ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIV 1967 5

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

Новое доказательство полноты одной системы обобщенных собственных функций, порожденной уравнением колебания струны

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 17/IV 1967)

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения колебания струны

$$(1+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(1-\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

$$u/\partial\Omega=0, \tag{2}$$

в „допустимой" области Ω с границей $\partial\Omega$. Как и в работе [1], область Ω считается „допустимой", если любая прямая пересекает ее сколь угодно гладкую и гомеоморфную окружности границу $\partial\Omega$ не более, чем в двух точках.

В работах [1,2] указана общая методика, позволяющая редуцировать задачу исследования полноты заданной совокупности собственных функционалов к значительно более простой задаче, отысканию всех обобщенных решений (собственных функционалов) уравнения (1) при отдельных фиксированных значениях параметра λ.

В этих работах, в частности, установлен следующий результат:

1) если значение параметра λ эргодическое, то однородная краевая задача (1), (2) имеет только нулевое решение в классе функций, имеющих односторонние предельные значения. (Единственность);

2) если значение параметра λ неэргодическое, то существует полная система собственных функционалов, изоморфных функциям, принадлежащим $L_2(\Omega)$. (Полнота).

Вместе с тем указана методика, которая позволяет построить систему обобщенных собственных функций однородной краевой задачи (1), (2), принимающих лишь три значения, которые полны в классе произвольных кусочно-непрерывных функций в чебышевской метрике. (Определения эргодических и неэргодических значений параметра λ [1,3]).

Однако вопрос о том, что эта система собственных функций полна или нет в классе $L_2(\Omega)$, до сих пор остается открытым. Он решается положительно путем построения так называемого „порождающего множества", введенного и изученного в работах [1,3] для специальных неэргодических значений параметра λ, когда „порождающее множество" состоит лишь из одной дуги.

В настоящей заметке предлагается новая методика доказательства полноты упомянутой системы кусочно-постоянных обобщенных собственных функций однородной краевой задачи (1), (2) в классе функций $L_2(\Omega)$, для этих специальных неэргодических значений параметра.

Очень возможно, что некоторая модификация этой методики позволит решить упомянутую выше задачу о полноте для произвольных неэргодических значений параметра.

Предварительно докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма. *Если $u(x, y)$—обобщенная собственная функция краевой задачи* (1), (2) *с собственным значением λ и $u(x, y) \in L_2(\Omega)$, то*

$$u(x, y) = F(y - \mu x) + G(y + \mu x), \quad \mu = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}},$$

где $F(t)$ и $G(z)$—интегрируемые с квадратом функции, в соответствующих промежутках t и z и $u(x, y)$ обращается в нуль почти везде на $\partial\Omega$.

Доказательство. Согласно лемме Р. А. Александряна [1], обобщенная собственная функция $u(x, y)$ однородной краевой задачи (1), (2), принадлежащая классу суммируемых функций $L(\Omega)$, имеет вид

$$u(x, y) = F(y - \mu x) + G(y + \mu x), \quad \mu = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}},$$

где F и G—суммируемые функции, а $u(x, y)$ обращается в нуль почти везде на $\partial\Omega$. Из условия леммы имеем

$$\iint_{\Omega} \{F(y - \mu x) + G(y + \mu x)\}^2 \, dx dy < + \infty.$$

В последнем интеграле, делая замену переменных

$$t = y - \mu x,$$
$$z = y + \mu x$$

и используя известную теорему Фубини [4], мы получим и последнее утверждение сформулированной леммы.

Для дальнейшего нам необходимо напомнить некоторые обозначения из [5].

$S_\lambda^{(\pm)}$ — означают автоморфизмы, сопоставляющие каждой точке $\theta \in \partial\Omega$ точку пересечения с границей $\partial\Omega$ характеристик соответственно первого ($y - \mu x = \text{const}$) и второго ($y + \mu x = \text{const}$) семейства уравнения (1), проходящей через θ.

S_λ— определяется как произведение: $S_\lambda = S_\lambda^{(-)} S_\lambda^{(+)}$.

