

УДК 519.1

С. Е. Маркосян

Матричный критерий единственности базы дуг
и нахождение некоторой базы

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 8/XII 1967)

Базы дуг ориентированных графов изучены пока еще недостаточно. Некоторые результаты можно найти в монографии ⁽¹⁾ и в работах ^(2,3).

В настоящей статье рассматриваются базы дуг конечного обыкновенного ориентированного графа. Получен критерий единственности базы дуг с помощью матрицы смежности и описан метод нахождения некоторой базы дуг. Везде под термином орграф будем понимать конечный обыкновенный ориентированный граф. Это ограничение не нарушает общности, так как все результаты о базах дуг легко распространяются на произвольный ориентированный граф.

Говорят, дан конечный обыкновенный ориентированный граф $L = (X, U)$, если даны конечное непустое множество X , элементы которого произвольной природы, и множество $U = \{(x, y) / x, y \in X, x \neq y\}$, элементами которого являются упорядоченные пары множества X . Элементы множества X называются вершинами графа, а элементы множества U — дугами графа. Для дуги $u = (x, y)$ x называется началом, а y — концом. Путем называется такая последовательность дуг $\mu = [u_1 = (x_0, x_1), u_2 = (x_1, x_2), \dots, u_k = (x_{k-1}, x_k)]$, где конец предыдущей дуги является началом последующей. Число дуг k — длина пути. Скажем, вершина y достижима из вершины x , если существует путь μ , идущий из x в y , то есть $\mu = [(x = x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k = y)]$. Обозначим отношение достижимости в орграфе $L = (X, U)$ через $D_U(x, y)$. Базой дуг ⁽¹⁾ орграфа $L = (X, U)$ называется такое множество дуг $W \subseteq U$, которое удовлетворяет двум условиям

$$1) \forall x, y \in X [D_U(x, y) \rightarrow D_W(x, y)],$$

$$2) \forall V \subset W \exists x, y \in X [D_W(x, y) \& \bar{D}_V(x, y)],$$

где $D_W(x, y)$ означает отношение достижимости в орграфе L с помощью дуг W , а $\bar{D}$ — отрицание отношения достижимости. Матрица

смежности ⁽⁴⁾ орграфа $L = (X, U)$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, имеет вид

$$R = \|r_{i,j}\| \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}, \text{ а элементы определяются}$$

$$\text{соотношениями } r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{если } (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

В k -ой степени матрицы R элемент $r_{i,j}^{(k)}$ показывает число путей k -ой длины, идущих из x_i в x_j , а если вместо операций сложения и умножения производить булевы операции, то $r_{i,j}^{(k)}$ покажет существование или несуществование путей k -ой длины, идущих из x_i в x_j . При булевых операциях существует такое минимальное целое число m_0 , $m_0 < n$, что $(R + E)^{m_0} = (R + E)^{m_0+1} = \dots$, где E — единичная матрица.

Теорема 1. Если W — база дуг орграфа $L = (X, U)$ и R_1 — матрица смежности орграфа $L_1 = (X, W)$, то $(R_1 + E)^n = (R + E)^n$ (операции булевы).

Для орграфа L_1 существует такое целое минимальное число m_W , $m_0 \leq m_W < n$, что $(R_1 + E)^{m_W} = (R_1 + E)^{m_W+1} = \dots$. В силу определения базы в орграфе L_1 достижимость такая же, что в L , поэтому $(R_1 + E)^{m_W} = (R + E)^{m_0}$. Но так как $m_W, m_0 < n$, то $(R_1 + E)^n = (R + E)^n$. Обозначим через u^* множество всех тех дуг вида $u = (x, y)$, где вершина y недостижима из вершины x в орграфе $(X, U \setminus u)$.

Теорема 2. Пересечение всех баз дуг $W_1, W_2, \dots, W_l$ есть множество U^* ; $\bigcap_k W_k = U^*$.

Что $W_k \supseteq U^*$ для $k = 1, 2, \dots, l$, очевидно. Значит $\bigcap_k W_k \supseteq U^*$. Но $U^* \supseteq \bigcap_k W_k$, так как если $(x, y) = u \in \bigcap_k W_k$, то в орграфе $(x, U \setminus u)$ вершина y недостижима из x .

Теорема 3. Орграф L имеет единственную базу дуг тогда и только тогда, когда пересечение всех баз дуг U^* является базой.

