

С. М. Исаакян

Воронкообразование при истечении воды из-под щита

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. В. Егиазаровым 13/V 1967)

1. Вращение жидкости вокруг вертикальной оси при ее истечении через донные симметричные и несимметричные отверстия вызывает понижение уровня—так называемое воронкообразование. Механизм возникновения воронок частично исследован (^{1, 2}), однако пока нет теории, описывающей это явление. Здесь делается попытка теоретического решения задачи воронкообразования в случае истечения жидкости из-под щита, перекрывающего всю ширину призматического водовода. Определяется теоретическая мощность таких воронок и результат сопоставляется с экспериментальными данными.

2. Автором в (²) было установлено, что воронки, образующиеся при истечении воды из-под щита, перекрывающего всю ширину призматического прямоугольного водовода, появляются периодически—поочередно у левого и у правого углов, составленных щитом и стенками водовода и имеют разные направления вращения; периодичность имеет квазизакономерный характер. Причина периодичности явления осталась тогда нераскрытой.

Было показано (^{3, 4}), что возникновение периодичных вихрей разных знаков является следствием трения в жидкости при ее относительном движении и представляет разновидность вихревой дорожки Кармана. На этом основании делается заключение, что: а) при движении жидкости вдоль стен призматического водовода должны выделяться вихревые слои противоположного вращения; б) вследствие неустойчивости этой системы вихрей она должна распасться на дискретные вихри шахматного расположения и занимать координаты, соответствующие их устойчивости. Хорошей демонстрацией справедливости такого предположения является приведенная Н. С. Шарашкиной (⁵) фотография донных токов в призматическом водоводе с неразмываемыми стенками, когда на дно посыпан песок; здесь шахматно расположенные вращающиеся области песка вместе с описанием их медленного скольжения вдоль водовода отражают истинные свойства дорожки Кармана.

3. Опишем дорожку Кармана в области ограниченной ширины. С такой целью напомним функцию комплексного потенциала для шахматной вихревой системы в безграничной области (6):

$$w = uz - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{l} (z - z_1)}{\sin \frac{\pi}{l} (z - z_2)}. \quad (1)$$

Зеркально отобразим ее в k раз относительно прямых $y = \pm \frac{B}{2}$, вдоль которых предполагается расположение стен водовода, получим:

$$w = uz - \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \ln \frac{\sin \frac{\pi}{l} (z - z_{1k})}{\sin \frac{\pi}{l} (z - z_{2k})} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln \frac{\sin \frac{\pi}{l} (z - \bar{z}_{1k})}{\sin \frac{\pi}{l} (z - \bar{z}_{2k})} \right]. \quad (2)$$

Комплексная скорость этого поля

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = u - \frac{\Gamma}{2li} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - z_{1k}) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - \bar{z}_{2k}) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - \bar{z}_{1k}) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - \bar{z}_{2k}) \right] \right\}. \quad (3)$$

Компоненты скорости по осям ox и oy получаются подстановкой значений z_{1k} и $\bar{z}_{1k}$ и выделением регулярной и мнимой частей (3):

$$\begin{aligned} v_{1x} = v_x - u = & - \frac{\Gamma \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}}{l} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \times \right. \\ & \left. \frac{\operatorname{sh} (-1)^k \frac{\pi h}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\pi}{l} (y - kB)}{\left[\operatorname{sh} (-1)^k \frac{\pi h}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\pi}{l} (y - kB) \right]^2 + \cos^2 \frac{2\pi x}{l} \operatorname{ch}^2 \frac{2\pi}{l} (y - kB)} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \times \right. \\ & \left. \frac{\operatorname{sh} (-1)^k \frac{\pi h}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\pi}{l} (y + kB)}{\left[\operatorname{sh} (-1)^k \frac{\pi h}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\pi}{l} (y + kB) \right]^2 + \cos^2 \frac{2\pi x}{l} \operatorname{ch}^2 \frac{2\pi}{l} (y + kB)} \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$v_y = - \frac{\Gamma \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} \cos \frac{2\pi x}{l}}{l} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} (y - kB)}{\left[\operatorname{sh} (-1)^k \frac{\pi h}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\pi}{l} (y - kB) \right]^2 + \cos^2 \frac{2\pi x}{l} \operatorname{ch}^2 \frac{2\pi}{l} (y - kB)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi x}{l} (y + kB)}{\left[\operatorname{sh} (-1)^k \frac{\pi h}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\pi}{l} (y + kB) \right]^2 + \cos^2 \frac{2\pi x}{l} \operatorname{ch}^2 \frac{2\pi}{l} (y + kB)} \end{aligned} \quad (5)$$

При достаточно больших k (5) удовлетворяет условию $v_y|_{y=\pm \frac{B}{2}} = 0$,

следовательно плоскости, расположенные по $y = \pm \frac{B}{2}$, непроницаемы и, таким образом, (2) представляет шахматную систему бесконечно длинных вихревых шнуров в области, шириной B .

