ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLV 1967 4

МАТЕМАТИКА

Ф. Э. Мелик-Адамян

К теории матричных акселерант и спектральных матриц-функций канонических дифференциальных систем

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/VII 1967)

1. В дальнейшем прописными буквами A, B, Φ, Ψ, $\cdots$ будут обозначаться квадратные комплексные матрицы одного и того же порядка n, через A^*, B^*, Φ^*, Ψ^*, $\cdots$ — соответствующие эрмитово сопряженные матрицы. Единичную матрицу n-го порядка обозначим через I_n. Курсивными прописными буквами V, Y, $\cdots$ будем обозначать блочные матрицы с матричными элементами n-го порядка.

Рассмотрим матричную каноническую дифференциальную систему вида

$$J\frac{dY}{dr}=\lambda Y+V(r)\,Y \qquad (0\leqslant r<\rho\leqslant\infty), \tag{1}$$

где

$$J=\begin{pmatrix}0 & \Gamma_n\\ -\Gamma_n & 0\end{pmatrix},\qquad V(r)=\begin{pmatrix}P(r) & Q(r)\\ Q^*(r) & R(r)\end{pmatrix},\qquad Y(r,\lambda)=\begin{pmatrix}Y_1(r,\lambda)\\ Y_2(r,\lambda)\end{pmatrix}.$$

Здесь мы предполагаем, что $P(r)$, $Q(r)$, $R(r)$—локально интегрируемые в полусегменте $[0,\rho)$ матрицы-функции, причем $P(r)=P^*(r)$ $R(r)=R^*(r)$.

Обозначим через

$$\chi(r,\lambda)=\begin{pmatrix}\Phi(r,\lambda)\\ \Psi(r,\lambda)\end{pmatrix}$$

решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\Phi(0,\lambda)=M,\qquad \Psi(0,\lambda)=N,$$

где матрицы M и N удовлетворяют соотношениям

$$M^*M+N^*N=I_n,\qquad M^*N-N^*M=0. \tag{2}$$

Систему (1)—(2) с помощью унитарного преобразования, коммутирующего с J можно свести к задаче вида (ср. с [1])

$$\begin{cases} J\dfrac{d\chi}{dr} = \lambda\chi + \begin{pmatrix} -B(r) & A(r) \\ A(r) & B(r) \end{pmatrix}\chi & (0 \leq r < \rho \leq \infty) \\ \chi(0, \lambda) = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{3}$$

где $A(r)$, $B(r)$ — эрмитовы локально интегрируемые в полусегменте $[0, \rho)$ матрицы-функции.

Обозначим через V_n класс матриц-функций n-го порядка $\Sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, удовлетворяющих условиям:

1) матрица-функция $\Sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ непрерывна слева и $\Sigma(0) = 0$;

2) при $\lambda < \mu$ разность $\Sigma(\mu) - \Sigma(\lambda)$ есть эрмитово-неотрицательная матрица.

Матрица-функция $\Sigma(\lambda)$ из класса V_n называется спектральной матрицей-функцией задачи (3), если для любых непрерывных и ρ-финитных* матриц-функций $G_j(t)$ и $D_j(t)$ $(j = 1, 2)$ выполняется тождество

$$\int_0^\rho \begin{pmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \end{pmatrix} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^\rho \begin{pmatrix} \Phi(t, \lambda) \\ \Psi(t, \lambda) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{pmatrix} dt \right)^* d\Sigma(\lambda) \times$$

$$\times \left(\int_0^\rho \begin{pmatrix} \Phi(t, \lambda) \\ \Psi(t, \lambda) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \end{pmatrix} dt \right), \tag{4}$$

где

$$\chi(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \Phi(t, \lambda) \\ \Psi(t, \lambda) \end{pmatrix}$$

есть решение канонической системы (3).