Через $A_r(\lambda, \partial\Omega)$ обозначается совокупность точек $\theta \in \partial\Omega$, периодических относительно S_λ с периодом r, т. е. таких, что $S_\lambda^r \theta = \theta$, между тем как $S_\lambda^p \theta \neq \theta$ при $p < r$.

Через $u(x, y; \lambda, \theta)$ обозначается построенная Р. А. Александряном ([1, 5]) кусочно-постоянная, принимающая лишь три значения обобщенная собственная функция задачи (1), (2), соответствующая собственному значению λ и точке $\theta \in A(\lambda, \partial\Omega)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если при заданном значении параметра λ $A(\lambda, \partial\Omega) = \partial\Omega$, то система кусочно-постоянных собственных функций $u(x, y; \lambda, \theta)$, $\theta \in A(\lambda, \partial\Omega)$ полна в классе всех обобщенных собственных функций однородной краевой задачи* (1), (2), *соответствующих собственному значению λ и принадлежащих $L_2(\Omega)$.*

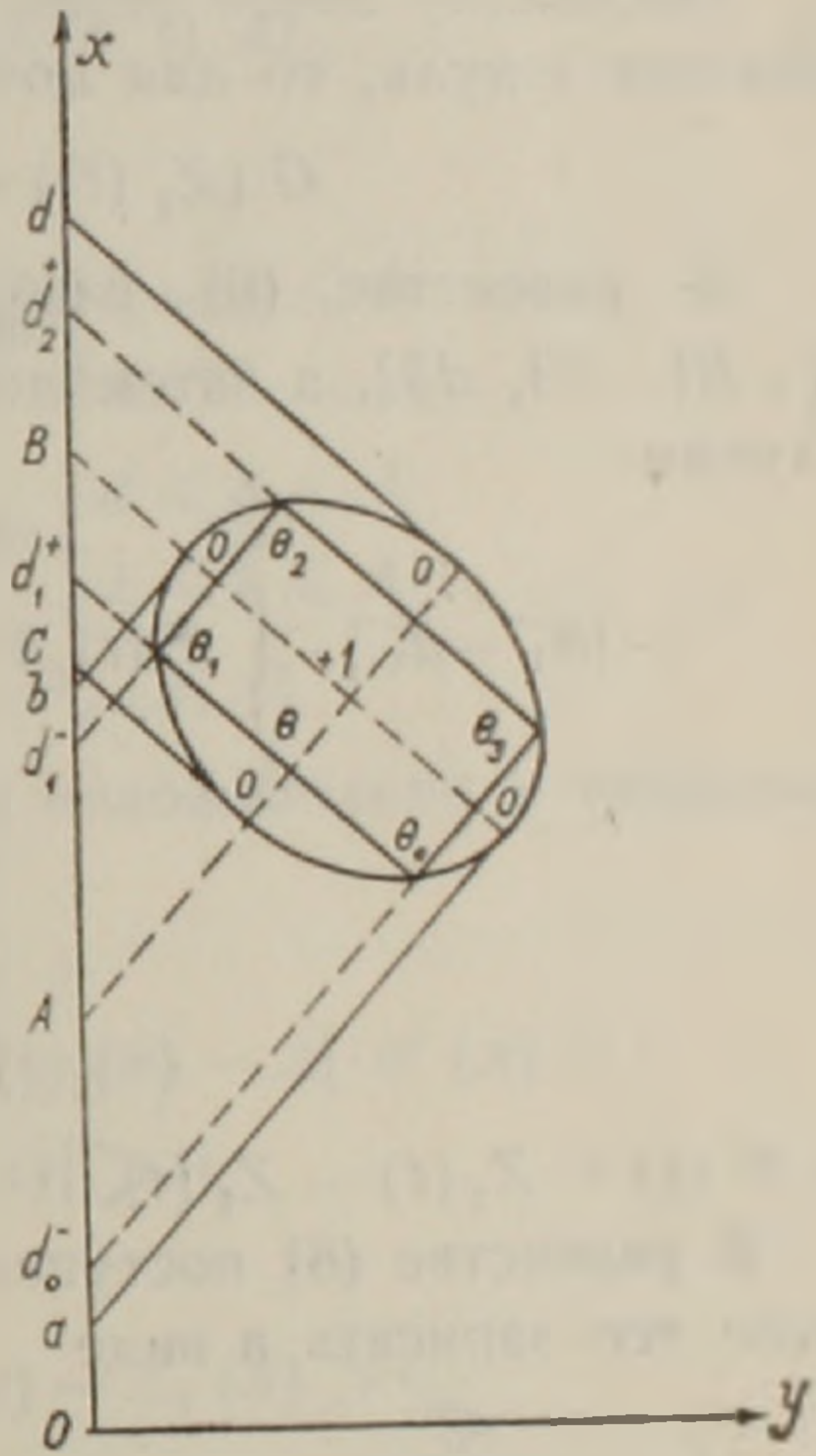
Доказательство. Докажем теорему при $r = 2$, т. е. когда период автоморфизма S_λ равняется двум. Случай произвольных r доказывается аналогично.

