ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIV 1967 5

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

А. Г. Назаров, академик АН Армянской ССР

Колебания упругой системы с одной степенью свободы при землетрясении с учетом скачкообразного изменения ее жесткости

(Представлено 18/V 1967)

Рассматриваются упругие системы с одной степенью свободы, обладающие следующим свойством. При достижении определенной деформации имеет место мгновенное частичное хрупкое разрушение связи, после чего система остается упругой, но при меньшей жесткости.

Рассмотрим сначала, для пояснения постановки задачи, свободные незатухающие колебания такой системы. В этом случае имеет место закон сохранения энергии, т. е.

$$\Pi + T = \mathrm{const}, \tag{1}$$

где П — потенциальная энергия системы, а Т — кинетическая энергия.

Сообщим этой системе возмущение. В результате она придет в движение, и, скажем, по достижении ею отклоненного положения $y=a$ в момент $t=t_1$ будет иметь место хрупкое разрушение связи. В результате, из-за мгновенного уменьшения жесткости системы, потенциальная энергия ее уменьшается. Закон сохранения энергии требует, чтобы соответственно кинетическая энергия мгновенно возросла, т. е. масса системы должна мгновенно получить положительное приращение скорости Δv.

Таким образом при мгновенном хрупком разрушении некоторых элементов системы последняя испытывает удар. Закон движения после хрупкого отключения связи нетрудно установить при знании изменившейся жесткости системы и начальных условий: $t=t_1+\Delta t$, $\Delta t\to 0$;

$$y(t)=y(t_1) \text{ и } y'(t)=y'(t_1)+\Delta v.$$

Значение Δv определяется из уравнения (1).
Аналогичное явление имеет место и при землетрясении. Однако оно усложняется из-за неприменимости закона сохранения энергии, так как при землетрясении система неконсервативна.

Рассмотрим уравнение колебаний при землетрясении

$$-cy - m(y + y_0)'' = 0,$$

где $y(t)$ — закон относительного перемещения массы системы, а $y_0(t)$ — закон колебания почвы; c — жесткость и m — масса.

Умножим оба члена этого уравнения на $dy = y'dt$ и проинтегрируем от нуля до t. После небольшого преобразования получим:

$$-c\int_0^t ydy - m\int_0^t (y'' + y_0'')\cdot(y' + y_0')^2 dt + m\int_0^t (y'' + y_0'')y_0'dt = 0.$$

Произведя интегрирование, найдем:

$$\frac{1}{2}cy^2 + \frac{1}{2}m(y' + y_0')^2 = m\int_0^t (y + y_0)''y_0'dt. \tag{2}$$

Здесь первые два члена левой части уравнения представляют соответственно потенциальную и кинетическую энергии. В правой части мы получили работу сейсмических сил, действующих на массу от начала землетрясения до момента t.

Уравнение (2) послужит основой для установления скачка скорости Δv массы m при мгновенном хрупком отключении связи. Положим, что в момент времени $t = t_1$ прогиб системы достиг величины $y(t_1) = a$ и произошло частичное хрупкое отключение связи, причем жесткость c приняла значение c_1, $(c_1 < c)$. В момент времени t_1 уравнение (2) имеет вид:

$$\frac{1}{2}cy^2(t_1) + \frac{1}{2}m[y'(t_1) + y_0'(t_1)]^2 = m\int_0^{t_1}[y''(t) + y_0''(t)]\,y_0'(t)dt. \tag{3}$$

В момент времени $t = t_1 + \Delta t$, где Δt как угодно мало, должно быть

$$\frac{1}{2}c_1y^2(t_1 + \Delta t) + \frac{1}{2}m[y'(t_1 + \Delta t) + y_0'(t_1 + \Delta t)]^2 =$$

$$= m\int_0^{t_1+\Delta t}[y''(t) + y_0''(t)]\,(y_0'(t)\,dt. \tag{4}$$

Смещение массы m непрерывно, поэтому следует принять

$$\lim_{\Delta t \to 0} y^2(t_1 + \Delta t) = y^2(t_1). \tag{5}$$

Скорость смещения почвы в момент $t = t_1$ также принимаем непрерывной. Поэтому должно быть также

$$\lim_{\Delta t \to 0} y_0'(t_1 + \Delta t) = y_0'(t_1). \tag{6}$$

Наконец, по условию должен быть скачок в скорости перемещения массы в момент $t = t_1$. Поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} y'(t_1 + \Delta t) = y'(t_1) + \Delta v. \tag{7}$$

Подставляя (5), (6) и (7) в (4), найдем:

$$\frac{1}{2} c_1 y^2(t_1) + \frac{1}{2} m [y'(t_1) + y_0'(t_1) + \Delta v]^2 =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} m \int_0^{t_1 + \Delta t} [y''(t) + y_0''(t)] \, y_0'(t) \, dt. \tag{8}$$

Вычитая почленно из (3), (8) и приняв:

$$c - c_1 = \Delta c,$$

получим после некоторых сокращений:

$$\frac{1}{2} \Delta c y^2(t_1) - \frac{1}{2} m \Delta v^2 - m (y'(t_1) + y_0'(t_1)) \Delta v =$$

$$= - \lim_{\Delta t \to 0} m \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} [y''(t) + y_0'(t)] \, y_0'(t) \, dt. \tag{9}$$

Интегральное выражение при устремлении Δt к нулю будет в данном случае отлично от нуля из-за скачка в скорости, который влечет за собою бесконечно большое значение $y''(t)$ в окрестности точки $t = t_1$, так как под интегралом находится δ-функция. Поскольку $y_0'(t)$ по условию непрерывно, то должно быть:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} y''(t) y_0'(t) \, dt = y_0'(t_1) \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} y''(t) \, dt = \Delta v \cdot y_0'(t_1).$$

