ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVI 1968 1

ФИЗИКА

УДК 535.14+530.145

А. Д. Газазян

Взаимодействие частично-когерентного электромагнитного излучения с атомами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 28/X 1967)

В работах [1, 2] рассматривалось взаимодействие полностью когерентного электромагнитного излучения с системой двухуровневых резонансных атомов. В данной работе рассмотрен случай, когда падающая электромагнитная волна частично когерентна.

Частично когерентное состояние свободного электромагнитного излучения в начальный момент времени ($t=0$) будем описывать с помощью матрицы плотности $W_{\text{изл}}(0)$. Как указал Сударшан [3], любой оператор плотности свободного электромагнитного поля может быть представлен в „диагональной" форме, если использовать базис, образованный собственными состояниями $|z\rangle$ оператора уничтожения фотона c:

$$W_{\text{изл}}(0)=\int P(z)\,|z\rangle\langle z|\,d^2z, \tag{1}$$

где $P(z)$ можно считать распределением в фазовом пространстве, описывающем смешанное состояние поля, а интегрирование распространяется на всю комплексную плоскость z.

В представлении Фока, матрица плотности (1) имеет вид:

$$W_{\text{изл}}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}W(n,\ m)\,|n\rangle\langle m|, \tag{2}$$

где $W(n,\ m)$—матричный элемент от матрицы $W_{\text{изл}}(0)$ в представлении Фока.

Исходя из разложения собственных функций $|z\rangle$ по базисным векторам фоковского представления [3]

$$|z\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,|n\rangle, \tag{3}$$

где

$$A_n=\exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)\frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \tag{4}$$

можно найти связь между $P(z)$ и $W(n, m)$. Она дается формулой [4]:

$$W(n, m) = \int P(z) \exp(-|z|^2) \frac{z^n z^{*m}}{\sqrt{n!\,m!}} d^2z. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь взаимодействие частичного когерентного электромагнитного излучения, состояние которого задается матрицей плотности (1) или (2), с системой N двухуровневых, резонансных атомов, из которых N_2 атомы находятся в возбужденном состоянии, а N_1 — в основном состоянии. Матрицу плотности такой системы атомов в начальный момент времени представим в виде:

$$W_{\text{ат}}(0) = \Phi(0)\,\Phi(0)^+, \quad (6)$$

где $\Phi(0)$ волновая функция системы N резонансных, двухуровневых атомов, которая задается в виде разложения [1,2]:

$$\Phi(0) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_j \Phi(j, j_2 - j_1), \quad (7)$$

где

$$C_j = \left[\frac{(2j+1)(2j_1)!\,(2j_2)!}{(j_1+j_2+j+1)!\,(j_1+j_2-j)!}\right]^{1/2}, \quad j_1 = \frac{N_1}{2}, \quad j_2 = \frac{N_2}{2}. \quad (8)$$

Полная матрица плотности начального состояния для системы атомов и частично когерентного электромагнитного излучения имеет вид:

$$W(0) = W_{\text{ат}}(0)\, W_{\text{изл}}(0) = \Phi(0)\,\Phi(0)^+ \int P(z)\,|z\rangle\langle z|\,d^2z. \quad (9)$$

Исходя из выражения (2) и разложения (7) для волновой функции $\Phi(0)$, окончательно имеем:

$$W(0) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{j'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_j C_{j'} \Phi(j, j_2-j_1)\,\Phi^+(j', j_2-j_1) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} W(n, n')\,|n\rangle\langle n'|. \quad (10)$$

При полной когерентности падающего фотонного пучка $W(n, n')$ принимает вид:

$$W(n, n') = A_n A^*_{n'}, \quad (11)$$

где A_n выражается формулой (4).

Для построения матрицы плотности в зависимости от времени для системы N атомов и электромагнитного поля мы исходим из волновой функции [1], учитывая, что полностью когерентное излучение отличается от частично когерентного излучения тем, что для него матричный элемент $W(n, n')$ имеет вид (11).