Функция тока этого поля

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = & \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left| y - kB - (-1)^{k+1} \frac{h}{2} \right| + \sin \frac{2\pi x}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left| y - kB - (-1)^k \frac{h}{2} \right| - \sin \frac{2\pi x}{l}} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left| y + kB - (-1)^{k+1} \frac{h}{2} \right| + \sin \frac{2\pi h}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left| y + kB - (-1)^k \frac{h}{2} \right| - \sin \frac{2\pi x}{l}} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Скорость передвижения вихревой системы (2) вычисляем подстановкой в (4) $z = z_1$, получаем

$$\begin{aligned} u = & - \frac{\Gamma \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}}{l} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\operatorname{sh} (-1)^k \frac{\pi h}{l} + \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (h + 2kB)} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\operatorname{sh} (-1)^k \frac{\pi h}{l} + \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (h - 2kB)} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

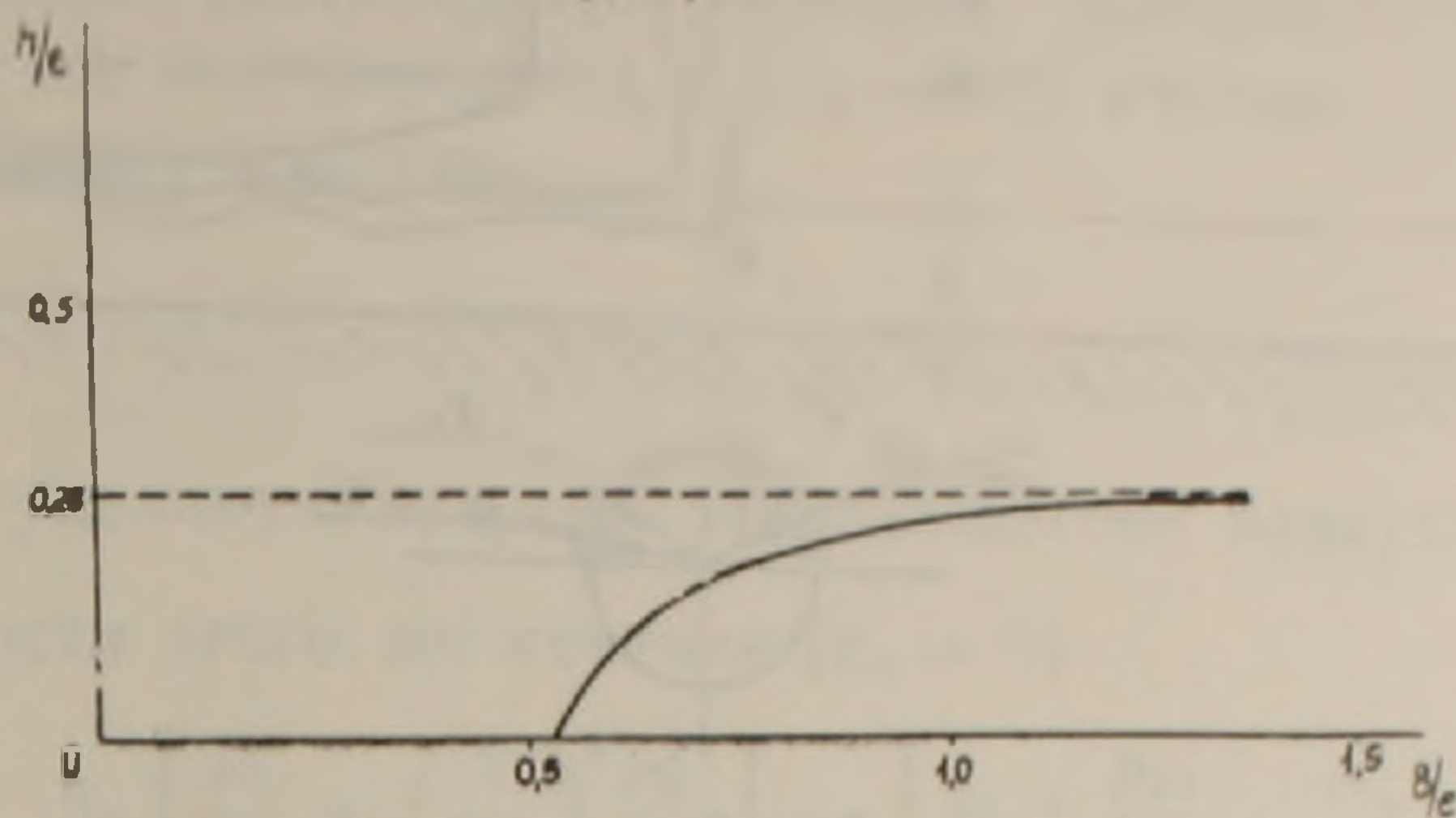
Расход жидкости, переносимой вихрями

$$Q_{\text{вихрь}} = \left(\psi_1|_{y=+\frac{B}{2}} - \psi_1|_{y=-\frac{B}{2}} \right)|_{x=l} = \frac{2,5 \Gamma h}{l}. \quad (8)$$

Устойчивость этой системы исследуем в условиях идеальной жидкости, имея в виду вывод, сделанный в (7) о неотрицательной роли диссипативных сил в устойчивости равновесия. И, так как плоское движение идеальной жидкости является потенциальным (8), за-

задачу об устойчивости вихревой системы (2) рассматриваем в плоском потенциальном потоке.

Аналогичная задача для неограниченной области решена Карманом и Н. Е. Кочиным. Следуя Кочину (⁶), получаем условие устойчивости шахматной системы вихрей в области ограниченной ширины B в виде зависимости $\frac{h}{l} = f\left(\frac{B}{l}\right)$, приведенной на фиг. 1.



Фиг. 1.

Отношение $\frac{B}{l}$ определяется по формуле Лацко (⁹):

$$\frac{l}{B} = 0,693 Re^{0,25}. \quad (9)$$

Интенсивность вихрей Γ определяем из условия равенства работы сил сопротивления в водоводе $-\gamma v_{\text{ср}} B l$, работе вихрей, совершаемой при их передвижении вдоль потока в обратном ему направлении $-\gamma Q_{\text{вихрь}} \cdot l$, откуда