Если U^* является базой, то все базы $W_1, W_2, \dots, W_l$ совпадают, в силу второго пункта определения базы, и база единственная. А если база единственная, то $W_1 = W_2 = \dots = W_l = U^*$ и U^* является базой. Обозначим через R^* матрицу смежности орграфа $L^* = (X, U^*)$.

Из теорем 1, 2, 3 следует.

Теорема 4. Орграф L имеет единственную базу дуг тогда и только тогда, когда $(R^* + E)^n = (R + E)^n$ (операции булевы).

Теорема 4 дает матричный критерий единственности базы дуг и применим в практике. Чтобы узнать, имеет ли данный орграф единственную базу или нет, нет надобности проверять выполнение равенства $(R^* + E)^n = (R + E)^n$.

Можно вычислить $(R^* + E)^{m_{U^*}}$, где m_{U^*} минимальное число, для которого $(R^* + E)^{m_{U^*}} = (R + E)^{m_{U^*}+1}$, $(R + E)^{m_0}$, и проверить $(R^* +$

$+ E)^{m_{U^*}} = (R + E)^{m_0}$. Если последнее равенство выполнено, то оргграф L имеет единственную базу и она есть U^* . Значит, задача свелась к нахождению матрицы R^* . Чтобы получить $R^* = \|r_{i,j}^*\|$, можно поступить следующим образом.

Если элемент матрицы R , $r_{i,j} = 0$, то $r_{i,j}^* = 0$. Для каждого элемента $r_{i_k, j_k} = 1$ строится матрица R_k , которая отличается от матрицы R только элементом i_k -ой строки и j_k -ого столбца; на этом месте в R_k стоит нуль. Вычисляется $(R_k + E)^{m_k}$, где m_k минимальное целое число, при котором $(R_k + E)^{m_k} = (R_k + E)^{m_k+1}$. Если в $(R_k + E)^{m_k}$ в пересечении i_k -ой строки и j_k -ого столбца 0, то $r_{i_k, j_k}^* = 1$, в противном случае $r_{i_k, j_k}^* = 0$.

Но этот способ нахождения матрицы R^* требует много вычислений. Ниже приводится более рациональный метод.

Теорема 5. Дуга $(x_i, x_j) = u \in U^*$ тогда и только тогда, когда $r_{i,j}^{(k)} = r_{i,i}^{(k-1)} + r_{j,j}^{(k-1)} - r_{j,i}^{(k-2)}$ (*) для $k = 2, 3, \dots, m_0 + 1$ где $r_{i,j}^{(0)} = 0$, а $r_{i,j}^{(k)}, r_{i,i}^{(k-1)}, r_{j,i}^{(k-2)}$ элементы соответственно R^k, R^{k-1}, R^{k-2} .

Так как существует $r_{i,i}^{(k-1)}$ путей длины $k-1$, идущих из x_i в x_i , то, присоединив к концу этих путей дугу $u = (x_i, x_j)$, получим $r_{i,i}^{(k-1)}$ путей длины k , идущих из x_i в x_j . Таким же образом получаются $r_{j,j}^{(k-1)}$ путей длины k , идущие из x_i в x_j , если к началу путей $r_{j,j}^{(k-1)}$ присоединим дугу $u = (x_i, x_j)$. Но среди этих полученных $r_{i,i}^{(k-1)} + r_{j,j}^{(k-1)}$ путей могут быть совпадающие. Покажем, что число их равно $r_{j,i}^{(k-2)}$. Что их число не меньше $r_{j,i}^{(k-2)}$, очевидно. Но если путь μ , идущий из x_i в x_i , и путь ν , идущий из x_j в x_j , имеют длину $k-1$ и такие, что пути $[\mu, u]$ и $[u, \nu]$ совпадают, то полученный путь $[\mu, u]$, или, что то же самое $[u, \nu]$, начинается и заканчивается дугой u , а это значит, что он содержит путь длины $k-2$, идущий из x_j в x_i . То есть число совпадающих путей не больше $r_{j,i}^{(k-2)}$. Следовательно, число их равно $r_{j,i}^{(k-2)}$.

Таким образом, если кроме $u = (x_i, x_j)$ не существует простого пути, идущего из x_i в x_j , то есть $u \in U^*$, то равенство (*) выполнено для любого k . А если равенство (*) имеет место для $k = 2, 3, \dots, m_0 + 1$, то кроме $u = (x_i, x_j)$ не существует простого пути, идущего из x_i в x_j . Если бы существовал такой путь, то существовал и путь длины $l \leq m_0 + 1$ и $r_{i,j}^{(l)}$ было бы больше, чем $r_{i,i}^{(l-1)} + r_{j,j}^{(l-1)} - r_{j,i}^{(l-2)}$. Теорема доказана.

