ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVI 1968 2

МЕХАНИКА

УДК 532.593

А. Г. Багдоев

Движение неоднородной жидкости под действием давления

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 15/VIII 1967)

В задаче о движении неоднородной сжимаемой жидкости под действием давления, движущегося по поверхности с постоянной сверхзвуковой скоростью V, картина движения изображена на рис. 1. Ось Ox выбрана по невозмущенной границе, ось Oy перпендикулярна ей. Скорость звука невозмущенной жидкости $a(y) = V$ на некоторой глубине $y = y_1$, на поверхности $V > a(0)$.

Граничное условие на поверхности для давления $P(x, y, t)$

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1 f\left(\dfrac{x}{Vt}\right), & x < Vt \\ 0, & x > Vt \end{cases}, \tag{1}$$

где P_1 постоянное давление во фронте на поверхности. Пусть $\gamma = \dfrac{P_1}{\rho_0 a_0^2}$ мало, ρ_0, P_0 плотность и давление на поверхности, $a_0^2 = \dfrac{\gamma P_0}{\rho_0}$.

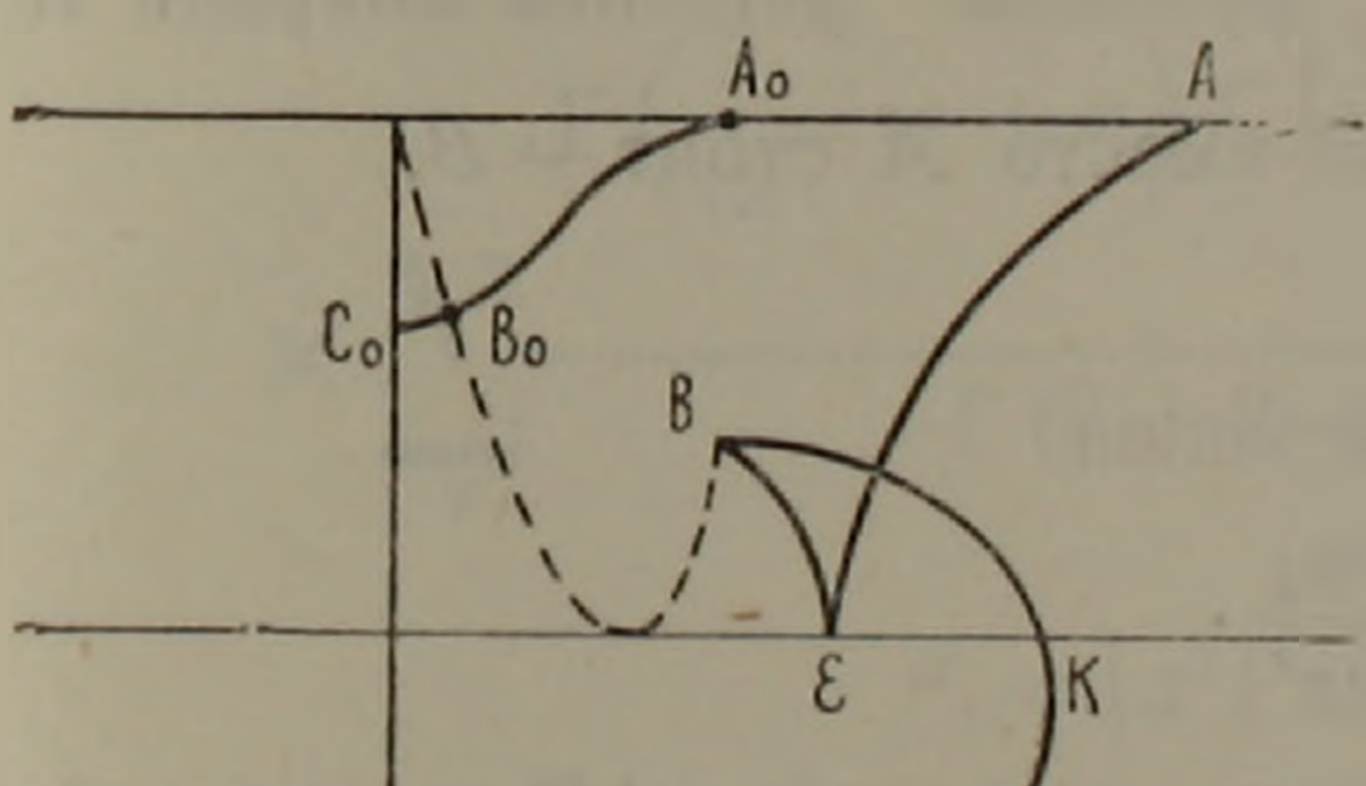

Рис. 1.