Таким образом, матрица плотности в зависимости от времени при частично когерентном излучении будет иметь вид

$$W(t)=\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\ \sum_{j'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_j C_{j'}\left\{\sum_{n=0}^{j-(j_2-j_1)}\ \sum_{n'=0}^{j'-(j_2-j_1)} W(n, n')\times\right.$$

$$\times\sum_{m=0}^{n+j+j_2-j_1}\ \sum_{m'=0}^{n'+j'+j_2-j_1} K_{m,m'}^{n,j,n',j'}(t)\,|m><m'|\,\Phi(j, n-m+j_2-j_1)\times$$

$$\times\Phi^+(j', n'-m'+j_2-j_1)+\sum_{n=0}^{j-(j_2-j_1)}\ \sum_{n'=j'-(j_2-j_1-1)}^{\infty} W(n, n')\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{n+j+j_2-j_1}\ \sum_{m'=n'-[j'-(j_2-j_1)]}^{n'+j'+j_2-j_1} K_{m,m'}^{n,j,n',j'}(t)\,|m><m'|\,\Phi(j, n-m+j_2-j_1)\times$$

$$\times\Phi^+(j', n'-m'+j_2-j_1)+\sum_{n=j-(j_2-j_1-1)}^{\infty}\ \sum_{n'=0}^{j'-(j_2-j_1)} W(n, n')\times$$

$$\times\sum_{m=n-[j-(j_2-j_1)]}^{n+j+j_2-j_1}\ \sum_{m'=0}^{n'+j'+j_2-j_1} K_{m,m'}^{n,j,n',j'}(t)\,|m><m'|\times\Phi(j, n-m+j_2-j_1)\times$$

$$\times\Phi^+(j^-, n'-m'+j_2-j_1)+\sum_{n=j-(j_2-j_1-1)}^{\infty}\ \sum_{n'=j'-(j_2-j_1-1)}^{\infty} W(n, n')\times$$

$$\times\sum_{m=n-[j-(j_2-{}_1j)]}^{n+j+j_2-j_1}\ \sum_{m'=n'-[j'-(j_2-j_1)]}^{n'+j'+j_2-j_1} K_{m,m'}^{n,j,n',j'}(t)\,|m><m'|\times$$

$$\left.\times\Phi((j, n-m+j_2-j_1)\,\Phi^+(j', n'-m'+j_2-j_1)\right\}. \qquad (12)$$

Среднее число фотонов в зависимости от времени определяется формулой:

$$\bar{n}(t)=\mathrm{sp}\,(c^+c\,W(t)). \qquad (13)$$

Подставляя сюда выражение (12) для матрицы плотности в зависимости от времени, получаем:

$$\bar{n}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} W(n, n)\,\rho_n(t), \qquad (14)$$

где $\rho_n(t)$—среднее число фотонов в момент t, если в начальный момент имеются n фотонов, и определяется формулой:

$$\rho_n(t)=\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_j^2\begin{cases}\displaystyle\sum_{m=0}^{n+j+j_2-j_1} mK_{m,m}^{n,j,n,j}(t), & \text{при } n\leq j-(j_2-j_1)\\ \displaystyle\sum_{m=n-[j-(j_2-j_1)]}^{n+j+j_2-j_1} K_{m,m}^{n,j,n,j}(t), & \text{при } n>j-(j_2-j_1),\end{cases} \qquad (15)$$

$W(n, n)$ представляет собой распределение числа фотонов в падающем пучке, которое в случае полной когерентности, исходя из формулы (4) и (11), имеет вид распределеления Пуассона.

Представляя $K^{n,j,n',j'}_{m,m'}(t)$ в виде произведения

$$K^{n,j,n',j'}_{m,m'}(t) = B^{n,j}_{m}(t) \cdot B^{n',j'*}_{m'}(t) \tag{16}$$

и подставляя выражение (12) для $W(t)$ в уравнение для матрицы плотности

$$i\hbar \frac{dW(t)}{dt} = [\hat{H}, W(t)], \tag{17}$$

получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений для $B^{n,j}_{m}(t)$ [1,2]:

$$i \frac{dB^{n,j}_{m}(t)}{dt} = [(n - m + j_2 - j_1)\omega_0 + m\omega] B^{n,j}_{m}(t) +$$

$$+ \beta^* \sqrt{(m+1)(j+n-m+j_2-j_1)(j-n+m-j_2+j_1-1)} B^{n,j}_{m+1}(t) +$$

$$+ \beta \sqrt{m(j-n+m-j_2+j_1)(j+n-m+j_2-j_1-1)} B^{n,j}_{m-1}(t) \tag{18}$$

с начальными условиями

$$B^{n,j}_{m}(0) = \delta_{m,n}. \tag{19}$$

Таким образом, основные формулы работ [1,2] при полной когерентности электромагнитного излучения остаются в силе и в случае частичной когерентности с той лишь разницей, что конечное усреднение по распределению Пуассона надо заменить усреднением по соответствующему распределению падающего фотонного пучка.