Очевидно следующее.

Следствие. Дуга $(x_i, x_j) = u \in U^*$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=2}^{m_0+1} r_{i,j}^{(k)} = \sum_{k=2}^{m_0+1} (r_{i,i}^{(k-1)} + r_{j,j}^{(k-1)} - r_{j,i}^{(k-2)}).$$

Обозначим через $p_{i,j} = \sum_{k=2}^{m_0+1} r_{i,j}^{(k)}$, а через $q_{i,j} = \sum_{k=2}^{m_0+1} (r_{i,i}^{(k-1)} + r_{j,j}^{(k-1)} - r_{j,i}^{(k-2)})$.

Теперь ясно, как получить матрицу R^* . Нужно вычислить $R^2, R^3, \dots, R^{m_0+1}$ и для каждого элемента $r_{i,j} = 1$ матрицы R рассмотреть разность $\delta_{i,j} = p_{i,j} - q_{i,j}$.

Элементы матрицы R^* определяются соотношениями

$$r_{i,j}^* = \begin{cases} 1 & \text{если } \delta_{i,j} = 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Все изложенное покажем на одном примере.

Матрица смежности орграфа, изображенного на рис. 1

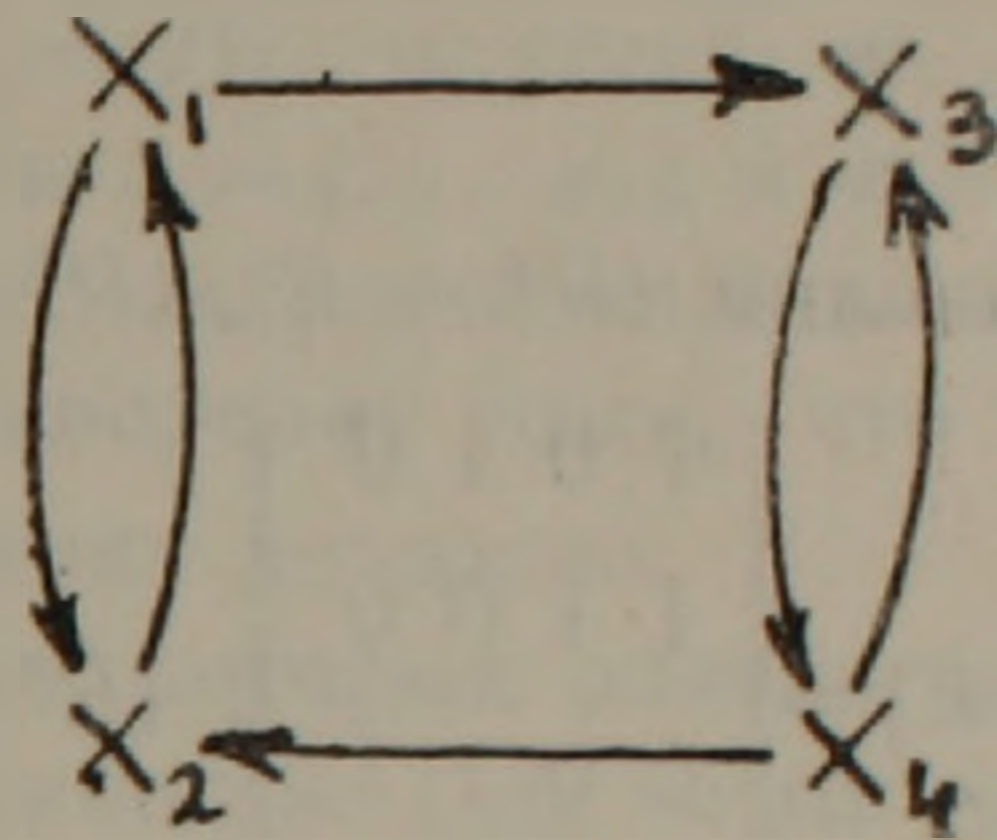


Рис. 1.

$$L = (X, U), \quad X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_3), (x_4, x_2)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$(R+E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (R+E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (R+E)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(операции булевы)

Значит $(R+E)^3 = (R+E)^4$, следовательно, $m_0 = 3$.