В момент t_1 прихода точки B_0 соединения фронтов AB_0 и B_0C_0 на линию $y = y_1$ фронт становится вертикальным при $y = y_1$, а затем картина его дается линией $AEBKC$.

Для $t \gg t_1$ движение в окрестности точки E в координатах

$$x' = -V\int_y^{y_1}\sqrt{\frac{1}{a^2(y)} - \frac{1}{V^2}}\,dy + x - Vt, \quad y' = y - y_1$$

будет установившимся и для скоростей v_x, v_y имеем

$$\frac{\partial v_y}{\partial x'} - \frac{\partial v_x}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x'}(\alpha^\circ v_x + a' y') + \frac{V}{2}\frac{\partial v_y}{\partial y'} = 0, \tag{2}$$

где учтено, что в окрестности точки E, являющейся особой для линейного решения, имеем порядки величин $x' \sim \gamma^{\frac{6}{5}}$, $y' \sim \gamma^{\frac{4}{5}}$, $v_x \sim P \sim \gamma^{\frac{4}{5}}$, $v_y \sim P \dfrac{dx'}{dy'} \sim \gamma^{\frac{6}{5}}$, в уравнениях оставлены малые до порядка $\gamma^{\frac{2}{5}}$ и скорость звука записана в виде $a = a(y) + (\alpha^\circ - 1) V v_x$, $a(y) = V + a'y'$ (¹). В случае линейной постановки $\alpha^\circ = 0$. Тогда задача сводится к отражению слабого разрыва от линии перехода от эллиптической к гиперболической области для (2), т. е. линии $y = y_1$ (¹).

Вводя φ_0 по формуле

$$v_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x'}, \qquad v_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y'}, \qquad y' \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x'^2} + \frac{V}{2a'} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y'^2} = 0 \tag{3}$$

вблизи AE с учетом разрывности P по (1) можно полагать в (¹) $k = \dfrac{5}{12}$, причем

$$\varphi_0 = -AF_2, \tag{4}$$

$$F_2 = x'^{2k} \left| 1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \dfrac{V}{2a'}} \right|^{2k + \frac{1}{6}} \times$$

$$\times F\left(k + \frac{1}{6},\ k + \frac{2}{3},\ 2k + \frac{7}{6};\ 1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \dfrac{V}{2a'}} \right).$$

Здесь F есть гипергеометрическая функция; решение впереди AE при $1 + \dfrac{4y'^3}{9x'^2 \dfrac{V}{2a'}} > 0$ дается (4), где вместо A стоит $-B$.

Давление дается интегралом Лагранжа

$$P = \rho_0 V \frac{\partial \varphi_0}{\partial x'}.$$

Используя известное линейное решение на фронте AE можно найти для скачка давлений

$$A - B = \frac{P_1}{2\rho_0 a' V} \left(\frac{8a'}{9V} \right)^{\frac{1}{12}} \frac{\sqrt[4]{\dfrac{1}{a_0^2} - \dfrac{1}{V^2}}\ \sqrt{V}}{\sqrt[4]{\dfrac{2a'}{V}}}. \tag{5}$$

Решение на отраженном разрыве получится аналитическим продолжением (4), причем (¹) впереди BE следует заменить

$$F_2 \to \frac{-F_2}{2 \sin \pi \left(2k + \dfrac{1}{6} \right)} + F_1 2^{4k + \frac{1}{3}} \frac{\Gamma\left(2k + \dfrac{1}{6} \right) \Gamma\left(2k + \dfrac{7}{6} \right)}{\Gamma(2k + 1)\, \Gamma\left(2k + \dfrac{1}{3} \right)}, \tag{6}$$

а позади BE при обходе вокруг точки E

$$F_2 \to \frac{\sin\pi\left(4k-\frac{1}{6}\right)}{\sin\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)} F_2 +$$

$$+ F_1 2^{4k+\frac{4}{3}} \cos\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right) \frac{\Gamma\left(2k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k+1)\,\Gamma\left(2k+\frac{1}{3}\right)}, \tag{7}$$

где

$$F_1 = |x'|^{2k} F\left(-k,\ -k+\frac{1}{2},\ -2k+\frac{5}{6};\ 1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right),$$

а в F_2 следует величины, стоящие перед F, брать по абсолютному значению.

