ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVI 1968 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.948.33

В. Г. Оганджанян

К вопросу об интегральных уравнениях с разрывным оператором

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 20/X 1967)

Ряд прикладных задач, например, исследование некоторых схем автоматического регулирования, приводит к нелинейному уравнению $y = Ay$, где A не является непрерывным оператором. Основные трудности в изучении таких уравнений возникают вследствие неприменимости многих общих утверждений, например, принципа Шаудера.

В ряде работ участников Тамбовского и Ижевского семинаров предлагаются два подхода к вопросам существования и оценки решений упомянутых уравнений. В работах [1-3] оператор A рассматривается как слабый предел последовательности непрерывных операторов A_l, а решение y определяется как предел последовательности y_l решений уравнений $x = A_l x$. В работе [4] оператор A рассматривается не на всем пространстве непрерывных функций, а на некоторой его части, где он определен и непрерывен.

В настоящей работе нам удалось объединить идеи упомянутых направлений, рассматривая „уравнение“ вида

$$x(t) = \int_0^b K(t, s, x(s)) F(s, x(s)) ds + f(t), \qquad (*)$$

где $F(t, x)$ допускает разрыв первого рода по x, а для $K(t, s, x)$ возможен разрыв второго рода по t, s.

Рассмотрим в области $G: 0 \leqslant s,\ t \leqslant b, |x| < \infty$ функции $K(t, s, x)$ и $F(s, x)$, удовлетворяющие условиям:

а) $K(t, s, x)$ измерима по t, s и непрерывна по x;

б) $F(t, x)$ измерима по t и x, причем в любой ограниченной области G_γ: $t, s \in [0, b]$, $|x| \leqslant \gamma$ функция

$$M(t) = \underset{x \in G_\gamma(t)}{\mathrm{vraimax}} |F(t, x)|$$

суммируема;

в) $f(t) \in C[0, b]$.

Так как правая часть (*) при некоторых $x(t) \in C_{[0, b]}$ может не иметь смысла (суперпозиция $F(s, x(s))$ не является измеримой функцией) то (*) можно рассматривать лишь как символ, которому еще следует приписать определенный смысл. Следуя ([1]), введем такую измеримую на $[0, b]$ функцию $R_x(s)$, что

$$m_x\{F(s, x)\} = \lim_{\delta \to 0} \operatorname{vraimin}_{z \in U(x, \delta)} F(s, z) \leqslant R_x(s) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\delta \to 0} \operatorname{vraimax}_{z \in U(x, \delta)} F(s, z) = M_x\{F(s, x)\}$$

при почти всех $s \in [0, b]$.

Будем рассматривать интегральный оператор

$$Ax = \int_0^b K(t, s, x(s))\, R_x(s)\, ds + f(t)$$

и понимать (*) как уравнение $x = Ax$ в пространстве $C_{[0, b]}$. Таким образом под решением уравнения (*) мы понимаем непрерывную на $[0, b]$ функцию, обращающую равенство

$$x(t) = \int_0^b K(t, s, x(s))\, R_x(s)\, ds + f(t) \tag{1}$$

в тождество.

Отметим, что для некоторых $x(t) \in C_{[0, b]}$ возможен случай

$$\lim_{\delta \to 0} \left| \int_\delta^b K(t, s, x(s))\, R_x(s)\, ds \right| = \infty.$$

Поэтому уравнение (1) будем называть сингулярным.

Имеют место следующие два, близкие по содержанию, утверждения, обобщающие в некотором смысле теоремы об интегральном неравенстве.