$$\Gamma = \frac{B l v_{\text{ср}}}{2,5 h} = \frac{4 Q l}{5 h}. \quad (10)$$

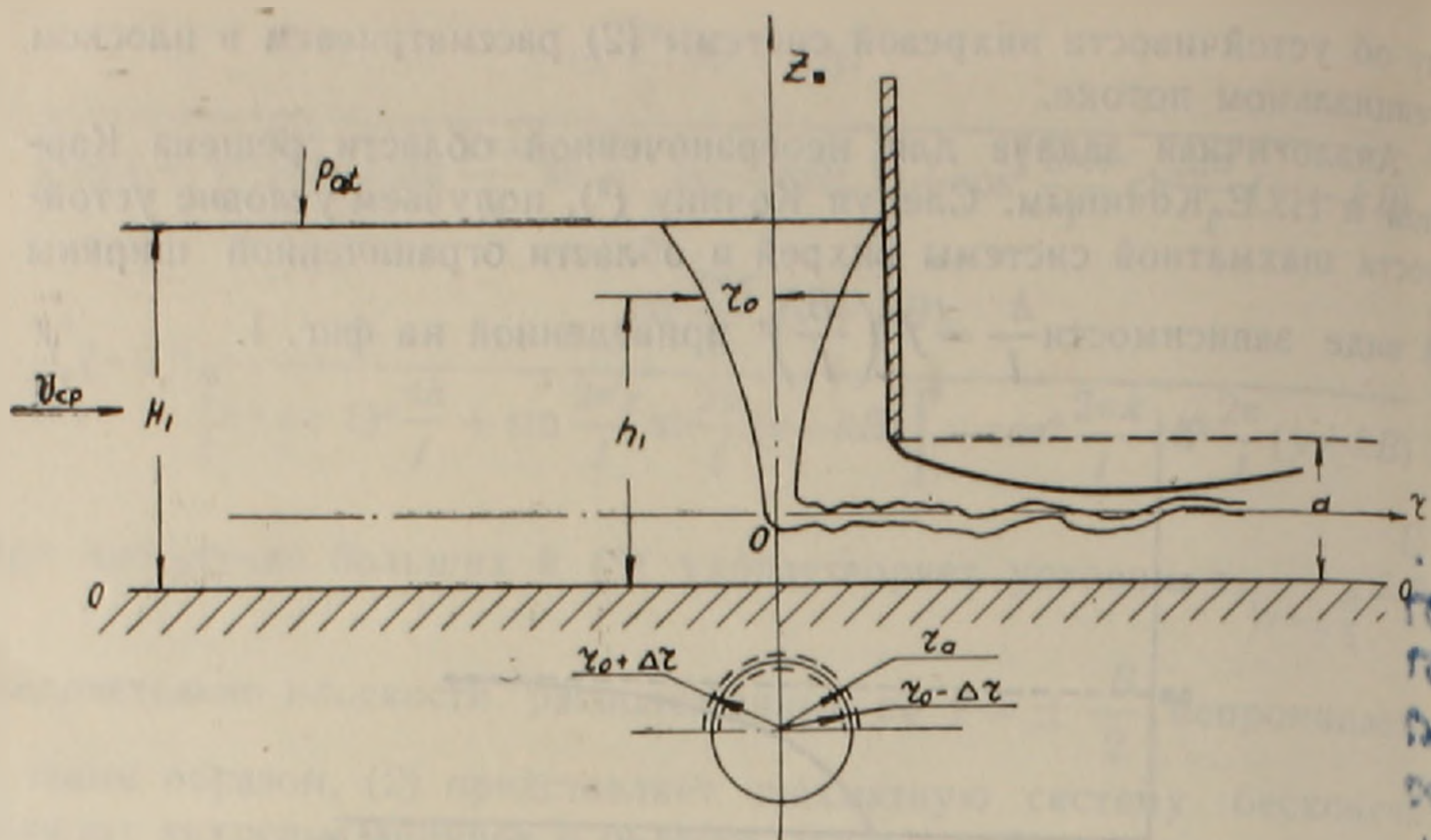
Таким образом, система шахматных вихрей, выражающая сопротивление стен водовода, определена.

Нетрудно заметить, что если частично перекрыть живое сечение водовода плоским щитом, то вихри, определенные в п. 3, будут источниками интересующего нас воронкообразования.

4. Поле скоростей жидкости в самой воронке исследовано методом пространственной киносъемки (¹⁰), а также с помощью трубки Пито (¹¹), в результате которых установлено, что воронку можно примерно изобразить прямолинейным вихревым шнуром и пространственным точечным стоком, помещенным на дне воронки в точке О (фиг. 2). Тогда, имея в виду функцию потенциала скоростей для пространственного точечного стока и бесконечного вихревого шнура, рассматриваемое поле можно представить их суммой (⁶):

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi R} + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad (11)$$

откуда составляющие скорости в цилиндрических координатах



Фиг. 2.

$$v_r = -\frac{Qr}{4\pi R^3}, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad v_{z_*} = -\frac{Qz_*}{4\pi R^3}. \quad (12)$$

