ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLV 1967 2

ПА-8596

МЕХАНИКА

Г. Е. Багдасарян и М. В. Белубекян

Об устойчивости цилиндрической оболочки в электромагнитном поле*

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 8/VII 1967)

Наличие скрещенных магнитного и электрического полей приводит к появлению нормальных пондермоторных сил, действующих на оболочку. Характер устойчивости проводящей оболочки в электромагнитном поле может существенно зависеть не только от пондермоторной силы, но и от температурных напряжений, обусловленных выделением джоулева тепла при прохождении тока в оболочке.

Задача решается в предположении, что до возникновения возмущений вследствие электрического тока в оболочке устанавливается определенное статическое температурное поле. Принимается также, что влиянием индуцированного электромагнитного поля можно пренебречь.

1. Пусть изотропная цилиндрическая панель постоянной толщины h отнесена к ортогональным координатам $(r, \theta\, x)$. Координатные линии θ, x совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки. Координатная линия r представляет расстояние по нормали от точки $(0, \theta, x)$ до точки (r, θ, x) оболочки.

Оболочка, изготовленная из материала с постоянной проводимостью σ, находится в электромагнитном поле. Вектор напряженности магнитного поля H направлен по оси x, а вектор напряженности электрического поля E_0 — по оси θ.

В отношении тонкой пологой оболочки считается справедливым гипотеза недеформируемых нормалей.

Уравнение теплопроводности колеблющейся в электромагнитном поле оболочки с учетом выделения джоулева тепла запишется следующим образом ([1]):

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T = q. \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность материала, c_v — удельная теплоемкость, λ — коэффициент теплопроводности, q — плотность тепловых источников, равная количеству тепла, выделяющемуся в единице объема тела в единицу времени.

Работа доложена на Всесоюзной конференции по проблемам устойчивости в строительной механике (Каунас, 1967 г.).

Для рассматриваемой задачи

$$q = E_0 j - \frac{1}{c}\left(j \times H\right) v, \tag{1.2}$$

где c — скорость света, v — вектор скорости перемещений частиц оболочки, j — плотность тока, определяемая согласно закону Ома

$$j = \sigma \left[E_0 + \frac{1}{c} (v \times H) \right]. \tag{1.3}$$

Принимая возмущения оболочки малыми и линеаризируя уравнение (1.1), с учетом (1.2) и (1.3), получим уравнение теплопроводности в следующем виде:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = \sigma E_0^2 - \frac{2\sigma E_0 H}{c} \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1.4}$$

где w — нормальное перемещение срединной поверхности оболочки.

Следуя методу, предложенному в работе ([2]), решение уравнения (1.4) представим в виде

$$T = T_0(\theta, x, t) + r\Theta(\theta, x, t). \tag{1.5}$$

Тогда уравнения устойчивости проводящей оболочки в электромагнитном поле с учетом температурных напряжений, вызванных джоулевым теплом, представляются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&D\left[\Delta\Delta w + \alpha(1+\mu)\Delta\Theta_1\right] = \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + P(\theta, x, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\
&\frac{1}{Eh}\Delta\Delta\Phi + \alpha\Delta T_1 + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\\
&\frac{\partial T_1}{\partial t} - \varkappa\Delta T_1 + \frac{2k}{c_v\rho h} T_1 = -\frac{2\sigma H E_0}{c_v\rho c}\frac{\partial w}{\partial t}\\
&\frac{\partial\Theta_1}{\partial t} - \varkappa\Delta_1\Theta + \frac{6}{c_v\rho h^2}(2\lambda + kh)\Theta_1 = 0\\
&P(\theta, x, t) = -\frac{\sigma h}{cR} H E_0 \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - \frac{\sigma h}{c^2} H^2 \frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned}\right| \tag{1.6}$$

$$T_1 = T_0 - \frac{T_+ + T_-}{2} - \frac{\sigma E_0^2 h}{2k}, \quad \Theta_1 = \Theta - \frac{k(T_+ - T_-)}{2\lambda + kh}. \tag{1.7}$$

Здесь $\Phi(\theta, x, t)$ — функция напряжений, R — радиус, E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона, α — коэффициент температурного расширения, $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость оболочки, $\varkappa = \lambda/c_v\rho$ — коэффициент температуропроводности, k — коэффициент теплоотдачи поверхности оболочки, T_+ и T_- — температуры среды на внешней и внутренней поверхностях оболочки соответственно.