Нам нужны $R^2, R^3, \dots, R^{m_0+1}$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для определения R^* нужно вычислить $\delta_{1,2}, \delta_{2,1}, \delta_{1,3}, \delta_{3,4}, \delta_{4,3}, \delta_{4,2}$.

$$\delta_{1,2} = p_{1,2} - q_{1,2} \quad p_{1,2} = \sum_{k=2}^{m_0+1-4} r_{1,2}^{(k)}, \quad q_{1,2} = \sum_{k=2}^{m_0+1-4} (r_{1,1}^{(k-1)} + r_{2,2}^{(k-1)} - r_{2,1}^{(k-2)})$$

$$(r_{i,j}^{(0)} = 0)$$

$$\delta_{1,2} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$\delta_{1,3} = p_{1,3} - q_{1,3} = 2 - 2 = 0,$$

$$\delta_{2,1} = p_{2,1} - q_{2,1} = 1 - 1 = 0,$$

$$\delta_{3,4} = p_{3,4} - q_{3,4} = 1 - 1 = 0,$$

$$\delta_{4,3} = p_{4,3} - q_{4,3} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$\delta_{4,2} = p_{4,2} - q_{4,2} = 2 - 2 = 0.$$

Определим

$$R^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

и вычислим $(R^* + E), (R^* + E)^2, \dots, (R^* + E)^{m_{U^*}}$.

$$(R^* + E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (R^* + E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (R^* + E)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(операции булевы).

Значит, $(R^* + E)^3 = (R^* + E)^4$, следовательно, $m_{U^*} = 3$ и $(R^* + E)^{m_{U^*}} = (R^* + E)^{m_0}$. Орграф имеет единственную базу $U^* = \{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_2)\}$.

Когда орграф не имеет единственную базу дуг, то этот метод не дает базу дуг, а только дает пересечение этих баз U^* . Ниже опишем способ нахождения некоторой базы дуг орграфа L , который имеет произвольное число баз дуг. Множество $Z \subseteq X$ называется базой вершин ⁽¹⁾ орграфа $L = (X, U)$, если $\bigcup_{z \in Z} D(z) = X$, где $D(z)$ мно-

жество всех вершин допустимых из z и $\forall z_1, z_2 \in Z [z_1 \neq z_2 \rightarrow z_1 \notin D(z_2)]$.

Нахождение базы вершин с помощью матрицы смежности описан в ⁽¹⁾. Для нахождения некоторой базы дуг орграфа $L = (X, U)$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ поступим следующим образом. Обозначим через Γx_i множество всех вершин $y \in X$, для которых $(x_i, y) \in U$. Отбросим из L вершину x_1 вместе с теми дугами, для которых x_1 является началом или концом. Полученный орграф обозначим через $L_1^{(1)}$. Построим орграф $L_1^{(2)} = (\Gamma x_1, U_1^{(2)})$; если $y_i, y_j \in \Gamma x_1$, то $(y_i, y_j) \in U_1^{(2)}$ тогда и только тогда, когда y_j достижима из y_i в орграфе $L_1^{(1)}$. Найдем некоторую базу вершин Z_1 орграфа $L_1^{(2)}$. Из L отбросим дуги вида (x, y) , если $y \notin Z_1$, и полученный орграф обозначим через $L_1 = (X, U_1)$. Прделаем ту же операцию с L_1 , отбросив из L_1 вершину x_2 , и так далее.

В последний раз отбросим из L_{n-1} вершину x_n вместе с теми дугами, для которых x_n является началом или концом. Полученный орграф обозначим через $L_n^{(1)}$. Построим орграф $L_n^{(2)} = (\Gamma x_n, U_n^{(2)})$, аналогично орграфу $L_1^{(2)}$. Найдем некоторую базу вершин Z_n орграфа

$L_n^{(2)}$. Отбросим из L_{n-1} дуги вида (x_n, y) , если $y \notin Z_n$. Полученный орграф обозначим через $L_n = (X, U_n)$. L_n является частью орграфа L .

