ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLV 1967 3

МЕХАНИКА.

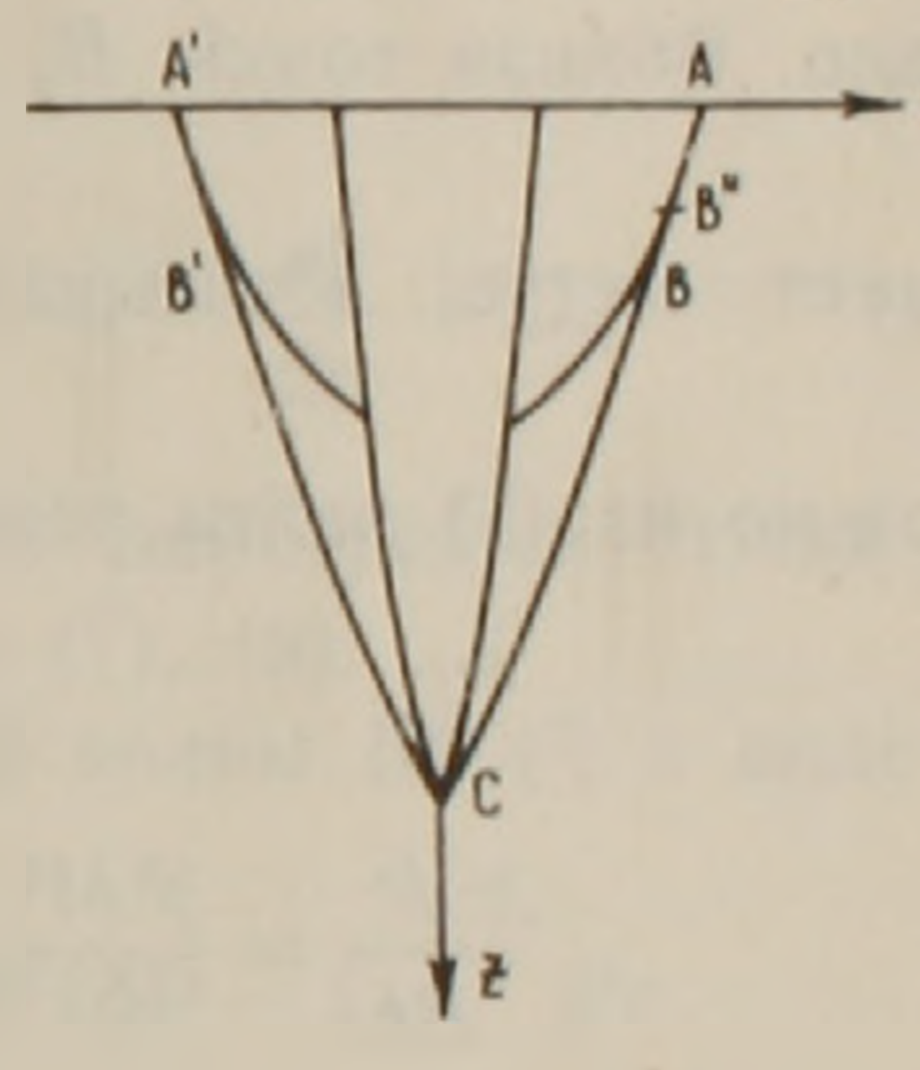
А. Г. Багдоев

Движение конуса в сжимаемой жидкости

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 21/IV 1967)

При проникании узкого конуса с углом раствора 2β в сжимаемую жидкость с постоянной сверхзвуковой скоростью V картина движения ([1]) показана на фиг. 1.