Лемма 1. *Предположим, что:*

1) *выполнено условие А*

$$K_1(t, s, x)\,[m_x\{F_1(s, x)\} - M_x\{F_2(s, x)\}] \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_i\,(K(t, s, x)\, F(s, x)) \leqslant K_2(t, s, x)\,[M_x\{F_1(s, x)\} - m_x\{F_2(s, x)\}],$$

где $F(s, x) = F_1(s, x) - F_2(s, x)$, $K(t, s, x) = K_1(t, s, x) - K_2(t, s, x)$ *и* $F_i(s, x)$, $K_i(s, x) \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$ *монотонны по* x, *а* $\Phi_1(K(t, s, x) \cdot F(s, x)) = M_x\{K(t, s, x)\, F(s, x)\}$, $\Phi_2(K(t, s, x)\, F(s, x)) = m_x\{K(t, s, x)\, F(s, x)\}$;

2) *выполнено условие* $Б(z_1, z_2)$: *существует пара непрерывных функций на* $[0, b]$, *такая, что* $z_i(0) = 0$ $(i = 1, 2)$, $z_2(t) < z_1(t)$, *так, что в промежутке* $[0, b]$ *функции*

$$\psi_1(t, \delta) = \int_0^\delta [K_2(t, s, z_1(s))\, M_{z_1}\{F_1(s, z_1(s))\} -$$

$$- K_2(t, s, z_2(s))\, m_{z_2}\{F_2(s, z_2(s))\}]\, ds,$$

$$\psi_2(t,\delta)=\int\limits_0^{\delta}[K_1(t,s,z_2(s))\,m_{z_2}\{F_1(s,z_2(s))\}-$$

$$-K_1(t,s,z_1(s))\,M_{z_1}\{F_2(s,z_1(s))\}]\,ds$$

равномерно относительно $t\in[c,b]$ (c — *любое число промежутка* $(0,b]$) *стремятся к нулю при* $\delta\to 0$.

3) *Пусть, далее, справедливы интегральные неравенства*

$$z_1(t)>\int\limits_0^b K_2(t,s,z_1(s))\,M_{z_1}\{F_1(s,z_1(s))\}\,ds-$$

$$-\int\limits_0^b K_2(t,s,z_2(s))\,m_{z_2}\{F_2(s,z_2(s))\}\,ds+f(t),$$

$$z_2(t)<\int\limits_0^b K_1(t,s,z_2(s))\,m_{z_2}\{F_1(s,z_2(s))\}\,ds-$$

$$-\int\limits_0^b K_1(t,s,z_1(s))\,M_{z_1}\{F_2(s,z_1(s))\}\,ds+f(t).$$

Тогда существует по крайней мере одно решение уравнения (1) *и справедлива оценка* $z_2(t)\leqslant x(t)\leqslant z_1(t)$.

Лемма 1 bis. *Пусть*: 1) *функция* $K(t,s,x)\,F(s,x)$ *удовлетворяет условию* A_1: *существует такая неубывающая по* η *в области* F $(0<s,\ t\leqslant b,\ 0\leqslant\eta\leqslant 2a)$ *функция* $G(t,s,\eta)\geqslant 0$, *что*

$$|\Phi_i(K(t,s,x)\,F(s,x))|\leqslant M_{|x|}\{G(t,s,|x|)\}\quad i=1,\ 2;$$

2) *существует непрерывная на* $[0,b]$ *функция* $z(t)\geqslant 0$, $z(0)=0$, $B(t,z(t))\subset F$ *такая, что функция* $\int\limits_0^b M_z\{G(t,s,z(s))\}\,ds$ *непрерывна при* $t\in[0,b]$ *и, кроме того, удовлетворяет неравенству*

$$z(t)>\int\limits_0^b M_z\{G(t,s,z(s))\}\,ds+|f(t)|.$$

Тогда уравнение (1) *имеет хотя бы одно решение.*

Приведенные леммы, распространяющие на уравнение (1) так называемый „принцип вилки" [1,5], позволяют аналогично тому, как это сделано, например, в [4,5], получить путем соответствующего выбора функции сравнения эффективные критерии существования решения. В качестве примера приведем следующие утверждения о существовании решения сингулярного уравнения (1) в зависимости от вида $f(t)$.

