УДК 513.813

Л. А. Матевосян

Поверхности в приводимых пространствах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 16/XI 1967)

1. В настоящей статье изучаются особенности, которыми обладают поверхности X_m в приводимом пространстве V_n . Изучение в общем случае проведем тем же методом, что и в работах (1, 2) и используем некоторые определения и обозначения, введенные в этих работах.

А. П. Норденом (3) доказано следующее утверждение: приводимое пространство V_n есть риманово пространство, допускающее декартову композицию двух многообразий, позиции которых вполне ортогональны, причем самостоятельные метрики, на которые распадается метрика этого пространства, определяют внутренние геометрии позиций и соответствие аналогии — изометрично.

Базовые многообразия V_n обозначим через M_{n_1} и M_{n_2} , где $n_1 + n_2 = n$. Поверхность X_m в V_n можно рассмотреть как геометрическое место точек, находящихся во взаимнооднозначном соответствии с некоторыми наборами точек A и $\bar{A}$, где A — любая точка подмногообразия M_{m_1} , многообразия M_{n_1} , а $\bar{A}$ — любая точка подмногообразия M_{m_2} , многообразия M_{n_2} , причем $m_1 \leq n_1$, $m_2 \leq n_2$, $m_1 + m_2 \geq m$.

Если $m_1 + m_2 = m$, то точки X_m находятся во взаимнооднозначном соответствии со всевозможными наборами точек A и $\bar{A}$ многообразий M_{m_1} и M_{m_2} . Тогда X_m является пространством композиции многообразий M_{m_1} и M_{m_2} . А если $m_1 + m_2 > m$, то точки X_m находятся во взаимно-однозначном соответствии с некоторыми (не всевозможными) наборами точек A и $\bar{A}$ многообразий M_{m_1} и M_{m_2} . В этом случае также X_m назовем пространством композиции многообразий M_{m_1} и M_{m_2} , но, в отличие от первого случая, эту композицию назовем несвободной, а в первом случае — свободной. Таким образом, поверхность X_m есть пространство, вообще говоря, несвободной композиции многообразий M_{m_1} и M_{m_2} . Эти многообразия M_{m_1} и M_{m_2} назовем базовыми многообразиями поверхности X_m .

Набор точек A и $\bar{A}$ многообразий M_{m_1} и M_{m_2} обозначим через $[A, \bar{A}]$. О точках A и $\bar{A}$, участвующих в одном наборе, говорим, что они находятся в связи.

Пусть A — некоторая точка многообразия M_{m_1} . Все точки $\bar{A}$, находящиеся в связи с этой точкой A , заполняют подмногообразие $M_{\bar{p}}$ многообразия M_{m_2} . Это подмногообразие $M_{\bar{p}}$ назовем слоем многообразия M_{m_2} , соответствующим точке A , а точку A назовем точкой, соответствующей этому слою. Все точки A , соответствующие слою $M_{\bar{p}}$, заполняют подмногообразие M_p многообразия M_{m_1} .

Многообразие M_{m_1} можно считать t — параметрическим семейством подмногообразий M_p , где

$$t = m_1 - p. \quad (1.1)$$

Эти параметры обозначим через v^ρ ($\rho = 1, 2, \dots, t$). При изменении этих t параметров v^ρ изменяется M_p , и, следовательно, $M_{\bar{p}}$. Таким образом, в многообразии M_{m_2} получим семейство подмногообразий $M_{\bar{p}}$, зависящих от тех же t параметров. Подмногообразия M_p и $M_{\bar{p}}$, соответствующие тем же значениям параметров v^ρ , назовем соответственными.