Выберем ось Or по поверхности жидкости, ось Oz — вглубь. Введем полярные координаты $r = r_1 \cos\varphi$, $z = r_1 \sin\varphi$. Тогда фронт линейной задачи AB соответствует сфере $r_1 = at$, а фронт BC — конус с уравнением $r = \dfrac{Vt - z}{\sqrt{M^2 - 1}}$, $M = \dfrac{V}{a}$, a — начальная скорость звука. В линейной постановке имеем в области ([1]) вне сферы $ABB'A'$ для давления



Фиг. 1.

$$P = \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{2} \int_{z_1}^{z_0} \frac{dx}{\sqrt{(x - z)^2 + r^2}}, \tag{1}$$

где

$$z_{0,\,2} = \frac{M^2 z - Vt \pm \sqrt{(M^2 z - Vt)^2 - (M^2 - 1) M^2 (r_1^2 - a^2 t^2)}}{M^2 - 1}. \tag{2}$$

После несложных вычислений найдем

$$P = \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{2} \ln \frac{Vt - z + \sqrt{(Vt - z)^2 - (M^2 - 1) r^2}}{Vt - z - \sqrt{(Vt - z)^2 - (M^2 - 1) r^2}}.$$

Вблизи фронта BC

$$P = \rho_0 \beta^2 V^2 \frac{\sqrt{Vt - z - \sqrt{M^2 - 1}\, r}}{\sqrt{r}\, \sqrt[4]{M^2 - 1}} \sqrt{2}, \tag{3}$$

ρ_0 — начальная плотность.

Проведя выкладки работы ([2]), получим на ударной волне BC в нелинейном случае

$$\frac{P'}{Bn} = M^6 (M^2 - 1)^{-1} \frac{3}{2} (n+1) \beta^4, \tag{4}$$

где уравнение состояния жидкости $P = B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - B$, ρ — плотность.

Внутри сферы $r_1 = at$ решение запишется ([1])

$$P = \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{2} \int_0^{z_0} \frac{dx}{\sqrt{(x-z)^2 + r^2}} - \frac{\rho_0 \beta^2 V^2}{2} \int_{z_1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x-z)^2 + r^2}} . \tag{5}$$

Вблизи линии $r_1 = at$ после несложных выкладок можно найти

$$P = \rho_0 \beta^2 V^2 \frac{t - \frac{r_1}{a}}{\frac{r_1}{a}} \frac{M^2}{1 - M^2 \sin^2 \varphi} .$$

Если в нелинейной задаче применить метод замены линейных характеристик уточненным, решение на AB будет экспоненциально мало. Вблизи точки B, где $\sin \varphi_0 = \frac{1}{M}$, полученное решение не имеет места. Учитывая порядки $\varphi - \varphi_0 = \beta^2$, $\frac{P}{Bn} = \beta^4$, $t - \frac{r_1}{a} = \beta^4$, можно из (5) найти решение вблизи точки $B \left(t - \frac{r_1}{a} > 0 \right)$:

$$\frac{P}{Bn} = \frac{\beta^2 M^3}{2} \frac{\varphi - \varphi_0 + \sqrt{(\varphi - \varphi_0)^2 + 2 \frac{y_1}{at}}}{\sqrt{M^2 - 1}} , \tag{6}$$

причем $y_1 = t - \frac{r_1}{a}$. Если в соответствии с ([3]) ввести

$$\varphi - \varphi_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2} \frac{P'}{Bn}} Y, \qquad P = P'\mu, \qquad v_{r_1} = a \frac{P'}{Bn} \mu,$$

$$r_1 = at + at \frac{n+1}{2} \frac{P'}{Bn} \delta, \qquad v_\varphi = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{P'}{Bn} \right)^{\frac{3}{2}} \nu a,$$

из (6) легко найти

$$\mu = c \left(Y + \sqrt{Y^2 - 2\delta} \right), \qquad c = \frac{1}{\sqrt{12}} , \tag{7}$$

причем $\delta < 0$. Уравнения для новых переменных запишутся в виде ([3])

$$(\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial Y} = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial Y} = \frac{\partial \nu}{\partial \delta} . \tag{8}$$

В линейном варианте μ в скобках следует отбросить.