При $r = 2$ кусочно-постоянные собственные функции $u(x, y; \lambda, \theta)$ имеют вид, изображенный на фиг. 1, т. е.

$$u(x, y; \lambda, \theta) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in \Omega + \partial\Omega - \Omega_1, \\ +1 & (x, y) \in \Omega_1, \end{cases} \tag{3}$$

где Ω_1 есть параллелограмм

$$\left\| \begin{array}{l} d_0^- \leqslant y - \mu x \leqslant d_1^- \\ d_1^+ \leqslant y + \mu x \leqslant d_2^+ \end{array} \right\|.$$



Фиг. 1.

Пусть $u(x, y)$—произвольная обобщенная собственная функция однородной краевой задачи (1), (2), соответствующая собственному значению λ и принадлежащая $L_2(\Omega)$. Тогда, согласно вышедоказанной лемме,

$$u(x, y) = F(y - \mu x) + G(y + \mu x), \tag{4}$$

где $F \in L_2(a, b)$, $G \in L_2(c, d)$.

Пусть, далее, $u(x, y)$ ортогональна системе собственных функций $u(x, y; \lambda, \theta)$, $\theta \in A(\lambda, \partial\Omega) = \partial\Omega$, т. е.

$$\iint_\Omega u(x, y) \cdot u(x, y; \lambda, \theta)\, dxdy = 0, \tag{5}$$

для всех $\theta \in \partial\Omega$.

Теорема будет доказана, если мы покажем, что из сделанных предположений следует $u(x, y) \equiv 0$ в $L_2(\Omega)$.

Из (3), (4) и (5) имеем

$$\iint_{\Omega_1} [F(y - \mu x) + G(y + \mu x)]\, dxdy = 0.$$

Последнее равенство после замены переменных

$$y - \mu x = t,$$
$$y + \mu x = z,$$

можно переписать в виде

$$\int_{d_0^-}^{d_1^-}\int_{d_1^+}^{d_2^+} [F(t)+G(z)]\,dtdz = [d_2^+ - d_1^+]\cdot\int_{d_0^-}^{d_1^-} F(t)\,dt +$$

$$+[d_1^- - d_0^-]\cdot\int_{d_1^+}^{d_2^+} G(z)dz = 0. \qquad (6)$$

Пусть t—произвольная точка из $[a, b]$. Проводим из этой точки характеристику первого семейства уравнения (1) до первого (второго) пересечения с границей $\partial\Omega$, а затем из полученных точек проводим характеристики второго семейства до пересечения с осью абсцисс. Абсциссы полученных точек обозначим через $z_1(t)$ и $z_2(t)$.

Таким образом, мы ввели две функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$, которые определены на промежутке $[a, b]$ со значениями из промежутка $[c, d]$.

