ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLV 1967 5

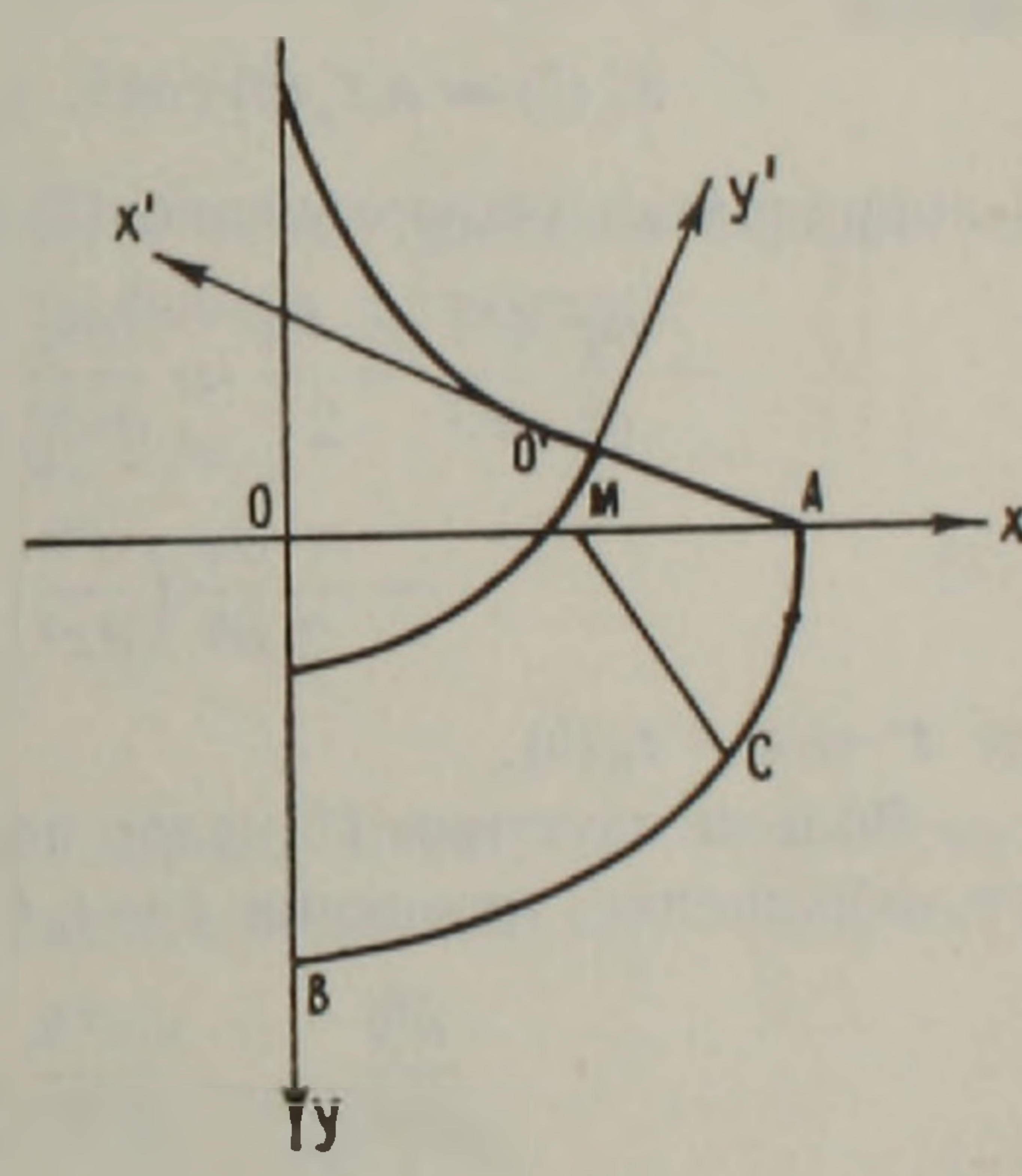
МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Определение решения вблизи особой линии