Полная скорость

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Q^2}{4R^4} + \frac{\Gamma^2}{r^2}}. \quad (13)$$

Определим предельно возможное значение скорости, исходя из удельной энергии потока

$$\gamma H = \gamma \left(H_1 + \frac{p_{at}}{\gamma} + \frac{v_{ср}^2}{2g} \right) \quad (14)$$

(плоскость сравнения на дне водовода).

Учитывая потенциальность потока, уравнение Бернулли для свободной поверхности воронки ($p = p_{at}$) будет:

$$\gamma H = \gamma \left[h_1 + \frac{p_{at}}{\gamma} + \frac{1}{2g} \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{Q^2}{4R_0^4} + \frac{\Gamma^2}{r_0^2} \right) \right], \quad (15)$$

откуда радиус воронки у ее дна ($z_* = 0, h_1 = \frac{a}{2}$):

$$r_0 = \sqrt{\frac{4\Gamma^2 \pm \sqrt{16\Gamma^2 + 4bQ^2}}{2b}}, \quad (16)$$

где

$$b = 32\pi^2 g \left(H_1 - \frac{a}{2} \right). \quad (17)$$

Подставив (17) в (13), получаем предельное значение скорости жидкости в воронке

$$v_0 = \frac{1}{4\pi r_0^2} \sqrt{Q^2 + 4r_0^2 \Gamma^2}. \quad (18)$$

Заметим, что если давление во всем воздушном ядре воронки будет атмосферным, то воронка не может интенсивно всасывать воздух, как это наблюдается в действительных случаях.

