0 = j_{окр}$ (14) переходит в $f^2(x) = f_{окр}^2 = \frac{2}{3}$, однако, возможно, что решение вышеуказанного типа (14) даже при $j_0 < j_{окр}$ окажется более выгодным, нежели гладкие решения (10) уравнения (8) ⁽¹⁾.

Институт физических исследований
Акад. емии наук Армянской ССР

Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Գերհաղորդիչ թաղանթի մասին հոսանքի առկայության դեպքում

Գերհաղորդ-լանդաուի ֆենոմենոլոգիական տեսության շրջանակներում դիտարկվում է գերհաղորդիչ թաղանթի հոսանքի առկայության դեպքում: Դիտարկվում է ավելի ընդհանուր դեպքերը գերհաղորդիչի ալիքային ֆունկցիան փոփոխվում է նաև հոսանքի առկայությամբ: Ստացված են լուծումներ էլիպտիկ ֆունկցիաների օգնությամբ: Ցույց է տրված, որ ազատ էներգիայի որոշակի տիրույթում ալիքային հալասարումն ունի միայն խզվող աճանցյալով լուծումներ: Այդ տիպի առկայությունը հետևանք է այն բանի, որ որոշակի հոսանքի դեպքում գերհաղորդիչ թաղանթի մեջ առաջանում է պարբերական ստրուկտուրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 20, 1064 (1950). ² J. Bardeen, Reviews of Modern Physics, 34, 667 (1962). ³ В. Л. Гинзбург, ДАН СССР, 118, 464 (1958). ⁴ F. Bloch, Phys. Rev., 137, N3A, 1965. ⁵ Р. М. Арутюнян, ДАН АрмССР, т. 46, № 2 (1968). ⁶ Р. М. Арутюнян, „Известия АН АрмССР“, XVIII, № 6 (1965). ⁷ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, § 30, М., Гостехиздат, 1957.