Поскольку почти везде на $\partial\Omega$ собственная функция $u(x, y)$ обращается в нуль, то для почти всех t из промежутка $[a, b]$ имеем

$$G(Z_1(t)) = G(Z_2(t)) = -F(t). \qquad (7)$$

В равенстве (6) разбивая второй интеграл на промежутки $[d_1^+, B]$, $[B, d_2^+]$, а затем делая замену переменных, с учетом (7) получим

$$-[d_1^- - d_0^-]\cdot\int_a^{d_0^-} F(t)\,\Psi'(t)\,dt + [d_2^+ - d_1^+]\cdot\left|\int_{d_0^-}^{A} F(t)\,dt +\right.$$

$$\left.+\int_A^{d_1^-} F(t)\,dt\right| = 0, \qquad (8)$$

где $\Psi(t) = Z_2(t) - Z_1(t)$.

В равенстве (8) поступая аналогично с последним интегралом, можно его записать в виде

$$-[d_1^- - d_0^-]\cdot\int_a^{d_0^-} F(t)\cdot\Psi'(t)\,dt + [d_2^+ - d_1^+]\cdot\int_{d_0^-}^{A} F(t)\cdot[1-\varphi'(t)]\,dt = 0. \qquad (9)$$

Здесь функция $\varphi(t)$ определяется в промежутке $[a, A]$ следующим образом. Пусть t—произвольная точка промежутка $[a, A]$. Через эту точку проводится характеристика первого семейства уравнения (1) до пересечения с границей $\partial\Omega$, затем из полученной точки проводится характеристика второго семейства опять до пересечения с $\partial\Omega$ и, наконец, из последней точки проводится характеристика первого семейства до пересечения с осью абсцисс. Абсцисса полученной точки считается значением функции $\varphi(t)$.

Положим $d_0^- = x$, тогда

$$d_1^- = \varphi(x), \quad d_1^+ = Z_1(x), \quad d_2^+ = Z_2(x),$$

$$d_1^- - d_0^- = \varphi(x) - x; \; d_2^+ - d_1^+ = \psi(x).$$

В этих обозначениях равенство (9) примет вид

$$\int_a^x F(t) \cdot \chi_1(x, t)\, dt = \int_x^A F(t) \cdot \chi_2(x, t)\, dt, \tag{10}$$

где

$$\chi_1(x, t) = [\varphi(x) - x] \cdot \psi'(t), \; a \leqslant x \leqslant A,$$

$$\chi_2(x, t) = \psi(x) \cdot [1 - \varphi'(t)]; \; a < t \leqslant A. \tag{11}$$

Продифференцируем равенство (10) по x, получим

$$F(x) \cdot \Phi(x) = \int_a^A F(t) \cdot \chi(x, t)\, dt. \tag{12}$$

Здесь

$$\chi(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{\partial \chi_1(x, t)}{\partial x} & \text{при} \begin{cases} a \leqslant x \leqslant A \\ a < t \leqslant x \end{cases} \\ \dfrac{\partial \chi_2(x, t)}{\partial x} & \text{при} \begin{cases} a \leqslant x < A \\ x \leqslant t \leqslant A \end{cases} \end{cases} \tag{13}$$

$$\text{а} \quad \Phi(x) = \chi_1(x, x) + \chi_2(x, x).$$

Заметим, что функция $\Phi(x)$ строго положительна и непрерывна в промежутке $[a, A]$.

В самом деле, из (11) имеем

$$\Phi(x) = \chi_1(x, x) + \chi_2(x, x) = [\varphi(x) - x] \cdot \psi'(x) + \\ + \psi(x) \cdot [1 - \varphi'(x)] > 0,$$