Используя метод направляющих функционалов М. Г. Крейна [2], можно доказать существование хотя бы одной спектральной матрицы-функции задачи (3). В работе даны необходимые и достаточные условия на матрицу-функцию $\Sigma(\lambda) \in V_n$ для того, чтобы она была спектральной матрицей-функцией некоторой канонической системы вида (3). В одномерном случае эта задача была решена М. Г. Крейном [3]. Метод М. Г. Крейна заключается в сопоставлении канонической дифференциальной системы типа (3) с некоторой функцией (матрицей-функцией), называемой им акселерантой, позволяющей восстанавливать рассматриваемую дифференциальную систему. В настоящей работе результаты этого автора, установленные для скалярного случая [3] и

---

* ρ — финитность функции, заданной в $[0, \rho)$, означает, что функция равна нулю в некоторой левой окрестности точки ρ.

при других предположениях* для матричного случая ([4]), распространяются на общий случай канонической дифференциальной системы с произвольным локально интегрируемым потенциалом.

Отметим, что сравнительно недавно решение обратной задачи для спектральной функции скалярной системы ($n=1$, $\rho=\infty$) было снова получено ([5]) и в несколько иной форме, нежели в ([3]) (в связи с работой ([3]) см. также ([6])).

2. Пусть $H(t)$ $(-2\rho<t<2\rho;\ \rho\leqslant\infty)$ — некоторая локально интегрируемая в интервале $(-2\rho, 2\rho)$ матрица-функция. Следуя М. Г. Крейну, назовем ее эрмитовой акселерантой, если $H(t)=H^*(-t)$ $(-2\rho<t<2\rho)$ и для любого $r\,(0<r<2\rho)$ интегральное уравнение

$$x(t)+\int\limits_0^r H(t-s)\,x(s)\,ds=0$$

имеет единственное непрерывное решение $x(t)\equiv 0$. Последнее условие эквивалентно тому, что интегральная форма

$$\int\limits_0^{2\rho} x^*(t)\,x(t)\,dt+\int\limits_0^{2\rho}\int\limits_0^{2\rho} x^*(t)\,H(t-s)\,x(s)\,ds\,dt \tag{5}$$

положительна для любых непрерывных ρ-финитных вектор-функций $x(t)\not\equiv 0$ (см. ([7])).

Вместе с $H(t)$ эрмитовой акселерантой будет и $H^*(t)$. Обозначим через $\Gamma_r(t, s)$ и $F_r(t, s)$ $(0\leqslant t,\ s\leqslant r;\ r<2\rho)$ ядра резольвент интегральных операторов в интервале $(0, r)$, порожденных ядрами $H(t)$ и $H^*(t)$ соответственно. В случае непрерывного $H(t)$ (а, значит, и $H^*(t)$) $\Gamma_r(t, s)$ и $F_r(t, s)$ определяются как непрерывные решения уравнений

$$\begin{gathered}\Gamma_r(t, s)+\int\limits_0^r H(t-u)\,\Gamma_r(u, s)\,du=H(t-s),\\ F_r(t, s)+\int\limits_0^r H^*(t-u)\,F_r(u, s)\,du=H^*(t-s).\end{gathered} \tag{6}$$

В общем случае элементы матриц $\Gamma_r(t, s)$ и $F_r(t, s)$ будут непрерывными вектор-функциями аргумента t со значениями из $L^1(0, r)$. Кроме того, t и s можно поменять ролями и, как в непрерывном случае, ядра $\Gamma_r(t, s)$ и $F_r(t, s)$ будут решениями уравнений (6) и

---

* Для канонических систем (3) М. Г. Крейн ([4]) строил порождающие эти системы акселеранты для случая, когда $B(r)\equiv 0$, а $A(r)$ — симметричная комплексная матрица-функция.