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 15/VIII 1967)

Рассматривается задача о поведении решения вблизи фронта ударной волны малой интенсивности около каустики. В качестве примера можно указать на задачу о движении давления на границе жидкой полуплоскости. Когда скорость фронта по поверхности $R'(t)$ становится равной скорости звука в невозмущенной жидкости a_0, фронт перпендикулярен поверхности и точка пересечения фронта с поверхностью A находится на каустике A_0A, фиг. 1. Если теперь обратить движение и рассмотреть движение фронта вдоль луча MC в верхнюю полуплоскость, получится задача о прохождении фронта через каустику. Пусть в начальный момент времени радиус кривизны фронта ACB, фиг. 1, равнялся $a_0T - a_0t_0$, тогда в момент t_1, отсчитываемый с момента обращенного движения, он будет равен $a_0T - a_0t_1 - a_0t_0$, и вводя избыточное время по формуле $T - t_1 = t$, в уравнениях движения мы должны вместо $\frac{\partial}{\partial t_1}$ писать $-\frac{\partial}{\partial t}$ (в дальнейшем термин „избыточное" опускается). Исправим недостатки линейной теории путем учета нелинейных эффектов. Обозначим через $\gamma = \frac{P_1}{Bn}$ малую величину, связанную с приложенным давлением.



Фиг. 1.

Граничное условие на поверхности имеет вид

$$P = \begin{cases} P_1, (x, t) & |x| < R(t) \\ 0 & |x| > R(t) \end{cases}, \tag{1}$$

где P_1 — давление на границе, $R(t)$ — координата фронта A, фиг. 1.

Уравнение потенциала $\varphi(x, y, t)$ запишется с точностью до малых второго порядка ([1])

$$a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0, \qquad (2)$$

где скорость звука в первом порядке находится с помощью уравнения состояния

$$P=B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n-B$$

в виде

$$a=a_0\left(1+\frac{n-1}{2}\frac{P}{Bn}\right). \qquad (3)$$

Здесь P — давление, ρ — плотность, B, n, ρ_0 — постоянные.

Введем вместо декартовых координат x, y координаты τ, θ

$$x-x_0(\theta)=a_0(t-t_0-\tau)\cos\theta,$$

$$y-y_0(\theta)=a_0(t-t_0-\tau)\sin\theta, \qquad (4)$$

где угол θ задает положение луча, $\tau=0$ есть уравнение фронта линейной задачи в момент t, $x=x_0(\theta)$, $y=y_0(\theta)$ — уравнения каустики A_0A, $t=t_0(\theta)$ — момент привода фронта вдоль луча на каустику, причем

$$x_0'(\theta)=a_0t_0'(\theta)\cos\theta,\ y_0'(\theta)=a_0t_0'(\theta)\sin\theta. \qquad (5)$$

В координатах (4) уравнение (2) перепишется в виде

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}\frac{n+1}{2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{1}{t^*}-\frac{a_0^2}{2t^{*2}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)=0, \qquad (6)$$

где $t^*=t-t_0(\theta)$.

Вблизи каустики t^* мало; полагая $\theta'=\theta-\theta_1(t)$, где $\theta_1=\theta_1(t)$ есть обращение уравнения $t=t_0(\theta)$, найдем по (4)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=-\frac{\sin^2\theta_1}{t_0'^2\theta'^3},\ \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=-\frac{\cos^2\theta_1}{t_0'^2\theta'^3}$$

и уравнение (6) в переменных θ', τ, t запишется

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}(n+1)+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau\partial t}-2\theta_1'\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta'\partial\tau}-\frac{1}{t_0\theta'}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-\frac{a_0^2}{t_0'^2\theta'^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta'^2}+$$

$$+\frac{1}{t_0'^2\theta'^3}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta'}=0. \qquad (7)$$

Введем систему координат, движущуюся с фронтом по каустике, причем направим $0x'$ по касательной к указанной кривой. Тогда

$$x'=-(x-x_0)\cos\theta_1-(y-y_0)\sin\theta_1,\quad y'=(x-x_0)\sin\theta_1-(y-y_0)\cos\theta_1, \qquad (8)$$

где $x_0 = x_0(\theta_1)$, $y_0 = y_0(\theta_1)$, θ_1 характеризует начало $0'$ новой системы координат (фиг. 1), при этом $t_0(\theta_1) = t$.