До возникновения возмущений в оболочке, вследствие прохождения электрического тока и разности температур на поверхностях, устанавливается статическое температурное поле с температурой срединной поверхности $(T_+ + T_-)/2 + \sigma E_0^2 h/2k$ и с температурным градиентом в направлении нормали к срединной поверхности $k(T_+ - T_-)$: $:(2\lambda + kh)$. Предполагается, что в дальнейшем (после возникновения возмущений) указанное температурное поле на краях оболочки поддерживается неизменным. Тогда из (1.7) видно, что T_1 и Θ_1 должны удовлетворять следующим граничным условиям

$$T_1|_\Gamma = 0, \qquad \Theta_1|_\Gamma = 0, \tag{1.8}$$

где Γ — контур срединной поверхности оболочки.

Из четвертого уравнения системы (1.6) и второго условия (1.8) следует, что $\Theta = 0$.

2. Рассмотрим прямоугольную в плане шарнирно опертую оболочку, находящуюся в стационарном электромагнитном поле. В этом случае решения системы уравнений (1.6) с учетом первого условия (1.8), представляются в виде

$$\left.\begin{aligned} \omega &= e^{i\omega t}\sum\sum A_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n R\theta, \\ \Phi &= e^{i\omega t}\sum\sum B_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n R\theta, \\ T_1 &= e^{i\omega t}\sum\sum C_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n R\theta \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где ω — частота колебаний, $\lambda_m = m\pi/a$, $\mu_n = n\pi/b$, a и b — длины соответствующих сторон панели.

Подставляя (2.1) в систему (1.6) и учитывая (1.5) и (1.7), получим выражение, определяющее температурное поле, а также характеристическое уравнение для определения частоты колебаний оболочки

$$T = \frac{T_+ + T_-}{2} + \frac{\sigma E_0^2 h}{2k} + \frac{k(T_+ - T_-)}{2\lambda + kh}r -$$

$$- \frac{2\sigma H E_0}{c_v \rho c} e^{i\omega t}\sum\sum \frac{i\omega A_{mn}}{i\omega + \chi(\lambda_m^2 + \mu_n^2) + 2k/c_v\rho h}\sin\lambda_m x\sin\mu_n R\theta \tag{2.2}$$

$$i\omega^3 + \left(\frac{\sigma H^2}{c^2\rho} + a_1\right)\omega^2 - \left(\Omega^2 + \frac{\sigma H^2}{c^2\rho}a_1 - \frac{\sigma R H E_0}{\rho c}a_2\right)i\omega -$$

$$- \left(\Omega^2 - \frac{\sigma R H E_0}{\rho c}\mu_n^2\right)a_1 = 0, \tag{2.3}$$

где

$$a_1 = \frac{2k}{c_v\rho h} + \chi(\lambda_m^2 + \mu_n^2),$$

$$a_2 = \mu_n^2 + \frac{2\alpha E}{R^2\rho c_v}\,\frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2 + \lambda_m^2},$$

$$\Omega^2 = \frac{D}{\rho h}\left[(\lambda_m^2 + \mu_m^2)^2 + \frac{12(1-\mu^2)}{R^2h^2} \frac{\lambda_m^4}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}\right].$$

Согласно теореме Гурвица, для уравнения (2.3) условиями устойчивости оболочки будут

$$\Omega^2 - \frac{\sigma RHE_0}{\rho c} \mu_n^2 > 0,$$

$$\Omega^2 + \frac{\sigma H^2}{c^2\rho} a_1 - \frac{\sigma RHE_0}{\rho c} a_2 > 0, \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\sigma H^2}{c^2\rho} + a_1\right)\left(\Omega^2 + \frac{\sigma H^2}{c^2\rho} a_1 - \frac{\sigma RHE_0}{\rho c} a_2\right) - \left(\Omega^2 - \frac{\sigma RHE_0}{\rho c} \mu_n^2\right) a_1 > 0.$$

Из (2.4) видно, что второе условие является следствием первого и третьего условий.