Легко доказать, что через каждую точку многообразия M_{m_2} проходит θ_2 параметрическое подсемейство семейства подмногообразий $M_{\bar{p}}$, где $0 \leq \theta_2 \leq m - m_2$. Следовательно, имеет место соотношение:

$$m_2 = \bar{p} + t - \theta_2. \quad (1.2)$$

Поверхность X_m можно рассмотреть как геометрическое место точек, находящихся во взаимно-однозначном соответствии со всевозможными наборами $[A, \bar{A}]$, где точки A и $\bar{A}$ принадлежат соответственным подмногообразиям M_p и $M_{\bar{p}}$. Следовательно, для числа измерений поверхности X_m будем иметь:

$$m = p + \bar{p} + t. \quad (1.3)$$

Из (1.1), (1.2), (1.3) получим:

$$p = m - m_2 - \theta_2, \quad \bar{p} = m - m_1, \quad t = m_1 + m_2 + \theta_2 - m. \quad (1.4)$$

2. Криволинейные координаты M_{n_1} обозначим через u^a ($a = 1, 2, \dots, n_1$), криволинейные координаты M_{n_2} — через $u^{\bar{a}}$ ($\bar{a} = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n$), а в качестве криволинейных координат V_n возьмем адаптированные координаты $(u^a, u^{\bar{a}})$.

Обозначим внутренние координаты подмногообразий M_p через v^i ($i = 1, 2, \dots, p$), а внутренние координаты $M_{\bar{p}}$ — через $v^{\bar{i}}$ ($\bar{i} = 1, 2, \dots, \bar{p}$).

В качестве криволинейных координат M_{m_1} можно взять координаты (v^i, v^ρ) . Уравнения M_{m_1} в M_{n_1} следующие

$$u^a = u^a(v^i, v^\rho). \quad (2.1)$$

Обозначив криволинейные координаты подмногообразия M_{m_2} через $\bar{v}^{\rho_2}$ ($\rho_2 = 1, 2, \dots, m_2$), его уравнения в M_{n_2} можно записать в виде:

$$u^a = u^{\bar{a}} ('v^{\bar{p}_2}). \quad (2.2)$$

Поскольку поверхность X_m есть геометрическое место точек, находящихся во взаимно-однозначном соответствии с наборами $[A, \bar{A}]$, для которых точки A и $\bar{A}$ принадлежат соответственным подмногообразиям M_p и $M_{\bar{p}}$, то (2.1) и (2.2) вместе будут уравнениями X_m в V_n , если в (2.2) подставить $'v^{\bar{p}_2} = 'v^{\bar{p}_2}(v^p, v^{\bar{i}})$.

Таким образом, уравнения X_m в V_n в специальной системе координат $(v^i, v^p, v^{\bar{i}})(i=1, 2, \dots, m-m_2-\theta_2), (p=m-m_2-\theta_2+1, \dots, m_1), (\bar{i}=m_1+1, \dots, m)$ будут иметь вид:

$$u^a = u^a(v^i, v^p), \quad u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}('v^{\bar{p}_2}(v^p, v^{\bar{i}})). \quad (2.3)$$

Эту систему координат назовем первой специальной системой координат поверхности X_m .

Аналогично можно ввести вторую специальную систему координат $(v^i, v^p, v^{\bar{i}})(i=1, 2, \dots, m-m_2), (p=m-m_2+1, m-m_2+2, \dots, m_1+\theta_1), (\bar{i}=m_1+\theta_1+1, m_1+\theta_1+2, \dots, m)$, относительно которой уравнения X_m в V_n будут иметь вид:

$$u^a = u^a('v^{p_1}(v^i, v^p)), \quad u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^p, v^{\bar{i}}). \quad (2.4)$$

3. Обозначим первую позицию через V_{n_1} , а вторую — через V_{n_2} . Пусть

$$u^a = u^a(v^\alpha), \quad u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^\alpha) \quad (3.1)$$

— уравнения поверхности X_m в V_n , где $v^\alpha (\alpha=1, 2, \dots, m)$ криволинейные координаты X_m .