С учетом потенциальности поля воронки теорема о моменте количества движения, примененная к донному сечению воронки ($z_* = 0$), дает, что момент количества движения единицы объема воды, находящейся на свободной поверхности воронки ($r = r_0$), $\rho v_0 (r_0 + \Delta r)$ равен таковому для воздуха, находящегося в ядре воронки у этой же поверхности $\rho_1 v_1 (r_0 - \Delta r)$, откуда, с точностью Δr , скорость вращения воздуха

$$v_1 = \frac{\rho}{\rho_1} v_0. \quad (19)$$

Приравнивая удельную энергию вращающегося воздуха таковой для потока жидкости этого же сечения ($z_* = 0$)

$$\gamma_1 \left[\frac{p_0}{\gamma_1} + \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} \right)^2 \frac{v_0^2}{2g} \right] = \gamma \left[H_1 + \frac{p_{at}}{\gamma} + \frac{v_{ср}^2}{2g} \right], \quad (20)$$

с учетом (18), получаем перепад давления на концах воздушной воронки

$$p_{at} - p_0 = \frac{\gamma^2}{\gamma_1} \frac{Q^2 + 4r_0^2 \Gamma^2}{64\pi^2 g r_0^4} - \gamma \left(\frac{v_{ср}^2}{2g} \right). \quad (21)$$

Пренебрегая вторым членом правой стороны (21) по сравнению с первым $\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} \approx 1000 \right)$, получаем

$$p_{at} - p_0 = \frac{\gamma^2}{\gamma} \frac{Q^2 + 4r_0^2 \Gamma^2}{64\pi^2 g r_0^4}. \quad (22)$$

Интенсивность воронки определяется, как произведение площади поперечного сечения воронки на разность давления на ее концах (22):

$$G = (p_{at} - p_0) \cdot \pi r_0^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma_1} \frac{Q^2 + 4r_0^2 \Gamma^2}{64\pi g r_0^2}. \quad (23)$$

Пример: при $B = 20$ см, $2 \cdot Q = 10$ л/сек, $H_1 = 30$ см, $a = 4$ см, $\gamma_1 = 0,2$ г/см³ (древесные опилки) по вышезложенному методу пропускная способность (интенсивность) воронки $G = 0,197$ кг/сек. По опытным данным ⁽¹²⁾, $G = 0,214$ кг/сек. Расхождение $\approx 8\%$.

Принятые обозначения:

$$z = x + iy, \quad z_1 = -\frac{l}{4} - i\frac{h}{2}, \quad z_2 = \frac{l}{4} + i\frac{h}{2},$$

$$z_{1k} = -\frac{l}{4} + i \left[kB + (-1)^{k+1} \frac{h}{2} \right], \quad \bar{z}_{1k} = -\frac{l}{4} - i \left[kB - (-1)^{k+1} \frac{h}{2} \right],$$

$$z_{2k} = \frac{l}{4} + i \left[kB + (-1)^k \frac{h}{2} \right], \quad \bar{z}_{2k} = \frac{l}{4} - i \left[kB - (-1)^k \frac{h}{2} \right]$$

— комплексные координаты вихревого поля;
 l — расстояние вихревых центров в ряду;
 h — расстояние между рядами;
 u — скорость передвижения вихревой системы;
 $\frac{\Gamma}{2\pi}$ — интенсивность вихрей;
 J — гидравлический уклон водовода;
 $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость потока в водоводе;
 $Re = \frac{v_{\text{ср}} B}{\nu}$ — число Рейнольдса, где
 B — ширина водовода;
 ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости;
 $\frac{l}{B}$ — число Струхаля;
 $\frac{Q}{4\pi}$ — интенсивность стока;
 r, θ, z_k — цилиндрические координаты;
 $R = \sqrt{r^2 + z^2}$
 $2Q$ — расход воды в водоводе;
 H_1 — глубина воды в водоводе;
 $\rho, \rho_1, \gamma, \gamma_1$ — плотности и объемные веса жидкости и воздуха;
 h_1 — расстояние от плоскости сравнения;
 p — гидродинамическое давление.