Теорема 1. *Предположим, что*: 1) $K(t,s,x)\,F(s,x)$ *удовлетворяет условию* A *и* $f(0)=0$, $f(t)\geqslant 0$ *при* $t\in[0,b]$;

2) *существуют постоянные* $c_1 > c_2$, *такие, что выполняются неравенства*

$$(c_1 - 1) f(t) > \int_0^b K_2(t, s, c_1 f(s))\, M_{c_1 f}\{F_1(s, c_1 f(s))\}\, ds -$$

$$- \int_0^b K_2(t, s, c_2 f(s))\, m_{c_2 f}\{F_2(s, c_2 f(s))\}\, ds,$$

$$(c_2 - 1) f(t) < \int_0^b K_1(t, s, c_2 f(s))\, m_{c_2 f}\{F_1(s, c_2 f(s))\}\, ds -$$

$$- \int_0^b K_1(t, s, c_1 f(s))\, M_{c_1 f}\{F_2(s, c_1 f(s))\}\, ds.$$

3) $k(t, s, x)\, F(s, x)$ *удовлетворяет условию* $Б(c_1 f, c_2 f)$ *леммы* 1. *Тогда уравнение* (1) *имеет хотя бы одно решение.*

Теорема 2. *Пусть* $|\Phi_i(K(t, s, x)\, F(s, x))| \leqslant M_{|x|}\{G(t, s, |x|)\}$ $(i = 1, 2)$. *Если на* $[0, b]$ *существует непрерывная функция* $\gamma(t)$, *такая, что*

$$\gamma(t) > 1,\ \gamma(0) f(0) = 0,\ (\gamma(t) - 1)\, |f(t)| >$$

$$> \int_0^b M_{\gamma |f|}\{G(t, s, \gamma(s)\, |f(s)|)\}\, ds$$

и функция

$$\int_0^b M_{\gamma |f|}\{G(t, s, \gamma(s)\, |f(s)|)\}\, ds$$

непрерывна при $t \in [0, b]$, *то уравнение* (1) *имеет хотя бы одно решение.*

Пусть функция $M_\eta\ \{G(t, s, \eta)\}$ уловлетворяет условию: если $h \geqslant 0$, то $M_{h\eta}\{G(t, s, h\eta)\} \leqslant G_1(h)\, M_\eta\{G_2(t, s, \eta)\}$, где функция $G_1(\eta)$ непрерывна по $\eta \in (0, \infty)$ и $M_\eta\{G_2(t, s, \eta)\} \geqslant 0$ в области $0 < s, t \leqslant b$, $0 \leqslant \eta < \infty$.

Теорема 3. *Пусть*

$$D = \sup_{t \in [0, b]} \int_0^b \frac{1}{|f(t)|} M_{|f|}\{G_2(t, s, |f(s)|)\}\, ds < \infty$$

и функция $\int_0^b \frac{1}{|f(t)|} M_{|f|}\{G_2(t, s, |f(s)|)\}\, ds$ *непрерывна при* $t \in [0, b]$.

Если $f(0) = 0$ *и при некоторой* $\beta \geqslant 0$ *выполняется числовое неравенство* $\beta - G_1(\beta)\, D - 1 > 0$, *то уравнение* (1) *имеет хотя бы одно решение.*

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$|f(t)| \leqslant \varphi(t),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(t) \in C_{[0,\,b]},\ M_{h\eta}\{G(t, s, h\eta)\} \leqslant$$

$$\leqslant hM_{\eta}\{G(t, s, \eta)\},\ \varphi(t) > \alpha \int_0^b M_{\varphi}\{G(t, s, \varphi(s))\}\, ds,$$

где $\alpha > 1$ *и* $t \in [0, b]$, $\int\limits_0^b M_{\varphi}\{G(t, s, \varphi(s))\}\, ds$ *непрерывна* [illegible] $t \in$ [illegible] 0,

Тогда уравнение (1) *имеет хотя бы одно решение.*

Используя приведенные леммы, можно доказать следующие утверждения о существовании упорядоченных пар решений.