При $k=\frac{5}{12}$ (6) и (7) дают неопределенность, полагая $k=\frac{5}{12}+\varepsilon$ можно найти вместо (6)

$$F_2 = \left|1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right|^{1+2\varepsilon} |x'|^{\frac{5}{6}+2\varepsilon} \frac{\Gamma(2+2\varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{7}{12}+\varepsilon\right)\Gamma\left(\frac{13}{12}+\varepsilon\right)} \times$$

$$\times \sum_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{7}{12}+\varepsilon+n\right)\Gamma\left(\frac{12}{13}+\varepsilon+n\right)}{\Gamma(2+2\varepsilon+n)} \frac{\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)^n}{n!},$$

$$F_1 = |x'|^{\frac{5}{6}+2\varepsilon} + |x'|^{\frac{5}{6}+2\varepsilon} \times$$

$$\times \frac{\sum_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{7}{12}-\varepsilon+n\right)\Gamma\left(\frac{13}{12}-\varepsilon+n\right)}{\Gamma(2+n-2\varepsilon)} \frac{\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)^{n+1}}{n!}}{-2\Gamma(1+2\varepsilon)\,\Gamma\left(-\frac{5}{12}-\varepsilon\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}-\varepsilon\right)} \tag{8}$$

и при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{F_1}{|x'|^{\frac{5}{6}}} - 1 = \frac{5}{288}\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)\frac{F_2}{2\varepsilon}.$$

Тогда позади и впереди BE можно найти

$$\varphi_0 = B\,\frac{1}{\pi}\left\{\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)\ln\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)+\right.$$

$$+11\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)-\frac{144}{5}-\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)\times$$

$$\left.\times\left(2\gamma+2\ln 2-\psi\left(\frac{5}{6}\right)-\psi\left(\frac{1}{6}\right)\right)+O\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)^2\right\}(-x')^{\frac{5}{6}} \qquad (9)$$

$$\text{при}\quad x'<-\left(\frac{8a'}{9V}\right)^{\frac{1}{3}}(-y')^{\frac{3}{2}}$$

$$\varphi_0 = -A\,\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)\ln\left(-1-\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)+\frac{72}{5}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)\left(2\gamma+2\ln 2-\psi\left(\frac{5}{6}\right)-\psi\left(\frac{1}{6}\right)\right)-$$

$$\left.-\frac{11}{2}\left(1+\frac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}\right)\right\}(-x')^{\frac{5}{6}} \qquad \text{при}\ x'>-\left(\frac{8a'}{9V}\right)^{\frac{1}{2}}(-y')^{\frac{3}{2}},$$

где

$$\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \qquad \gamma=\psi(1).$$

Приравнивая эти выражения, нетрудно получить при $1+\dfrac{4y'^3}{9x'^2\frac{V}{2a'}}=0$,

$$B=\frac{A}{2}. \qquad (10)$$

Решение нелинейной системы (2) заменой

$$v_{x_1}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}, \qquad v_{y_1}=\frac{\partial\psi}{\partial y'}, \qquad \psi=\frac{\alpha^\circ}{a'}\varphi+x'y'$$

приводится к уравнению

$$v_{x_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{V}{2a'}\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}=0,$$

которое преобразованием $\Phi+\psi=x'v_{x_1}+y'v_{y_1}$, $x'=\dfrac{\partial\Phi}{\partial v_{x_1}}$, $y'=\dfrac{\partial\Phi}{\partial v_{y_1}}$ приводится к уравнению

$$v_{x_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_{y_1}^2}+\frac{V}{2a'}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_{x_1}^2}=0\,.$$

Решение нелинейной задачи, переходящее для конечных x', y', в (4) имеет вид вблизи AE

$$\Phi=\frac{\alpha^\circ}{a'}A\,(v_{y_1})^{\frac{5}{6}}\left(1+\frac{4v_{x_1}^3}{9v_{y_1}^2\,\dfrac{V}{2a'}}\right)\times$$

$$\times F\left(\frac{7}{12},\ \frac{13}{12},\ 2;\ 1+\frac{4v_{x_1}^3}{9v_{y_1}^2\,\dfrac{V}{2a'}}\right)+v_{x_1}v_{y_1}+C_1v_{y_1}+C_2, \qquad (11)$$

где постоянные находятся из условия соединения (11) с решением, на отраженной волне, имеющем вид

$$\Phi=\frac{\alpha^\circ}{a'}\varphi_0\,(v_{y_1},\ v_{x_1})+v_{x_1}v_{y_1}+C_3v_{y_1}+C_4, \qquad (12)$$

где $\varphi_0\,(x', y')$ дается (9).