Для давления вдоль фронта волны

$$x' = -\frac{1}{3}\frac{(-2y')^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-t_0'}}$$

по лучевой теории можно найти

$$P = \frac{C(\theta)}{\sqrt{t^*}},\ C(\theta) = P_1\sqrt{-\frac{\sin^2\theta_1}{a_0^2}\frac{R'^3(t_0)}{R''(t_0)}}$$

или, поскольку $t^* = -t_0'\theta'$, вблизи точки $t_0 = t$,

$$P = \frac{C(\theta_1)}{\sqrt{-t_0'\theta'}}. \tag{9}$$

Из сравнения линейного и нелинейного наклонов фронта получаются оценки для порядков

$$\tau = \gamma^{\frac{6}{5}},\ \theta' = \gamma^{\frac{2}{5}},\ y' = \gamma^{\frac{4}{5}},\ x' = \gamma^{\frac{6}{5}},\ \frac{P}{Bn} = \gamma^{\frac{4}{5}},\ \varphi = \gamma^2. \tag{10}$$

Отметим, что уравнение (7) получено из (2) удерживанием членов порядка $\frac{2}{5}$.

Если подставить (4) в (8) и оставить малые третьего порядка по θ', можно найти вблизи точки подхода фронта к каустике

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{1}{3}t_0'\theta'^3 a_0 + \tau a_0, \\ y' &= \frac{1}{2}a_0 t_0'\theta'^2. \end{aligned} \tag{11}$$

С помощью (9) можно уравнение (6) переписать в переменных x', y', t. Получим это уравнение непосредственно из (2). С учетом (5) из (8) можно найти

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = a_0 + \frac{1}{2}a_0\theta'^2,\ \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{a_0 t_0''}{2}\theta'^2\theta_1'. \tag{12}$$

Учитывая, что по интегралу Лагранжа $P = \rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, а также

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

и приближенно в порядке $\frac{2}{5}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} a_0^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t} a_0 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} a_0^2\theta'^2 \tag{13}$$

из уравнения (2) можно найти вблизи A_0A

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} - \theta'^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + \frac{n+1}{a_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t}\frac{1}{a_0} = 0. \tag{14}$$

Полученное уравнение в установившемся случае

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} - \theta'^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + \frac{n+1}{a_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} = 0 \tag{15}$$

подобно уравнению, полученному для неоднородной жидкости, поэтому его можно исследовать аналогично.

Характеристики этого уравнения

$$\frac{dx'}{dy'} = \pm\sqrt{\theta'^2 - (n+1)\frac{v_x}{a_0}}, \quad dv_y = \frac{dx'}{dy'}dv_x. \tag{16}$$

Если взять уравнение характеристик $\left(\frac{dx'}{dy'}\right)_1$, соответствующих знаку (—) в (16), и подставить в него условие вдоль характеристики (2), можно получить с учетом $\left(\frac{dx'}{dy'}\right)_2 = -\left(\frac{dx'}{dy'}\right)_1$, что

$$v_y = -v_x\left(\frac{dx'}{dy'}\right), \quad \frac{dv_x}{dy'} + \frac{1}{2}v_x\frac{\frac{d^2x'}{dy'^2}}{\frac{dx'}{dy'}} = 0 \tag{17}$$

вдоль (1) характеристики. Интегрирование (17) дает

$$v_x = \frac{C_1}{\sqrt[4]{\theta'^2 - (n+1)\frac{v_x}{a_0}}}, \tag{18}$$

где постоянная C_1 находится из линейного решения (9), $C_1 = \frac{C}{\rho_0 a_0\sqrt{-t_0'}}$.