Поле излучения, возбуждаемое тепловым источником, имеет особенно простой характер, в котором распределение ансамбля комплексных амплитуд z гауссовское с нулевым средним значением [5]

$$P(z) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle} \exp\left(-\frac{|z|^2}{\langle n \rangle}\right), \tag{20}$$

где $\langle n \rangle$ — хорошо известное математическое ожидание оператора числа фотонов $c^+ c$ при тепловом равновесии:

$$\langle n \rangle = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right]^{-1}. \tag{21}$$

Подставляя (20) в (5), для матричного элемента матрицы плотности $W(n, m)$ получим [4,5]:

$$W(n, m) = \left[(1 + \langle n \rangle)\left(1 + \frac{1}{\langle n \rangle}\right)^{n}\right]^{-1} \delta_{m,n}. \tag{22}$$

Матрица плотности оказывается диагональной и соответствует распределению Бозе—Эйнштейна.

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляну за ценные советы и сбсуждение результатов.

Объединенная радиационная лаборатория
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ

Մասնակի կոհերենտ էլեկտրամագնիսական ճառագայթման փոխազդեցությունը ատոմների հետ

Աշխատանքում դիտարկված է մասնակի կոհերենտ ճառագայթման փոխազդեցությունը ատոմների հետ։ Սկզբնական մոմենտում ազատ էլեկտրամագնիսական ճառագայթման մասնակի կոհերենտ վիճակը տրվում է խտության մատրիցայի միջոցով։ Ինչպես Սուդարշանը ցույց է տվել, ազատ էլեկտրամագնիսական դաշտի խտության օպերատորը կարող է տրվել «անկյունագծային» տեսքի պատկերացմամբ, եթե օգտագործվեն որպես բազիս ֆոտոնի կլանման օպերատորի սեփական ֆունկցիաները։

Ցույց է տրված, որ ֆոտոնների միջին թիվը ժամանակից կախված արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\overline{n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W(n, n)\, \rho_n(t),$$

որտեղ $W(n, m)$ խտության մատրիցայի n, m էլեմենտն է Ֆոկի պատկերացմամբ, իսկ $\rho_n(t)$ ֆոտոնների թիվն է t մոմենտում, եթե սկզբնական $t = 0$ մոմենտում ունեցել ենք n ֆոտոններ։ Այսպիսով, ցույց է տրվում, որ (1, 2) աշխատանքներում բերված արդյունքները լրիվ կոհերենտ ճառագայթման դեպքում ուժի մեջ են մնում նաև մասնակի կոհերենտ ճառագայթման դեպքում, այն տարբերությամբ միայն, որ վերջնական միջինացումը ըստ Պուասոնի բաշխման պետք է փոխարինվի ընկնող ֆոտոնների փնջին համապատասխանող $W(n, n)$ բաշխմամբ։

Դիտարկված է ջերմային ճառագայթման էլեկտրամագնիսական դաշտը, որի խտության մատրիցան Ֆոկի պատկերացմամբ ներկայացնում է «անկյունագծային» մատրիցա և համապատասխանում է Բոզե-Էյնշտեյնի բաշխմանը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Д. Газазян*, ДАН АрмССР, т. 42, 288 (1966). [2] *А. Д. Газазян*, ЖЭТФ, 51, 1863 (1966). [3] *E. G. Sudarshan*, Phys. Rev. Lett., 10, 277 (1963). [4] *Р. Глаубер*, См. сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир. М., 1966. [5] *Э. Вольф. Л. Мандель*, УФН, 87, 491 (1965); УФН, 88, 347 (1966); УФН, 88, 619 (1966).