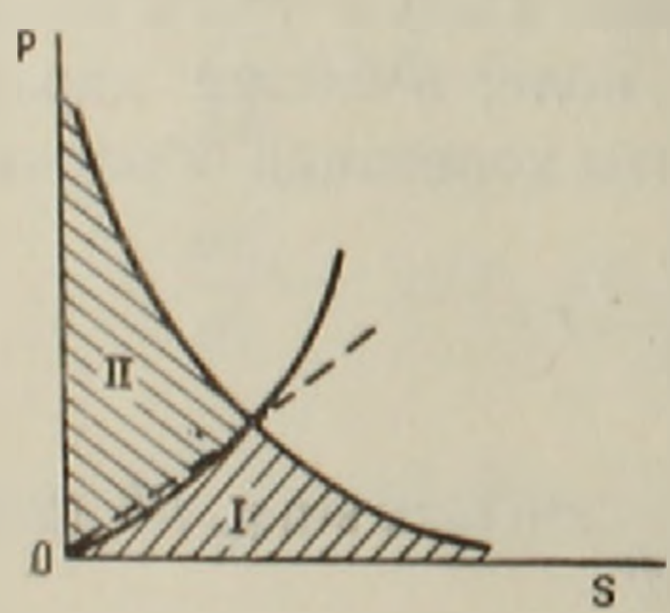
Введя безразмерные параметры, характеризующие напряженности электрического и магнитного полей,

$$s = \frac{H}{c\sqrt{\rho}}, \qquad p = \frac{E_0}{c\sqrt{\rho}},$$

согласно (2.4), получим, что область устойчивости оболочки ограничена на плоскости (s, p) кривыми

$$p < \frac{\Omega^2}{Rc\sigma\mu_n^2} \frac{1}{s}, \qquad p < \frac{(\sigma a_1 s^2 + \Omega^2 + a_1^2)\, s}{Rc\,[\sigma a_2 s^2 + a_1(a_2 - \mu_n^2)]}. \tag{2.5}$$

На фиг. 1 согласно (2.5) приводятся характерные кривые, разделяющие плоскость (s, p) на три части. Область I является областью устойчивости, а остальные две являются областями неустойчивости. В случае, когда не учитываются температурные напряжения, вместе с областью I и область II становится областью устойчивости. Таким образом, учет температурных напряжений, вызванных выделением джоулева тепла, может существенно уменьшить область устойчивости оболочки.



Фиг. 1.

Если задачу решить при условии, что в уравнении теплопроводности пренебрегается член $\partial T/\partial t$, то вместо второй кривой из (2.5) получим прямую, которая на фиг. 1 показана пунктирной линией. Из фиг. 1 видно, что пренебрежение указанным членом приводит к увеличению области устойчивости, которое обычно оказывается незначительным.

3. Предполагается, что магнитное поле является нестационарным и изменяется по закону

$$H(t) = H_0(1 + \delta\cos\beta t) \qquad |\delta| \ll 1. \tag{3.1}$$

В этом случае решение системы (1.6) представим в виде

$$w = \sum\sum f_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n R\theta,$$

$$\Phi = \sum\sum \varphi_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n R\theta, \tag{3.2}$$

$$T_1 = \sum\sum \psi_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n R\theta.$$

Подставляя (3.2) в систему (1.6) и пренебрегая членом $\partial T_1/\partial t$, после некоторых преобразований для определения стрелы прогиба оболочки $f_{mn}(t)$ получим следующее уравнение:

$$f''_{mn} + \frac{\sigma H(t)}{\rho c^2}[H(t) - a_T E_0] f'_{mn} + \left[\Omega^2 - \frac{\sigma E_0 R}{\rho c} \mu_n^2 H(t)\right] f_{mn} = 0,$$

$$a_T = \frac{2\alpha E E_0 h c}{R[2k + h\lambda(\lambda_m^2 + \mu_n^2)]} \frac{\lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \mu_n^2}. \tag{3.3}$$

Исключая член с первой производной с помощью подстановки

$$f_{mn} = F_{mn}(t) \exp\left\{-\frac{\sigma}{2\rho c^2}\int H(t)[H(t) - a_T E_0]\, dt\right\} \tag{3.4}$$

и имея в виду (3.1), уравнение (3.3) приведем к виду

$$F''_{mn} + (\Omega_1^2 - 2q \cos 2\tau) F_{mn} = 0, \tag{3.5}$$

где

$$\Omega_1^2 = \frac{4}{\beta^2}\left[\Omega^2 - \frac{\sigma E_0 H_0 R}{\rho c} \mu_n^2 - \left(\frac{\sigma H_0}{\rho c^2}\right)^2 (H_0 - a_T E_0)^2\right],$$

$$q = \frac{2\delta H_0}{\beta^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \qquad b_1 = \beta \frac{\sigma}{\rho c^2}\left(H_0 - \frac{1}{2} a_T E_0\right),$$

$$b_2 = \frac{\sigma E_0 R}{\rho c} \mu_n^2 + \frac{1}{\beta} \frac{\sigma H_0}{\rho c^2} b_1 (H_0 - a_T E_0),$$

$$2\tau = \beta t + \gamma, \qquad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{b_1}{b_2}.$$