Отметим, что по интегралу Лагранжа и (13)

$$P = \rho_0 a_0\frac{\partial\varphi}{\partial x'},$$

поэтому $\frac{\partial\varphi}{\partial x'} > 0$ и $v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}$ в (18) вычитается из θ'^2. Таким образом, нелинейность как бы усиливает особенность, хотя согласно (18) решение не дойдет до линии A_0A и имеет место нерегулярное отражение.

Решение линейного уравнения (15)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} - \frac{2y'}{t_0'a_0}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} = 0 \tag{19}$$

можно найти в виде [2]

$$\varphi = A|x'|^{\frac{5}{6}} \left| 1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{-t_0' a_0}{2}} \right| F\left(\frac{7}{12}, \frac{13}{12}, 2{,}1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{-t_0'}{2}}\right), \tag{20}$$

где постоянная A может быть выражена через C по (9).

В нелинейной задаче, после введения переменных

$$v_{x_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x'}, \quad v_{y_1} = \frac{\partial\psi}{\partial y'}, \quad \psi = -\frac{n+1}{2} t_0' \varphi + x'y'$$

получится уравнение для ψ

$$v_{x_1} \frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} - \frac{a_0 t_0'}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2} = 0,$$

которое преобразованием $\Phi + \psi = x'v_{x_1} + y'v_{y_1}$, $x' = \dfrac{\partial\Phi}{\partial v_{x_1}}$, $y' = \dfrac{\partial\Phi}{\partial v_{y_1}}$ приводится к уравнению линейной задачи

$$v_{x_1} \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_1^2} - \frac{t_0'}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_{x_1}^2} = 0. \tag{21}$$

Для того чтобы φ для конечных x', y' переходило в (20), достаточно положить

$$\Phi = \frac{n+1}{2} t_0' \varphi(v_{y_1}, v_{x_1}) + v_{x_1}v_{y_1} + C_3 v_{x_1} + C_2. \tag{22}$$

К уравнению (15), записанному в линейном случае в виде

$$\eta \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0,$$

где $\eta = -y' \sqrt[3]{\dfrac{2}{-a_0 t_0'}}$, $\theta = -x'$ играет роль времени, применим преобразование Фурье по θ; тогда для изображения $\bar{\varphi}$ получим

$$\eta k^2 \bar{\varphi} + \frac{d^2\bar{\varphi}}{d\eta^2} = 0, \tag{23}$$

имеющее решением [3]

$$\bar{\varphi} = Ak^{-\frac{11}{6}} \Phi(-x), \quad k^{\frac{2}{3}} \eta = x, \tag{24}$$

где $\Phi(-x)$ есть функция Эйри, A постоянная; степень $k^{-\frac{11}{6}}$ выбрана так, чтобы обеспечить непрерывность потенциала и разрыв давления на ударной волне. Выражение (24) получается при прохождении гармонической волны [3] около каустики.

Используя выражение для функций Эйри [3] при $x > 0$

$$\Phi(-x)=\sqrt{\frac{1}{3}x}\left\{I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)+I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right\} \tag{25}$$

и раскладывая в ряд по степеням k, получим, включая здесь и далее постоянные в A:

$$\bar{\varphi}=A\sqrt{\eta}\,k^{-\frac{11}{6}}\left(\frac{1}{3}\eta^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\sum_{0}^{\infty}\frac{\left(\frac{ki}{3}\eta^{\frac{3}{2}}\right)^{2m}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}+m\right)m!}+$$

$$+A\sqrt{\eta}\,k^{-\frac{11}{6}}k^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\eta^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{ki}{3}\eta^{\frac{3}{2}}\right)^{2m}\Big/\Gamma\left(\frac{4}{3}+m\right)m!. \tag{26}$$