Институт органической химии
 Академии наук Армянской ССР

Ո. Մ. ԻՍԱՀԱԿՅԱՆ

Չափաքանաչափումը վահանային անցքերից ջրի արտահոսման դեպքում

Վահանային անցքերից, ինչպես նաև սիմետրիկ և ոչ սիմետրիկ դասավորության հատակային անցքերից ջրի արտահոսման ժամանակ հաճախ դիտվում են ջրապտույտների ուղղաձիգ առանցքի շուրջը, որոնց դուրսգրում են ջրի ազատ մակերևույթի անկումն ու օդի ներծծումը: Հիդրոտեխնիկայում այս երևույթն անվանում են ձաղարատաջացում:

Իրականությունում ⁽¹⁾ առաջ է քաշված ձաղարների մրրկային ծագման դադափարը: Չափումներով ^(10, 11) այն հաստատված է և ձաղարի դաշտը ներկայացված անվերջ երկար մրրկային դժի ու կետային հեղուկի միջոցով, որի համաձայն արագության չափը ⁽¹³⁾ ձաղարի հատակի կենտրոնում անվերջ է ձգտում:

Այստեղ որոշված է ջրի արագության սահմանային արժեքը ⁽¹⁸⁾ հոսանքի տեսակարար (ներգիայի չափից ելնելով)՝ Որոշված է նաև ձաղարի միջուկում օդի պտտման սահմանային արագությունը ⁽¹⁹⁾, օդավելով շարժման բանալի մոմենտի թևորհմից: Որոշված է ճնշման անկումը ձաղարի միջուկում ⁽²²⁾ և հաշված ձաղարի ծողողունակությունը ⁽²³⁾:

Անհայտ մնացած պտույտի ինտենսիվությունը որոշելու համար դիտված է հետևյալ խնդիրը՝ նկատված էր ⁽²⁾, որ սյրիզմատիկ հուններում տեղադրված վահանային անցքերից ջրի արտահոսման ժամանակ պարբերական և հակառակ նշանի ձաղարներ են առաջանում հունի ձախակողմյան և աջակողմյան պատերի մոտ: Երևույթի պարբերական բնույթը մնաց անբացահայտ:

Այստեղ ստացված է պրիզմատիկ հունների պատերի շիմադրությունը ներկայացնող մրրկային սխեմներ (2), որի շախմատային բնույթը միանգամայն հասկանալի է դարձնում վերոհիշյալ պարբերական և հակառակ նշանի ձադարների առաջացումը (2)-ի կայունության խնդրից որոշված է մրրիկների ինտենսիվությունը, ինչպես նաև, որպես մասնավոր դեպք՝ ստացված է Կարմանի մրրկային արահետի կայունության պայմանը $\left(\text{երբ } B \rightarrow \infty, \frac{h}{l} \rightarrow 0,2806 \right)$; (23)-ով հաշված ձադարի ծծողունակությունը համեմատված է փորձնական տվյալների հետ (12), որից 8% շեղում է ստացվել:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ը Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Ա. Խ. Խալպաչյան, „Известия АН АрмССР“, серия физ.-мат. естеств. и техн. наук, т. 1, № 2 (1948). ² С. М. Исаакян, Воронкообразование перед забральными стенками, канд. дисс. ЕрПИ, 1947. ³ С. М. Исаакян, А. М. Гаспарян, „Известия АН АрмССР“, серия техн. наук, т. 18, № 6 (1965). ⁴ С. М. Исаакян, „Известия АН АрмССР“, серия науки о земле т. 19, № 3, (1966). ⁵ Н. С. Шарашкина, Сб. Проблемы русловых процессов, 1955. ⁶ Н. Е. Кочин, Н. А. Кибель, И. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, т. 1, 1948. ⁷ Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, 1946, стр. 102. ⁸ В. М. Маккавеев, Гидравлика, 1940, стр. 50. ⁹ С. В. Избаш, Основы лабораторно-опытного дела, 1938. ¹⁰ С. М. Исаакян, „Известия АН АрмССР“, серия физ.-мат. естеств. и техн. наук, т. 8, № 2, 1955. ¹¹ В. С. Фокеев, Гидравлические вихревые воронки, 1959. ¹² С. М. Исаакян, „Известия АН АрмССР“, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 8, № 3 (1955).