Из линейного решения (9) следует, что на отраженной волне давление непрерывно, поэтому естественно предположить, что в нелинейной задаче волна BE в точке соединения с падающей затухает.

Для получения более простого решения можно в уравнение характеристик системы (2)

$$\frac{dx'}{dy'}=\mp\sqrt{-2a'\frac{y'}{V}+2\alpha^\circ\frac{v_x}{V}}\,, \qquad dv_y=\frac{dx'}{dy'}dv_x \qquad (13)$$

подставить условия непрерывности касательной составляющей скорости на ударной волне:

$$v_y=-v_x\frac{dx'}{dy'}$$

и после интегрирования решение позади ударной волны AE найдется в виде

$$v_x=\frac{C}{\sqrt[4]{-2\dfrac{a'}{V}y'-2\alpha^\circ\dfrac{v_x}{V}}}\,, \qquad (14)$$

где C находится из сопоставления с линейным решением (5)

$$C=\frac{A}{A-B}\frac{P_1}{\rho_0 V}\sqrt[4]{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{V^2}}\sqrt{V}.$$

Решение впереди ударной волны получится заменой $\frac{A}{A-B}$ на $\frac{B}{A-B}$.

По полученному решению уравнение ударной волны AE

$$\frac{dx'}{dy'}=-\sqrt{-2\frac{a'}{V}y'-\alpha^\circ\frac{v_x}{V}}$$

интегрируется в виде

$$y'=-\frac{\alpha^\circ v_x}{a'}-\frac{C^4}{2a'v_x^4}V,$$

$$x'=\int\left(\frac{\alpha^\circ}{a'}-\frac{2C^4}{a'v_x^5}V\right)\sqrt{\alpha^\circ\frac{v_x}{V}+\frac{C^4}{v_x^4}}dv_x,$$

а уравнение отраженной волны, представляющей звуковую линию:

$$\frac{dx'}{dy'}=\sqrt{-2\frac{a'}{V}y'-2\alpha^\circ\frac{v_x}{V}}$$

в виде

$$y'=-\frac{\alpha^\circ v_x}{a'}-\frac{C^4}{2a'v_x^4}V,$$

$$x'=\frac{\alpha^\circ}{a'}\frac{C^2}{v_x}-\frac{C^6V}{3a'v_x^6}+C_3.$$

Полученное решение продолжается до точки, где $\frac{dy'}{dv_x}=0$,

$$v_x=C^{\frac{4}{5}}\left(\frac{2V}{\alpha^\circ}\right)^{\frac{1}{5}},\quad y'=-\frac{5}{4}\frac{(\alpha^\circ C)^{\frac{4}{5}}(2V)^{\frac{1}{5}}}{a'}$$

для обеих волн, и

$$x'=\frac{5}{6}\frac{(\alpha^\circ C)^{\frac{6}{5}}(2V)^{-\frac{1}{5}}}{a'}+C_3,\quad \frac{dx'}{dy'}=\sqrt{3\left(\frac{\alpha^\circ C}{2V}\right)^{\frac{4}{5}}}$$

для отраженной волны. Точка пересечения этих волн перемещается вверх от точки E, хотя решение (11, 12), по-видимому, верно всюду. Отметим, что (4) сразу следует из ([1]) при $k=\frac{11}{12}$, поскольку если записать (4) в виде $\varphi=\frac{\partial\psi}{\partial x'}$, $\psi=y'^n f(\xi, n)$, $n=3k$, $\xi=\frac{9x'^2}{4y'^3}$, $k=\frac{11}{12}$, то из $f\left(\xi, n-\frac{3}{2}\right)=\xi^{\frac{1}{2}}f'(\xi, n)$ следует (4) при $k=\frac{5}{12}$.