Тогда имеем решение (8) в виде (7) и

$$\nu = c\delta - c\sqrt{Y^2 - 2\delta}\, Y - cY^2,$$

или

$$\delta = \frac{\mu Y}{c} - \frac{\mu^2}{2c^2}, \qquad \nu = -\frac{\mu^2}{2c}. \tag{9}$$

В нелинейном случае, переходя к переменным μ, Y, из (8) можно найти [3]

$$\mu - \delta + \mu \frac{\partial\delta}{\partial\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial Y}\frac{\partial\delta}{\partial\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta}{\partial Y}\right)^2 = 0$$

$$-\frac{\partial\delta}{\partial Y} = \frac{\partial\nu}{\partial\mu}. \tag{10}$$

Решение этой системы, согласно (7) и (9), можно искать в виде

$$\nu = f(\mu), \qquad \delta = -Yf'(\mu) + F(\mu),$$

причем из (10) получится $f = \frac{C_1}{2}\mu^2 + C_2$, $F = -\mu\ln\mu - \frac{1}{2}C_1^2\mu^2 + C_3\mu$,

и после сравнения с (7), (9) $C_1 = -\frac{1}{c}$,

$$\delta = \frac{\mu Y}{c} - \mu\ln\mu - \frac{\mu^2}{2c^2} + C_3\mu, \qquad \nu = -\frac{\mu^2}{2c} + C_2. \tag{11}$$

Таким образом найдено решение (11) в окрестности точки B, для больших δ и Y переходящее в линейное (7), (9).

Если записать теперь уравнение ударной волны BC [2] в виде

$$Vt - z - \sqrt{M^2 - 1}\, r = -\frac{3}{8}(n+1)^2 M^8 (M^2-1)^{-\frac{3}{2}} \beta^4 r$$

и найти точку ее пересечения с параболической линией BB' с уравнением $r_1 = at\left(1 + \frac{n+1}{2}\frac{P'}{Bn}\right)$ и по (4)

$$r_1 = at + at\frac{(n+1)^2}{2} M^8 (M^2-1)^{-1}\frac{3}{2}\beta^4,$$

можно определить вблизи B

$$\varphi_B - \varphi_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}\frac{P'}{Bn}}$$

и, переходя к переменным μ, Y, можно найти в точке B, используя еще (4) и уравнение BC $\delta = \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}$,

$$Y_B = 1, \qquad \mu_B = 1, \qquad \delta_B = 1,$$

причем отсюда и из равенства нулю касательной к фронту скорости частиц

$$v_\varphi = -\frac{P}{Bn} a(\varphi - \varphi_0), \qquad \nu = -\mu Y$$

определятся постоянные C_2, C_3 в (11) по формуле

$$C_2 = -1 + \frac{1}{2c}, \qquad C_3 = 1 - \frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2}.$$

Давление на ударной волне BB'' найдется интегрированием уравнения ([1])

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu}, \quad \frac{d\mu}{dY} = \frac{-\frac{\mu}{c} + \sqrt{2\frac{\mu Y}{c} - 2\mu \ln \mu - \frac{\mu^2}{c^2} + \mu - 2\frac{\mu}{c} + \frac{\mu}{c^2}}}{\frac{Y}{c} - \ln \mu - \frac{\mu}{c^2} - \frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2}}$$

при условиях $\mu = 1$, $Y = 1$.

Следует отметить, что решение (7) имеет место при $\delta < 0$. В случае $\delta > 0$ из (5) можно найти

$$\mu = 2c\sqrt{Y^2 - 2\delta},$$

причем решение обращается в нуль на линейной ударной волне BC с уравнением $\delta = \frac{Y^2}{2}$.

Для трансверсальной составляющей скорости v_φ $\left(\nu = \frac{\partial \Phi}{\partial Y}, \mu = \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\right)$ отсюда получится