Докажем, что U_n — база дуг орграфа. Во-первых, отношение достижимости в L_n и в L одинаково, то есть $\forall x, y \in X [D_U(x, y) \rightarrow D_{U_n}(x, y)]$. Это вытекает из того, что в L_{k-1} и в L_k достижимость одинакова. Во-вторых, U_n минимальное множество дуг, сохраняющее достижимость $\forall V \subset U_n \exists x, y \in X [D_{U_n}(x, y) \& \bar{D}_V(x, y)]$. Если бы существовало $V \subset U_n$, для которого было бы верно $\forall x, y \in X [D_U(x, y) = \rightarrow D_V(x, y)]$, то кроме $u = (x_i, x_j) \in U_n \setminus V$ в L_n существовал бы и другой путь $\mu = [(x_i, x_{i+1}), \dots, (x_{i+k}, x_{i+k+1} = y)]$, идущий из x_i в x_j . Значит, из вершины x_i выходят две дуги $u = (x_i, x_j)$ и $v = (x_i, x_{i+1})$, $x_{i+1} \neq x_j$, и существует в L_n путь, идущий из x_{i+1} в x_j , который не проходит через x_i . Но это противоречит тому, что x_{i+1}, x_j входят в базу Z_i орграфа $L_i^{(2)}$. Утверждение доказано.

Способ нахождения некоторой базы дуг, который описан выше, можно реализовать с помощью матрицы смежности. При этом число операций будет меньше, чем в том случае, когда для каждой дуги $u = (x_i, x_j)$ проверяется существование простого пути, отличного от u .

Если найти некоторую базу дуг первым способом и некоторую базу дуг вторым способом, то приблизительное отношение числа произведенных действий будет n/m , где n — число вершин, а m — число дуг орграфа. Для бисвязных орграфов $n \leq m \leq n(n-1)$.

В конце найдем некоторую базу дуг орграфа L , изображенного на рис. 2.

Из L отбросим $x_1, Z_1 = \{x_3\}$, $\Gamma x_1 = \{x_2, x_3\}$. Значит, из L нужно отбросить $u = (x_1, x_2)$. Полученный орграф будет L_1 . Из L_1 отбросим $x_2, Z_2 = \{x_1\}$, $\Gamma x_2 = \{x_1\}$. Ничего не отбрасываем $L_2 = L_1$. Из L_2 отбросим $x_3, Z_3 = \{x_4, x_5\}$, $\Gamma x_3 = \{x_2, x_4, x_5\}$. Отбросим (x_3, x_2) . Получим орграф L_3 . Отбросим $x_4, Z_4 = \{x_2\}$, $\Gamma x_4 = \{x_2\}$. Ничего не отбрасываем, $L_4 = L_3$. Из L_4 отбрасывать x_5 не стоит, так как $\Gamma x_5 = \emptyset$, $L_5 = L_4$. Базой дуг будет

$$U_5 = \{(x_1, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_2), (x_2, x_1)\}.$$

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

Ս. Բ. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Աղեղների բազայի միակության մատրիցային
հայտանիշ և որևէ բազայի գտնումը

Աշխատանքում դիտարկվում է օրինաւոր ունեցող պրաֆի աղեղների բազայի միակության հարցը և որևէ բազայի գտնումը: Ստացված է բազայի միակության հայտանիշ կցութային