поскольку, как это видно из фиг. 1,

$$\varphi(x) > x \;\text{ и }\; \psi(x) = Z_2(x) - Z_1(x) > 0,$$

а функции $\psi(x)$ и $x - \varphi(x)$ возрастающие в промежутке $[a, A]$ и следовательно,

$$[x - \varphi(x)]' = 1 - \varphi'(x) > 0, \; \psi'(x) > 0.$$

Поэтому из (12) получим представление для функции $F(x)$,

$$F(x) = \int_a^A K(x, t)\, F(t)\, dt, \tag{14}$$

для всех $x \in [a, A]$, где

$$K(x, t) = \frac{\chi(x, t)}{\Phi(x)}.$$

$K(x, t)$ есть непрерывная функция двух переменных в квадрате $\{a \leqslant x \leqslant A;\ a \leqslant t \leqslant A\}$. Последнее утверждение следует из представлений (11), (13), из гладкости функций, входящих в (11), и из непрерывности функции $\chi(x, t)$ при $x = t$. Это имеет место, так как

$$\chi(x, x) = -\left.\frac{\partial \chi_1(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x} = -\left[\varphi'(x) - 1\right] \cdot \psi'(t)\Big|_{t=x} = \left.\frac{\partial \chi_2(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x}.$$

Таким образом, функция $F(x)$ есть решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода (14) с непрерывным ядром $K(x, t)$ и поэтому из принадлежности $F(x)$ классу интегрируемых с квадратом функций $L_2(a, A)$ следует [6] непрерывность этой функции в промежутке $[a, A]$, т. е. $F(x) \in C(a, A)$. Легко видеть, что отсюда следует непрерывность функции $F(x)$ во всем промежутке $[a, b]$, а также непрерывность функции $G(z)$ в промежутке $[c, d]$.

Мы показали, что из ортогональности обобщенной собственной функции $u(x, y)$ однородной краевой задачи (1), (2) к системе кусочно-постоянных собственных функций $\{u(x, y; \lambda, \theta),\ \theta \in \partial\Omega\}$ и из принадлежности $u(x, y) \in L_2(\Omega)$ следует непрерывность $u(x, y)$ в Ω, т. е. $u(x, y) \in C(\Omega)$.

Но тогда, как показал Р. А. Александрян [1], из стандартной системы кусочно-постоянных обобщенных собственных функций $\{u(x, y; \lambda, \theta)\}$ можно построить такую последовательность $\{v_n(x, y)\}$, которая в метрике $L_2(\Omega)$ сходится к $u(x, y)$

$$\left|v_n(x, y) - u(x, y)\right|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{15}$$

Из условий ортогональности (5) имеем

$$\iint_{\Omega} u(x, y) \cdot v_n(x, y)\, dxdy = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{16}$$

Перейдя в равенстве (16) к пределу при $n \to \infty$, в силу (15) получим

$$\iint_{\Omega} \{u(x, y)\}^2\, dxdy = 0,$$

т. е. $u(x, y) \equiv 0$ в $L_2(\Omega)$.

Теорема доказана.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ

Լարի տատանման հավասարումով ծնված ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների մի սիստեմի լրիվության նոր ապացույց

Աշխատանքում դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը լարի տատանման հավասարման համար

$$(1 + \lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1 - \lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

$$u\partial\Omega = 0, \tag{2}$$

այսպես կոչված «Թույլատրելի» Ω տիրույթում, որի համար $\partial\Omega$ եզրագիծ է, λ պարամետրի հաստատուն ոչ էրգոդիկ արժեքների համար, երբ $A(\lambda, d\Omega) = 0\Omega$ ապացուցվում է Ռ. Ա. Ալեքսանդրյանի կողմից կառուցված (1) երբեք արժեք ընդունող ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների դասի լրիվությունը $L_2(\Omega)$ ֆունկցիոնալ տարածության մեջ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. А. Александрян*, Докторская диссертация, МГУ, 1962. [2] *Р. А. Александрян*, ДАН АрмССР, т. XL, № 5 (1965). [3] *Р. А. Александрян*, ДАН СССР, т. 162, № 2 (1965). [4] *И. П. Натансон*, Теория функций вещественной переменной, М., 1950. [5] *Р. А. Александрян*, Труды Московского мат. общества, т. 9, 1960. [6] *И. Г. Петровский*, Лекции по интегральным уравнениям, 1948.