Обозначая $ki=p$, используя обратное преобразование Фурье в виде $\theta^{r}\div\frac{\Gamma(r+1)}{(ki)^{r+1}}$, найдем с учетом $\xi_1=\eta\Big/\left(\frac{3}{2}\theta\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\varphi=A\,3^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}\sum_{0}^{\infty}\frac{\xi_1^{3m}\theta^{\frac{5}{6}}}{m!\,\Gamma\left(\frac{2}{3}+m\right)2^{2m}}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}-2m\right)}+$$

$$+A\eta\sum_{0}^{\infty}\frac{\theta^{\frac{1}{6}}\xi_1^{3m}}{m!\,\Gamma\left(\frac{4}{3}+m\right)2^{2m}}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{6}+2m\right)}. \tag{27}$$

Выражая

$$\Gamma\left(\frac{11}{6}-2m\right)=-1/2\,\Gamma\left(2m-\frac{5}{6}\right),\quad\Gamma\left(\frac{7}{6}-2m\right)=-1/2\,\Gamma\left(2m-\frac{1}{6}\right) \tag{28}$$

и используя формулу удвоения для $\Gamma\left(2m-\frac{5}{6}\right)$, $\Gamma\left(2m-\frac{1}{6}\right)$, получим

$$\varphi=A|x'|^{\frac{5}{6}}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{12}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}F\left(-\frac{5}{12},\frac{1}{12},\frac{2}{3},\xi^{3}\right)-$$

$$-A|x'|^{\frac{5}{6}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{12}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)}\xi F\left(-\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{4}{3},\xi^{3}\right), \tag{29}$$

причем $\xi=\eta\Big/\left(\frac{3}{2}x'\right)^{\frac{2}{3}}$.

После аналитического продолжения (29) дает (20), что показано, например, в ([2]), причем возникающая особенность устраняется. Постоянная A определяется из сопоставления с решением (9) на фронте волны, которое с отраженной волной можно найти из (24) для больших $-x$. Из (29) давление имеет вид $P = 2\rho_0 a_0 A \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \eta^{-\frac{1}{4}} \times$
$\times P_{-\frac{1}{6}}\left(\dfrac{\theta}{\sqrt{\frac{4\eta^3}{9}}}\right)$*.

Таким образом удается многие решенные в гармоническом случае задачи вблизи каустики привести в нестационарном случае к форме (10). Учет вязких слагаемых в уравнениях движения дает поправку порядка ν/γ^2, ν — коэффициент кинематической вязкости, причем, как правило, $\nu/\gamma^2 = 0(\gamma)$. В случае произвольной каустики для неоднородной жидкости в (15) следует заменить $-\theta'^2$ на $\dfrac{2y'}{R}$, где $\dfrac{1}{R} > 0$ есть разность кривизн луча и каустики.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Լուծման որոշումը եզակի գծի մոտ

Դիտարկվում է թույլ հարվածային ճակատի որոշման խնդիրը այն գծի մոտ, որտեղ հարվածային ճակատը գծային խնդրում ունի անվերջ կորություն։ Լուծումը գտնվում է ոչ գծային հավասարումների պարզեցված տեսքի լուծումներն ուսումնասիրելով։

Գտնված է պարամետրերի կարգերը, և պարզեցված հավասարումները Լեժանդրի ձևափոխությունից հետո բերվում են Տրիկոմիի հավասարման։

Լուծումը ստացվում է գծային լուծման ձևափոխման տեսքով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Багдоев*, Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами, Ереван, 1961. [2] *Л. Д. Ландау* и *Лифшиц*, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953. [3] *Л. Д. Ландау* и *Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Физматгиз, М., 1962. [4] *Ю. Л. Газарян*, Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, Л., № 5, 1961.

---

* Этот факт найден в ([4]).