Уравнение (3.5) относится к классу уравнений Матье и имеет решение с периодом π типа ([3])

$$F_{mn} = e^{\mu_1 \tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k} e^{2ki\tau} \tag{3.6}$$

и решение с периодом 2π типа

$$F_{mn} = e^{\mu_2 \tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k+1} e^{(2k+1)i\tau}. \tag{3.7}$$

Подстановка (3.6) и (3,7) в уравнение (3.5) приводит к следующим двум системам линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_{2k} и c_{2k+1}

$$c_{2k} + a_{2k}(c_{2k+2} + c_{2k-2}) = 0, \tag{3.8}$$

$$c_{2k+1} + a_{2k+1}(c_{2k+3} + c_{2k-1}) = 0, \tag{3.9}$$

$$(k = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots),$$

где

$$a_{2k} = q \,|\, |(2k - i\mu_1)^2 - \Omega_1^2|,$$

$$a_{2k+1} = q \,|\, |2k + 1 - i\mu_2)^2 - \Omega_1^2|.$$

Из условий существования нетривиальных решений систем (3.8) и (3.9) для определения характеристических показателей μ_1 и μ_2 получаются следующие уравнения:

$$ch\,\mu_1\pi = 1 - 2\Delta_1(0)\sin^2\frac{\pi\Omega_1}{2},$$

$$ch\,\mu_2\pi = 1 - 2\Delta_2(0)\cos^2\frac{\pi\Omega_1}{2}.$$

Здесь $\Delta_1(0)$ и $\Delta_2(0)$ — значения определителей Хилла для систем (3.8) и (3.9) при $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Согласно (3.6) и (3.7) из (3.4) получается следующее уравнение относительно частоты изменения магнитного поля β

$$ch\left[\frac{\pi}{\beta}\frac{\sigma H_0}{\rho c}(H_0 - a_T E_0)\right] = 1 - \Delta_l(0)\,[1 + (-1)^l \cos\pi\Omega_1] \quad (l = 1,2),$$

определяющее области динамической устойчивости оболочки.

Институт математики и
механики Академии наук
Армянской ССР

Գ. Ն. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ և Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

Էլեկտրամագնիսական դաշտում գլանային թաղանթի կայունության մասին

Խաչվող էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի առկայությունը բերում է թաղանթի վրա ազդող նորմալ մասնակցային ուժերի առաջացմանը։

Հաղորդիչ թաղանթի կայունությունը էապես կախված է ոչ միայն այդ մասնակցային ուժերից, այլև ջերմային լարումներից, որոնք պայմանավորված են թաղանթով անցնող էլեկտրական հոսանքի հետևանքով անջատվող ջոուլյան ջերմությամբ։

Խնդիրը լուծվում է այն ենթադրությամբ, որ միևնույն գրգռումների առաջացումը թաղանթում էլեկտրական հոսանքի հետևանքով ստեղծվում է որոշակի ստատիկ ջերմային դաշտ, որը հնարավորություն է տալիս թաղանթի եզրերում պահպանվում է անփոփոխ ջերմաստանձգականության հավասարումները լուծվում են Վ. Վ. Բոլոտինի կողմից առաջադրված մեթոդով։

Որոշված են էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի ինտենսիվությունների կրիտիկական արժեքները, որոնց դեպքում թաղանթը կորցնում է կայունությունը։ Ցույց է տրված, որ ջոուլյան ջերմության հաշվի առնելը բերում է թաղանթի կայունության տիրույթի էական փոքրացմանը։

Ուսումնասիրված է ժամանակի ընթացքում հարմոնիկ օրենքով փոփոխվող էլեկտրամագնիսական դաշտի ազդեցության տակ գտնվող թաղանթի դինամիկ կայունությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957. [2] *В. В. Болотин*, ПММ, XXIV, вып. 2 (1960). [3] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон*, Курс современного анализа, т. II, Физматгиз, М., 1963.