$$\nu = -2c\sqrt{Y^2 - 2\delta}\, Y,$$

и линейное решение имеет вид

$$\delta = \frac{Y^2}{2} - \frac{\mu^2}{8c^2}, \qquad \nu = -\mu Y. \tag{12}$$

Решение нелинейной системы (10) теперь можно искать в следующем виде

$$\nu = Y f(\mu),$$

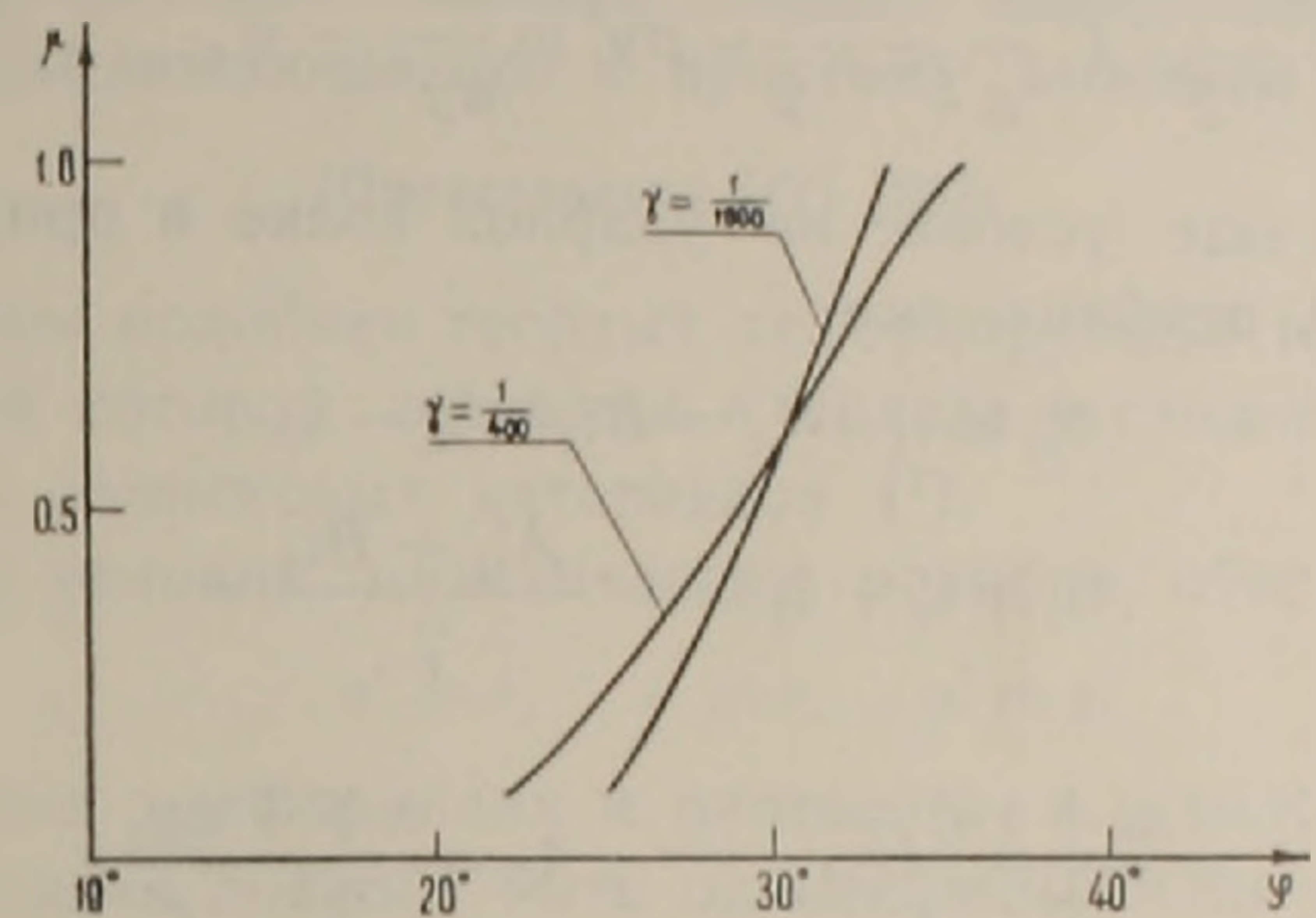
$$\delta = -\frac{Y^2}{2} f' + F(\mu),$$

причем для f и F можно найти ([3])

$$f = \frac{A^2 - B^2 - \mu^2}{A + \mu},$$

$$F = \mu - \frac{(\mu + A)^2 - B^2}{2B} \ln \frac{\mu + A - B}{\mu + A + B} + C(\mu + A)^2 - CB^2,$$

и если положить $C = -\frac{1}{8c^2}$, можно показать, что на выходе из области вблизи ударной волны, т. е. при порядках $= \frac{1}{\beta^2}$, $\gamma = \frac{1}{\beta^2}$, $\delta = \frac{1}{\beta^4}$ это решение переходит в (12). В данной статье при определении решения в окрестности ударной волны используется лишь решение (11), поскольку (12) непосредственно не прилегает к ударной волне BB''. Результаты расчетов показаны на фиг. 2, где экспоненциальное решение вблизи $\varphi = 0$ переходит в решение по формуле (11) около точки B на ударной волне.