$$\Gamma_r(t, s) + \int_0^r \Gamma_r(t, u) H(u - s)\, du = H(t - s),$$

$$F_r(t, s) + \int_0^r F_r(t, u) H^*(u - s)\, du = H^*(t - s). \tag{6'}$$

Имеют место соотношения

$$\Gamma_r(t, s) = \Gamma_r^*(s, t), \quad F_r(t, s) = F_r^*(s, t),$$

$$\frac{\partial \Gamma_r(t, s)}{\partial r} = -\Gamma_r(t, r)\Gamma_r(r, s), \qquad \frac{\partial F_r(t, s)}{\partial r} = -F_r(t, r) F_r(r, s),$$

$$\Gamma_r(t, s) = F_r(r - t, r - s),$$

при помощи которых доказывается

Теорема 1. *Всякой непрерывной (локально интегрируемой) матрице-функции $C(r)$ $(0 < r < 2\rho)$ отвечает всегда одна и только одна непрерывная (локально интегрируемая) эрмитова акселеранта $H(t)$ $(-2\rho < t < 2\rho)$ в том смысле, что $C(r) = \Gamma_r(0, r)$.*

Эта теорема дает возможность установить взаимно однозначное соответствие между каноническими системами вида (3) и эрмитовыми акселерантами. Для этого надо положить $2\Gamma_{2r}(0, 2r) = A(r) + iB(r)$.

3. Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение (см. ([3])*).

Если $H(t)$ $(-2\rho < t < 2\rho)$ — эрмитова акселеранта и если положить

$$\Pi(t) = |t| I_n + 2\int_0^t H(s)(t - s)\, ds \qquad (-2\rho < t < 2\rho), \tag{7}$$

то существует матрица-функция $\Sigma_1(\lambda)$ из класса V_n, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d Sp\, \Sigma_1(\lambda)}{1 + \lambda^2} < \infty$$

и такая, что

$$\Pi(t) = i\Gamma t - \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda t} - 1 - \frac{i\lambda t}{1 + \lambda^2}\right) \frac{d\Sigma_1(\lambda)}{\lambda^2} \qquad (-2\rho < t < 2\rho); \tag{8}$$

где Γ — постоянная эрмитова матрица.

Матрица-функция $\Sigma_1(\lambda) \in V_n$, дающая тождество (8) при условии (7), называется спектральной матрицей-функцией эрмитовой акселеранты $H(t)$.

Имеет место следующая основная

---

* Хотя в цитируемой статье рассматривается одномерный случай, это утверждение переносится на матричный случай непосредственно.

Теорема 2. *Множества спектральных матриц-функций канонической системы* (3) *и эрмитовой акселеранты, соответствующей этой системе, совпадают.*

Доказательство этой теоремы основано на том, что соотношение (8) при условии (7) эквивалентно соотношению

$$\int_0^{2r} G^*(t)\,D(t)\,dt+\int_0^{2r}\int_0^{2r} G^*(t)\,H(t-s)\,D(s)\,ds\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{2r} e^{i\lambda t}G(t)\,dt\right)^*\frac{d\Sigma_1(\lambda)}{2}\left(\int_0^{2r} e^{i\lambda t}D(t)\,dt\right),$$

где $G(t)$ и $D(t)$ — произвольные непрерывные на сегменте $[0\ 2r]$ $(r<\rho)$ матрицы-функции. Отсюда можно получить соотношение

$$\int_0^r \begin{pmatrix}G_1(t)\\ G_2(t)\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}D_1(t)\\ D_2(t)\end{pmatrix}dt+\int_0^r\int_0^r \begin{pmatrix}G_1(t)\\ G_2(t)\end{pmatrix}^* P(t,\ s)\begin{pmatrix}D_1(s)\\ D_2(s)\end{pmatrix}ds\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^r \begin{pmatrix}G_1(t)\\ G_2(t)\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}\cos\lambda tI_n\\ \sin\lambda tI_n\end{pmatrix}dt\right)d\Sigma_1(\lambda)\left(\int_0^r \begin{pmatrix}\cos\lambda tI_n\\ \sin\lambda tI_n\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}D_1(t)\\ D_2(t)\end{pmatrix}dt\right),\qquad(9)$$