Поверхность, определяемую уравнениями $u^a = u^a(v^\alpha)$, назовем проекцией X_m на V_{n_1} , или первой проекцией X_m . Легко доказать, что это — поверхность m_1 измерений, которую обозначим через $'X_{m_1}$.

Аналогично, поверхность, определяемую уравнениями $u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^\alpha)$, назовем проекцией X_m на V_{n_2} , или второй проекцией X_m и обозначим через $\bar{X}_{m_2}$.

Легко доказать, что за нормальные векторы X_m можно выбрать векторы $(\underset{s_1}{v^a}, 0), (\underset{s}{v^a}, \underset{s}{v^{\bar{a}}}), (0, \underset{s_2}{v^{\bar{a}}}) (s_1=1, 2, \dots, n_1-m_1), (s=n_1-m_1+1, n_1-m_1+2, \dots, n_1+m_2-m), (s_2=n_1+m_2-m+1, n_1+m_2-m+2, \dots, n-m),$

где $\underset{s_1}{v^a}$ — нормальные векторы поверхности $'X_{m_1}$ в V_{n_1} , а

$\underset{s_2}{v^{\bar{a}}}$ — нормальные векторы поверхности $\bar{X}_{m_2}$ в V_{n_2} .

Сравнивая основные уравнения ((⁴) стр. 193) поверхностей $X_m, 'X_{m_1}$ и $\bar{X}_{m_2}$, получим связь между основными величинами этих поверхностей.

Исходя из формул, выражающих эту связь, доказаны следующие теоремы.

Теорема I. При изгибании проекций поверхность сама изгибается, причем так, что остается неизменной в подпространстве $V_{m_1+m_2}$ пространства V_n , являющемся топологическим произведением этих проекций.

Теорема II. Первая внутренняя проекция есть омбилическое многообразие для нормали $(0, \nu^{\bar{a}})$.

Теорема III. Вторая внутренняя проекция является омбилическим многообразием для нормали $(\nu^a, 0)$.

Причем первая (вторая) внутренняя проекция есть пересечение X_m с V_{n_1} (V_{n_2}).

4. Бицилиндрические поверхности.

Рассмотрим тот частный случай, когда базовые многообразия поверхности находятся в свободной композиции. Такие поверхности обладают рядом интересных свойств. Приведем важнейшие из них.

а) первая проекция является омбилическим многообразием для нормали $(0, \nu^{\bar{a}})$;

б) вторая проекция есть омбилическое многообразие для нормали $(\nu^a, 0)$;

в) поверхность будет вполне геодезической тогда и только тогда, когда ее проекции являются вполне геодезическими поверхностями;

г) если две из следующих линий: линии Γ и ее проекций Γ' и $\bar{\Gamma}$ на V_{n_1} и V_{n_2} , асимптотические, то и третья является асимптотической; отсюда в частности следует, что асимптотические линии проекций являются асимптотическими и для самой поверхности;

д) поверхность будет минимальной тогда и только тогда, когда ее проекции являются минимальными поверхностями.

Поверхность, рассмотренную в этом пункте, назовем бицилиндрической поверхностью, или бицилиндром индекса (m_1, m_2) . Γ' назовем первой направляющей, а $\bar{\Gamma}$ — второй направляющей этой поверхности.

5. Уравнения поверхности X_m , относительно первой специальной системы координат, имеют вид (2.3). Фиксируя в них координаты ν^{ρ} , то есть предполагая $\nu^{\rho} = \bar{\nu}^{\rho} = \text{const}$, приведем их к виду:

$$u^a = u^a(\nu^i, \bar{\nu}^{\rho}), \quad u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(\bar{\nu}^{\rho}, \nu^{\bar{i}}) \quad (5.1)$$

$(i = 1, 2, \dots, m - m_2 - \theta_2), \quad (\rho = m - m_2 - \theta_2 + 1, m - m_2 - \theta_2 + 2, \dots, m_1),$
 $(\bar{i} = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m).$

Уравнения (5.1) определяют бицилиндр индекса $(m - m_2 - \theta_2, m - m_1)$.