Теорема 5. *Предположим, что функции* $K(t, s, x)$, $F(s, x)$ *и* $K(t, s, x)\, F(s, x)$ *не убывают по* x *и существует пара непрерывных функций* $z_i(t)$, $z_i(0) = 0$ $(i = 1,\ 2)$ $z_2(t) < z_1(t)$, *таких, что удовлетворяются интегральные неравенства*

$$z_1(t) > \int_0^b K(t, s, z_1(s))\, m_{z_1}\{F(s, z_1(s))\}\, ds + f(t),$$

$$z_2(t) < \int_0^b K(t, s, z_2(s))\, M_{z_2}\{F(s, z_2(s))\}\, ds + f(t).$$

Пусть, далее, выполнено условие $Б(z_1, z_2)$. *Тогда:* а) *существует по крайней мере одно решение уравнения* (1) *и справедлива оценка* $z_2(t) < x(t) < z_1(t)$; б) *если таких решений более одного, то среди всех решений найдутся два упорядоченных* $y(t)$ *и* $v(t)$, *т. е. таких решений* $y(t)$, $v(t)$, *что* $z_2(t) < v(t) \leqslant y(t) < z_1(t)$.

Теорема 6. *Предположим, что* $K(t, s, x)$, $F(s, x)$ *и* $K(t, s, x)\, F(s, x)$ *не убывают по* x *и существует пара непрерывных функций* $z_i(t)$, $z_i(0) = 0$ $(i = 1, 2)$, $z_2(t) \leqslant z_1(t)$ *и удовлетворяются интегральные неравенства*

$$z_1(t) \geqslant \int_0^b K(t, s, z_1(s))\, M_{z_1}\{F(s, z_1(s))\}\, ds + f(t),$$

$$z_2(t) \leqslant \int_0^b K(t, s, z_2(s))\, m_{z_2}\{F(s, z_2(s))\}\, ds + f(t).$$

Пусть, далее, выполнено условие $Б(z_1, z_2)$. *Тогда существуют верхнее* $\overline{x}(t)$ *и нижнее* $\underline{x}(t)$ *решения, т. е. такие решения, что*

$$z_2(t) \leqslant \underline{x}(t) \leqslant x(t) \leqslant \overline{x}(t) \leqslant z_1(t)$$

для любого решения $x(t)$, *удовлетворяющего неравенствам*

$$z_2(t) \leqslant x(t) \leqslant z_1(t).$$

Отметим в заключение, что уравнение с запаздывающим аргументом

$$x(t)=\int_{0}^{t} K(t, s, x(g(s)))\, F(s, x(g(s)))\, ds+f(t) \quad (t \geqslant 0)$$

$$x(t)=\omega(t) \quad (t \leqslant 0)$$

на основе известной подстановки А. И. Логунова, аналогично тому, как это показано в ([3]), сводится к уравнению (1).

Тамбовский институт химического машиностроения

Վ. Գ. ՕՀԱՆՋԱՆՅԱՆ

Խզվող օպերատոր ունեցող ինտեգրալ հավասարումների առթիվ

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ տիպի ինտեգրալ հավասարումը

$$x(t)=\int_{0}^{b} k\,|t,\ s,\ x(s)|\ J[s,\ x(s)]\, ds+f(t).$$

G տիրույթում, որտեղ $k(t.\ s,\ x)$ և $J(s,\ x)$ ֆունկցիաները բավարարում են а); б) *և* в) *պայմաններին։*

Սահմանված է այդ ինտեգրալ հավասարման լուծման գաղափարը անընդհատ ֆունկցիաների դասում և գտնվում են մի շարք բավարար պայմաններ լուծման գոյության և լուծումների դասի վարքի մասին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. В. Азбелев, Ли Мун-су, Р. К. Рагимханов,* ДАН СССР, т. 171, № 2 (1967). [2] *Ли Мун-су, Р. К. Рагимханов,* Известия ВУЗ, матем., № 2 (57), 26—34, (1967). [3] *Р. К. Рагимханов,* Труды ТИХМа, вып. 1, 13—15, Тамбов, 1967. [4] *Ю. С. Шаталов,* К вопросу о существовании решений систем сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра. Диф. ур., т. 3, № 2, 264—272, 1967. [5] *Г. Н. Жевлаков, Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков,* ДАН БССР, т. 10, № 9, 626—628, (1966).