Решение для давления (3), (4) (5) можно привести к виду

$$v_x = \frac{P}{\rho_0 V} \qquad (15)$$

$$P = P_{\text{геом.}} \cdot P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{-4y'^3}{9}\frac{2a'}{V}}}\right), \qquad x' > \alpha,$$

$$P = 2P_{\text{геом.}} \cdot P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{-4y'^3}{9}\frac{2a'}{V}}}\right), \qquad -\alpha < x' < \alpha, \quad y' < 0;$$

при

$$x' < -\alpha, \quad P = P_{\text{геом.}} \sqrt{3}\, P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{-4y'^3}{9}\frac{2a'}{V}}}\right) +$$

$$+ P_{\text{геом.}} \frac{2}{\pi} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{-4y'^3}{9}\frac{2a'}{V}}}\right)$$

и при $y' > 0$

$$P = P_{\text{геом.}} \sqrt{2}\, \mathrm{Re}\, P_{-\frac{1}{6}}\left(-i\frac{x'}{\sqrt{\frac{4y'^3}{9}\frac{2a'}{V}}}\right) +$$

$$+ P_{\text{геом.}} \sqrt{2}\, \mathrm{Jm}\, P_{-\frac{1}{6}}\left(-i\frac{x'}{\sqrt{\frac{4y'^3}{9}\frac{2a'}{V}}}\right),$$

где

$$P_{\text{геом.}} = A\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{V}{2a'}\right)^{\frac{1}{12}} |y'|^{-\frac{1}{4}}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{-4y'^3}{9}\frac{2a'}{V}}.$$

Решение нелинейной задачи получится, если заменить x' на v_{y_1}, y' на v_{x_1}.

Тогда в первом порядке получится (14).

Вблизи отраженной волны решение (15) имеет вид

$$v_x = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{V}{2a'}\right)^{\frac{1}{12}}(-y')^{-\frac{1}{4}} AF\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, \xi\right),$$

$$\xi = \frac{1 - \dfrac{x'}{\sqrt{\dfrac{-4y'^3}{9} - \dfrac{2a'}{V}}}}{2}, \qquad F = -\frac{1}{2\pi}\ln|1-\xi| + \frac{3\ln 3 + 4\ln 2}{2\pi}. \tag{16}$$

При $\xi = 1$ даже вдали от особой линии $y' = 0$, v_x бесконечно. Для исправления решения для конечных y' в приведенном линейном решении (16) можно заменить ξ через ξ_4, где $\xi_4 = \mathrm{const}$ характеристика. Если подставить указанное решение в уравнение характеристик, после интегрирования можно получить

$$1 - \xi = 1 - \xi_4 - 2A_1\left(\frac{2a'}{V}\right)^{-\frac{5}{12}}(-y')^{-\frac{5}{4}}\ln|1-\xi_4| -$$

$$- B_1\left(\frac{2a'}{V}\right)^{-\frac{5}{12}}(-y')^{-\frac{5}{4}}, \tag{17}$$

где

$$A_1 = \frac{3}{4}\frac{\alpha}{2\pi}, \qquad B_1 = 9\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{3}{2}\alpha\frac{3\ln 3 + 4\ln 2}{2\pi},$$

$$\alpha = \left(\frac{2a'}{V}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\alpha^\circ}{a'}2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}A.$$

Обозначая значения $\xi_4 = \xi_{2,3}$ впереди и позади отраженной ударной волны, из условий непрерывности ξ и формулы для скорости волны можно найти

$$1 - \xi_2 = 2A_1\lambda_2\left(\frac{2a'}{V}\right)^{-\frac{5}{12}}(-y')^{-\frac{5}{4}}, \quad 1 - \xi_3 = -2A_1\mu_2\left(\frac{2a'}{V}\right)^{-\frac{5}{12}}(-y')^{-\frac{5}{4}},$$

$$2\lambda_2 - 2 = \ln\frac{\lambda_2}{\mu_2}, \qquad \lambda_2 = 2 + \mu_2, \qquad \mu_2 > 0.$$

Для устранения особенности в (11) на параболической линии $v_{x_1} = 0$ можно заменить v_{x_1} на $v_{x_1} - ib$, b — постоянная порядка $\gamma^{\frac{6}{5}}$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Դ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Անհամասեռ հեղուկի շարժումը ճնշման ազդեցության տակ

Դիտարկվում է ոչ գծային խնդիրը անհամասեռ հեղուկի համար: Գտնված է հարվածային ալիքի ուժն այն գծի մոտ, որտեղ գծային խնդիրը տալիս է անվերջ ճնշման բաշխում:

Գծային հավասարումների լուծումը արտահայտվում է հիպերգեոմետրիկ ֆունկցիայի տեսքով: Նշված շրջանում ոչ գծային խնդրի լուծումը փնտրվում է նման տեսքով: Կատարված է լուծման անալիտիկ շարունակություն հատուկ կետի մոտ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Л. Д. Ландау* и *Е. М. Лифшиц*, Механика сплошных сред, 1953.