где

$$P(t,\ s)=\begin{pmatrix}\operatorname{Re}[H(t+s)+H(t-s)] & -\operatorname{Im}[H(t+s)-H(t-s)]\\ -\operatorname{Im}[H(t+s)+H(t-s)] & -\operatorname{Re}[H(t+s)-H(t-s)]\end{pmatrix},$$

а $G_j(t)$ и $D_j(t)$ $(j=1,\ 2)$ — произвольные непрерывные на сегменте $[0\ r]$ $(r<\rho)$ матрицы-функции.

Далее, используя представление

$$\chi(r,\ \lambda)=\begin{pmatrix}\Phi(r,\ \lambda)\\ \Psi(r,\ \lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\lambda rI_n\\ \sin\lambda rI_n\end{pmatrix}+\int_0^r K(r,\ s)\begin{pmatrix}\cos\lambda sI_n\\ \sin\lambda sI_n\end{pmatrix}ds,$$

где

$$K(r,\ s)=\begin{pmatrix}\dfrac{a_1+b_1}{2}+\dfrac{a_2+b_2}{2} & \dfrac{a_1-b_1}{2i}-\dfrac{a_2-b_2}{2i}\\[2ex] \dfrac{a_1-b_1}{2i}+\dfrac{a_2-b_2}{2i} & -\dfrac{a_1+b_1}{2}+\dfrac{a_2+b_2}{2}\end{pmatrix}$$

$$a_1=\Gamma_{2r}(0,\ r+s)\qquad a_2=\Gamma_{2r}(0,\ r-s)$$

$$b_1=F_{2r}(0,\ r+s)\qquad b_2=F_{2r}(0,\ r-s)$$

для решения канонической системы (3) можно доказать, что тождество (9) эквивалентно тождеству (4) при $\Sigma(\lambda)=\Sigma_1(\lambda)$. При этом используются соотношения (6) и (6′) для резольвент. Непосредственным следствием теоремы 2 является

Т е о р е м а 3. *Пусть заданы матрица-функция* $\Sigma(\lambda) \in V_n$ *и* $\rho > 0$. *Для того, чтобы* $\Sigma(\lambda)$ *была спектральной матрицей-функцией некоторой канонической системы вида* (3) *в интервале* $[0, \rho)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dSp\,\Sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty;$$

2) *функция*

$$\Omega(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{i\lambda t}{1+\lambda^2} - e^{i\lambda t}\right) \frac{d(\Sigma(\lambda) - \lambda/\pi I_n)}{\lambda^2}$$

имеет первую абсолютно непрерывную в каждом интервале $(-r, r)$ $(r < 2\rho)$ *производную, так что*

$$\Omega'(t) = 2\int_0^t H(s)\,ds + \Omega'(0),$$

где $H(s)$ — *локально суммируемая в интервале* $(-2\rho, 2\rho)$ *матрица-функция;*

3) $H(s)$ — *эрмитова акселеранта в том же интервале.*

Заметим, что из условия 2) вытекает неотрицательность формы (5). Таким образом, условием 3) исключается возможность равенства нулю формы (5) для произвольной непрерывной вектор-функции $x(t) \neq 0$. Для достаточно малого интервала $(0, 2\rho_1)$ условие 3) всегда имеет место, так что, если выполняются условия 1) и в некотором интервале $(-2\rho, 2\rho)$ условие 2), то в этом и только в этом случае $\Sigma(\lambda)$ будет одной из спектральных матриц-функций некоторой канонической системы вида (3), заданной в достаточно малом интервале $[0, \rho_1) \subset [0, \rho)$.

В заключение приношу искреннюю благодарность чл.-корр. АН УССР М. Г. Крейну, под руководством которого выполнена эта работа.