Таким образом, поверхность X_m разлагается на $m_1 + m_2 + \theta_2 - m$ — параметрическое семейство бицилиндров индекса $(m - m_2 - \theta_2, m - m_1)$.

Рассуждая аналогично (относительно второй специальной системы координат), можно доказать, что X_m разлагается на $m_1 + m_2 + \theta_1 - m$ -параметрическое семейство билиндров индекса $(m - m_2, m - m_1 - \theta_1)$.

Легко показать, что θ_1 и θ_2 обращаются в нуль одновременно. Поверхность, для которой $\theta_1 = \theta_2 = 0$, разлагается на одно семейство билиндров индекса $(m - m_2, m - m_1)$, зависящих от $m_1 + m_2 - m$ параметров.

Если обе направляющие билиндра индекса $(m - m_2 - \theta_2, m - m_1)$ следовательно, и индекса $(m - m_2, m - m_1 - \theta_1)$, вырождаются в точки, то будем говорить, что поверхность не разложима на билиндры.

Таким образом, поверхность в приводимом пространстве разделяется на три типа:

а) $\theta_1 \neq 0$ (следовательно, и $\theta_2 \neq 0$) — поверхность разлагается на два семейства билиндров;

б) $\theta_1 = 0$ (следовательно, и $\theta_2 = 0$) и хотя бы одно из чисел $m - m_1$ и $m - m_2$ не равно нулю — поверхность разлагается на одно семейство билиндров;

в) $m = m_1 = m_2$ — поверхность не разложима на билиндры.

Поверхности второго и третьего типа рассмотрены в работах (1, 2).

В заключение приношу глубокую благодарность своему руководителю А. П. Нордену за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

Ереванский государственный университет

Լ. Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

Մակերևույթների բերված տարածություն մեջ

Բերված տարածությունների երկրաչափությունը կարևոր դեր է խաղում ժամանակակից դիֆերենցիալ երկրաչափության մեջ և ուսումնասիրվում ինտենսիվ կերպով: Առանձին հետաքրքրություն է ներկայացնում այդ տարածությունների մեջ ընկղմված բազմաձևությունների երկրաչափության ուսումնասիրությունը:

Ներկա աշխատանքի նպատակն է պարզել այն առանձնահատկությունները, որոնցով բաժանված է n շափանի բերված V_n տարածության մեջ ընկղմված m շափանի X_m մակերևույթը:

Տրված է X_m մակերևույթի տեպոլոգիական բնութագիրը ըստ նրա արտապատկերման բնույթի իր բազիսային բազմաձևությունների վրա: Գտնված են մակերևույթի և իր պրոեկցիաների հիմնական մեծությունների միջև դոյություն ունեցող առնչությունները, որոնցից ելնելով ապացուցված է մակերևույթների մի բանի հատկությունները: Մակերևույթների մի դասը, որին պատկանող մակերևույթը ունի սովորական էվկլիդեսյան E_3 տարածության մեջ ընկղմված զլանի հատկություններին նման հատկություններ, անվանված է երկզլանային մակերևույթների դաս: Ապացուցված է, որ V_n -ում ընկղմված X_m մակերևույթները բաժանվում են հետևյալ երեք դասերի՝ ա) երկու եղանակով երկզլանային մակերևույթների ընտանիքի վերածվող մակերևույթներ, բ) մի եղանակով երկզլանային մակերևույթների ընտանիքի վերածվող մակերևույթներ, գ) երկզլանային մակերևույթների չվերածվող մակերևույթներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Л. А. Матевосян, „Известия АН АрмССР“, Математика, № 6 (1966).
² Л. А. Матевосян, „Известия АН АрмССР“, Математика, № 2 (1967). ³ А. П. Норден, Пространства декартовой композиции, Изв. вузов, матем., № 4, 1963. ⁴ Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИИЛ, М., 1950.