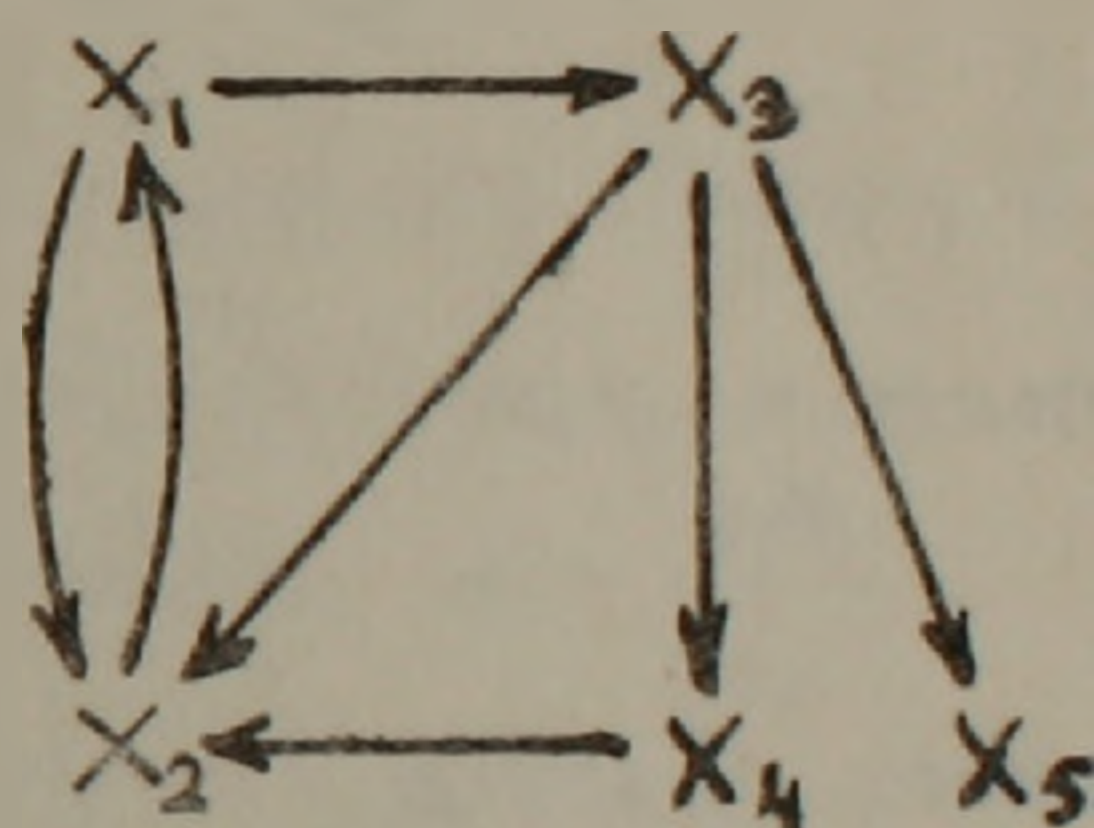
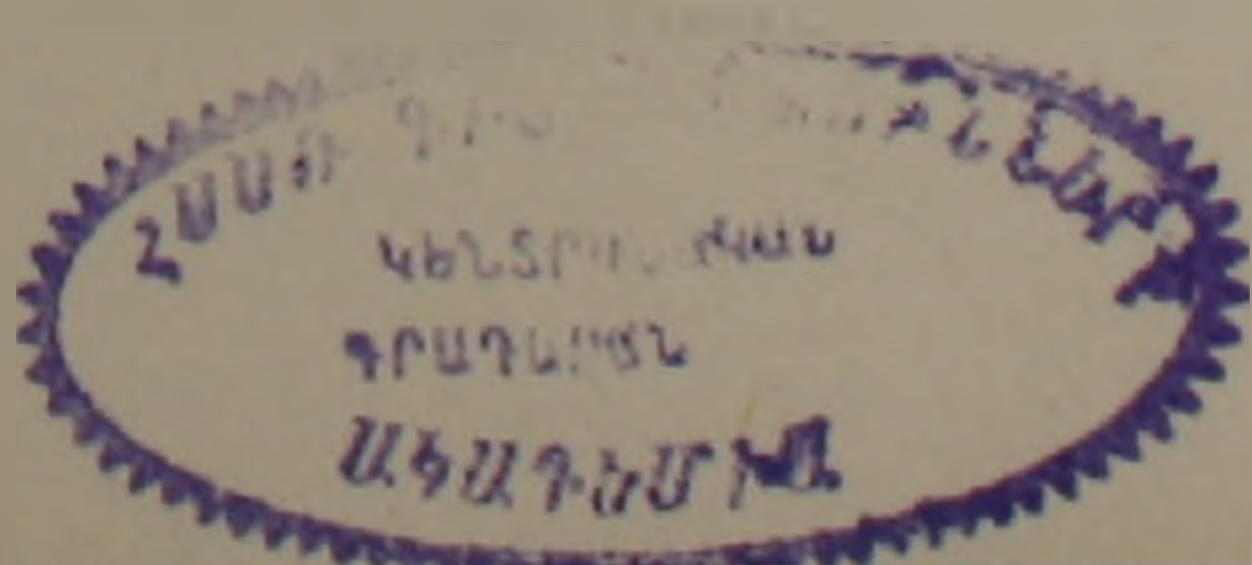


Рис. 2.



մատրիցայի միջոցով, որը պիտանի է գործնական հարցերում, և նկարագրված է մեթոդ, որի օգնությամբ կարելի է գտնել որևէ բազա:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ ՈՒ Ն

- ¹ А. А. Зыков, Теория конечных графов, I, „Наука“, Новосибирск, 1968.
² Я. М. Барздинь, Проблема базиса направленных графов. Уч. записки Латв. университета, 28, 33—34, 1959. ³ С. Е. Маркосян, „Известия АН АрмССР“, Математика, № 6, 1957. ⁴ К. Берж, Теория графов и ее применение, „И. Л.“, М., 1962.