Ереванский государственный университет
Одесский инженерно-строительный институт

Ֆ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ

Կանոնական դիֆերենցիալ սիստեմի սպեկտրալ մատրից-ֆունկցիայի և մատրիցային աքսելերանտի տեսության մասին

Դիտարկվում է հետևյալ տեսքի կանոնական դիֆերենցիալ սիստեմ

$$J\frac{dy}{dr} = \lambda y + v(r)\,y \qquad 0 < r < \rho < \infty) \qquad 1)$$

$$y(0, \lambda) = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

որտեղ

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad v(r)=\begin{pmatrix} -B(r) & A(r) \\ A(r) & B(r) \end{pmatrix}, \qquad \chi(r, \lambda)=\begin{pmatrix} \Phi(r, \lambda) \\ \Psi(r, \lambda) \end{pmatrix},$$

իսկ $A(r)$, $B(r)$, $\Phi(r, \lambda)$, $\Psi(r, \lambda)$ $(0, \rho)$ միջակայքում որոշված n կարգի մատրից-ֆունկցիաներ են, ընդ որում $A(r)$, $B(r)$ հերմիտյան են և լոկալ ինտեգրելի, I_n — n կարգի միավոր մատրից է։

Հաստատվում է փոխմիարժեք համապատասխանություն (1) տեսքի սիստեմների և $(-2\rho, 2\rho)$ միջակայքում տրված որոշակի մատրից ֆունկցիաների միջև, որոնք կոչվում են աքսելերանտներ։

$H(t)$ $(-2\rho < t < 2\rho)$ մատրից-ֆունկցիան կոչվում է աքսելերանտ, եթե 1) $H(t) = H^*(-t)$, 2) $(0, 2\rho)$ միջակայքին պատկանող ցանկացած r-ի համար

$$X(t)+\int_0^r H(t-s) X(s)\, ds=0$$

ինտեգրալ հավասարումն ունի $X(t) \equiv 0$ միակ անընդհատ լուծումը։

V_n-ով նշանակենք $\Sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ հերմիտյան ոչ-բացասական n կարգի մատրից-ֆունկցիաների դասը, որոնք նորմավորված են հետևյալ կերպ

$$\Sigma(\lambda)=\Sigma(\lambda-0) \qquad \Sigma(0)=0$$

Հայտնի ձևով (1) տեսքի սիստեմների համար սահմանվում է մատրից-ֆունկցիա $\Sigma(\lambda) \in V_n$։

$\Sigma(\lambda) \in V_n$ մատրից ֆունկցիան կոչվում է $H(t)$ $(-2\rho < t < 2\rho)$ աքսելերանտի սպեկտրալ մատրից ֆունկցիա, եթե

$$H I_n-\int_0^t H(s)(t-s)\, ds=i\gamma t-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{i\lambda t}-1-\frac{i\lambda t}{1+\lambda^2}\right) \frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda^2},$$

որտեղ γ-ն իրական թիվ է։

Թեորեմ (1)—տեսքի սիստեմի և նրան համապատասխանող աքսելերանտի սպեկտրալ մատրից ֆունկցիաների դասերը համընկնում են։

Այս թեորեմի միջոցով ստացվում են անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ որպեսզի $\Sigma(\lambda) \in V_n$ լինի (1) տեսքի սիստեմի սպեկտրալ մատրից-ֆունկցիա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. М. Адамян*, ДАН СССР, т. 177, № 1 (1967). [2] *М. Г. Крейн*. Збірник праць Інституту математики АН УРСР, № 10 (1948). [3] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 105, № 3 (1955). [4] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 111, № 6 (1956). [5] *М. Г. Гасымов* и *Б. М. Левитан*, ДАН СССР, т. 167, № 5 (1966). [6] *А. М. Рыбалко*, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 2, 1966. [7] *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и их приложения, изд. „Наука", М., 1967.