Второй член интеграла (9) в пределе равен нулю. Поэтому выражение (9) перепишется следующим образом:

$$\frac{1}{2} \Delta c y^2(t_1) - \frac{1}{2} m \Delta v^2 - m \Delta v y'(t_1) = 0.$$

Окончательно получаем квадратное уравнение

$$\Delta v^2 + 2y'(t_1) \Delta v - \frac{\Delta c}{m} y^2(t_1) = 0.$$

Отсюда:

$$\Delta v = y'(t_1) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\Delta c}{m} \frac{y^2(t_1)}{y'^2(t_1)}} \right]. \tag{10}$$

Здесь принято то решение, при котором $\Delta v > 0$ и $y'(t_1) > 0$. Эти условия должны быть соблюдены по смыслу задачи.

Если

$$\frac{\Delta c}{m}\frac{y^2(t_1)}{y'^2(t_1)}$$

достаточно мало, то приближенно можно принять:

$$\Delta v = \frac{\Delta c}{2}\,\frac{y^2(t)}{my'(t_1)}\,.$$

Выражение

$$\frac{\Delta c y^2(t_1)}{2} = \Delta \Pi$$

представляет собою потерю потенциальной энергии при мгновенном развитии трещины. Учитывая, что

$$J = my'(t_1)$$

есть импульс силы в момент $t = t_1$, получим окончательно следующее простое выражение для малых $\dfrac{\Delta v}{y'(t_1)}$:

$$\Delta v = \frac{\Delta \Pi}{J}\,. \tag{11}$$

Полученный вывод сохраняет свою силу и при учете неупругого сопротивления. Если после возникновения трещины даже изменится закон рассеяния энергии, никаких особенностей не появится, поскольку все известные теории поглощения энергии в строительных конструкциях связаны со смещением или со скоростью движения массы.

В этом можно непосредственно убедиться, рассмотрев дополнительно работу сил неупругого сопротивления, на основе существующих гипотез. Поэтому рассматриваемую задачу окончательно формулируем следующим образом.

Сооружение, представляющее собою систему с одной степенью свободы, колеблется по закону

$$y'' + 2ny' + k^2y = -y_0''$$

при начальных условиях: $t = 0$, $y = 0$, $y' = 0$.

Пусть при отклоненном положении $y(t_1) = a$ произошло частичное хрупкое отключение связи. Тогда уравнение колебаний при $t > t_1$ примет вид

$$y_1'' + 2n_1y_1' + k_1^2\,y_1 = -y_0'',$$

при начальных условиях:

$$y_1(t_1) = y(t_1),$$

$$y_1'(t_1) = y'(t_1) + \Delta v,$$

где Δv удовлетворяет условию (10) или (11).

Задача полностью определена. Характерно, что при мгновенном включении пластического шарнира конструкция получает мгновенное приращение ускорения ([1]). Таким образом при мгновенном хрупком отключении связи имеет место сейсмический удар, а при мгновенном включении пластического шарнира имеет место сейсмический толчок ([2]).

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս

Մեկ ազատության աստիճան ունեցող առաձգական սիստեմի տատանումները երկրաշարժի ժամանակ նրա կոշտության թռիչքաձև փոփոխման հաշվառումով

Հոդվածում դիտարկվում է մեկ ազատության աստիճան ունեցող առաձգական սիստեմի տատանումները, որը օժտված է այնպիսի հատկությամբ, երբ նրա որոշակի դեֆորմացիա ստանալուց հետո տեղի ունի կապերի ակնթարթային մասնակի, փխրուն քայքայում և որից հետո սիստեմը մնում է առաձգական բայց ավելի փոքր կոշտությամբ։

Պարզության համար սկզբում դիտարկվում է սիստեմի ազատ չմարող տատանումները և օգտվելով էներգիայի պահպանման օրենքից ցույց է տրվում, որ այդ դեպքում սիստեմը ստանում է արագության դրական ակնթարթային փոփոխություն, այսինքն տեղի ունի հարվածի երևույթ։ Արագության փոփոխությունը որոշվում է (1) բանաձևով։

Այնուհետև ուսումնասիրվում է ստիպողական տատանումների դեպքը (երբ սիստեմը գտնվում է սեյսմիկ ուժի ազդեցության տակ)։ Ապացուցվում է, որ այս դեպքում նույնպես տեղի ունի նման երևույթ։ Ձևափոխելով սիստեմի շարժման հավասարումը ստացված է (2) արտահայտությունը, որը հիմք է հանդիսանում կապերի մասնակի անջատման դեպքում արագության փոփոխության որոշման համար։ Ելնելով խնդրի դրվածքից բացված է (11) պարզ հավասարումը։ Նշված արդյունքները ճիշտ են նաև այն դեպքում, երբ սիստեմը օժտված է ոչ առաձգական դիմադրությամբ։

Ցույց է տրվում, որ նմանօրինակ երևույթ տեղի ունի նաև, երբ սիստեմում առաջանում է պլաստիկ հոդակապ։

Հոդվածի վերջում ապացուցվում է, որ սիստեմի կապերի փխրուն անջատման ժամանակ տեղի ունի սեյսմիկ հարվածի երևույթ, իսկ պլաստիկ հոդակապերի առաջացումը բերում է սեյսմիկ հրման երևույթ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *П. М. Рабинович*, Сб. Исследования по динамике сооружений, Стройиздат, М., 1947.
2 *А. Г. Назаров*, Метод инженерного анализа сейсмических сил, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1949.