Фиг. 2.

Условия непрерывности касательной ссставляющей скорости к BC, BB'', BB' в точке B удовлетворяются.

Следующим вопросом является установление факта наличия ударной волны впереди параболической линии BB' фиг. 1. Вблизи точки B она разделяет решения (11) и (12), причем можно показать, что в точке B разрыв равен нулю.

Для рассмотрения вопроса вдали от точки B нужно рассмотреть линейное решение вблизи BB'. Из (5) при малых $-r_1 + at$ легко найти давление позади BB'

$$P = C(\theta)\rho_0 a^2 + A(\theta)\rho_0 a^2 \frac{t - \frac{r_1}{a}}{\frac{r_1}{a}}, \qquad r_1 < at,$$

где

$$C(\theta) = \frac{\beta^2 M^2}{2} \ln\left(\frac{M-1}{M+1}\;\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right), \qquad A(\theta) = \frac{\beta^2 M^3}{M^2\sin^2\varphi - 1}.$$

Из (1) при малых $r_1 - at$ можно найти давление впереди BB'

$$P = C(\theta)\rho_0 a^2 + \rho_0 a^2 \beta(\theta) \frac{\frac{r_1}{a} - t}{\frac{r_1}{a}}, \qquad r_1 > at,$$

$$B(0) = -\frac{\beta^2 M^3}{M \sin\varphi - 1}.$$

Если теперь сделать замену линейных характеристических переменных $t - \frac{r_1}{a}$ и $\frac{r_1}{a} - t$ соответственно на y_1 и y', где $y_1 = \mathrm{const}$ и $y' = \mathrm{const}$ уравнения нелинейных характеристик в областях $r_1 < at$ и $r_1 > at$, после интегрирования уравнений характеристик можно найти

$$t = \frac{r_1}{a} - \frac{n+1}{2} C \frac{r_1}{a} - \frac{n+1}{2} A y_1 \ln \frac{r_1}{a y_1} + y_1, \qquad r_1 < at,$$

$$t = \frac{r'}{a} - \frac{n+1}{2} C \frac{r'}{a} - \frac{n+1}{2} B y' \ln \frac{r'}{a y'} - y', \qquad r' > at.$$

Используя еще условие на ударной волне и приравнивая r, r', можно получить приближенно

$$A\xi_1 \ln \xi_1 + \xi_1 = B\xi_2 \ln \xi_2 - \xi_2,$$

$$A\xi_1 \ln \xi_1 + \xi_1 = -\frac{A\xi_1 + B\xi_2}{2},$$

причем

$$\xi_1 = \frac{n+1}{2} \frac{a y_1}{r_1}, \qquad \xi_2 = \frac{n+1}{2} \frac{a y_1}{r'}.$$

Приведенное уравнение имеет решение $\xi_1 = e^{-\frac{1}{A}}$, $\xi_2 = e^{\frac{1}{B}}$ и ударная волна имеет экспоненциальный порядок малости. Вблизи точки B ударная волна разделяет решения (11) и (12), причем имеет там порядок β^4. Если полагать $A = 0$, $B = 0$, то решение (12) дает $\delta = \frac{1}{2} y^2 + 2\mu - \frac{3}{2}\mu$, что совпадает с решением вблизи BC ([2]).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Կոնի շարժումը սեղմելի հեղուկում

Դիտարկվում է բարակ կոնի շարժման խնդիրը սեղմելի կիսատարածության մեջ: Գծային լուծման ճշտման մեթոդով որոշվում է ճնշման բաշխումը հարվածային ճակատի վրա: Հաստատունները որոշվում են գծային լուծման հետ կապման մեթոդով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Багдоев*, Пространственные нестационарные движения, Ереван, 1961. [2] Общая теория аэродинамики больших скоростей, 1962, Статья Лайтхилла, Высшие приближения. [3] *А. А. Гриб, О. С. Рыжов, С. А. Христианович*, Теория коротких волн, ПМТФ, № 1, 1960, ПММ, № 5, 1958.