ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIV 1967 4

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Движение фронта давления в неоднородной жидкости

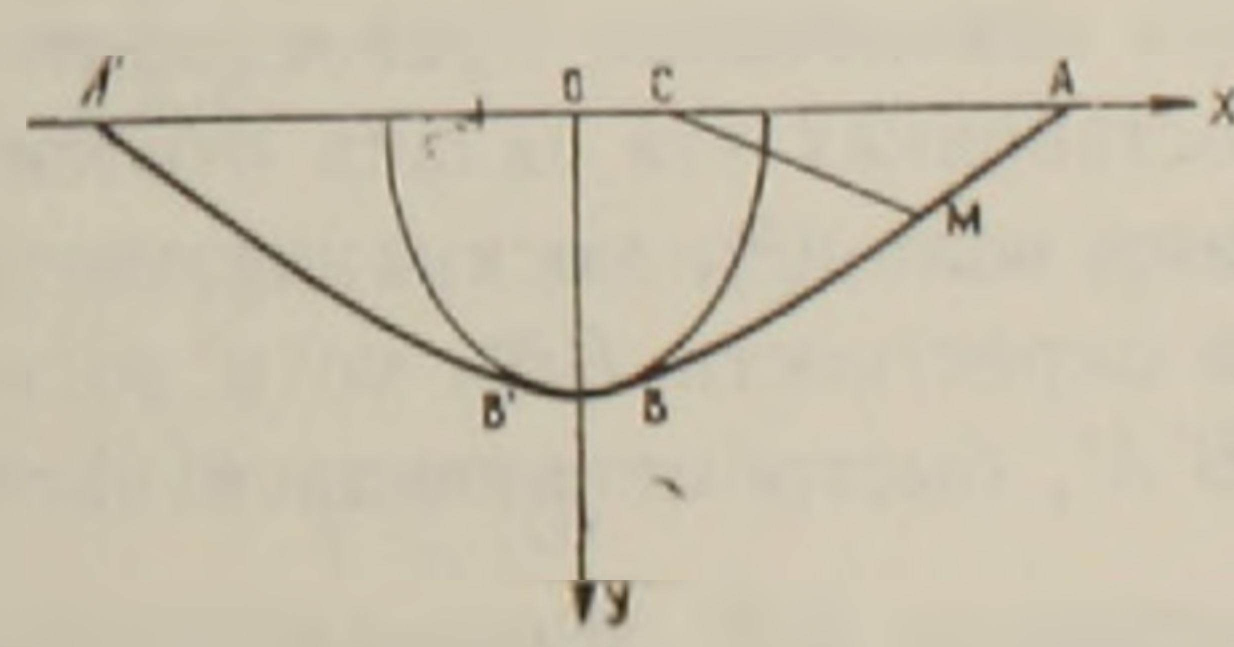
(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 16/III 1967)

Рассматривается плоская задача о движении тяжелой идеальной неоднородной жидкости с начальными распределениями плотности $\rho_0(y)$, скорости звука $a_0(y)$ и давления $P_0(y)$, под действием ударного давления, заданного на ее поверхности. Ось Ox выбрана по невозмущенной границе жидкости, ось Oy—в глубь нее, точка 0 совпадает с точкой поверхности, в которой возникло давление, t—время с начала движения.

На границе жидкости выполнено условие для избыточного давления

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1(|x|, t) & |x| < R(t) \\ 0 & |x| > R(t) \end{cases} \tag{1}$$

где $|x| = R(t)$ координата фронта давления на границе. $P_1(|x|, t) = P_A(t)\, f\left(\dfrac{|x|}{R}\right)$ распределение давления за фронтом на границе. Предполагается, что $V = R'(0)$ конечно и что $R'(t)$ больше скорости возмущений в жидкости. Тогда область возмущенного движения жидкости ограничена ударной волной $ABB'A'$ (фиг. 1), причем участок ее BB' соответствует области влияния точки O и несет в линейной постановке нулевое избыточное давление ([1]). Уравнение состояния жидкости $P = P(\rho, S)$, вообще говоря, произвольное, хотя может быть взято и в частной форме уравнения Тэта



Фиг. 1.

$$P = B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - B, \tag{2}$$

где B, n—постоянные, P—избыточное давление, S—энтропия. Задачей настоящей статьи является определение давления вблизи фронта BB' в нелинейной задаче с учетом малости возмущений—малое значение параметра $\gamma = \dfrac{P}{\rho_0 a_0^2}$.

В линейном случае решение вблизи BB' находится в виде [1]:

$$\frac{P}{P_A(0)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\frac{1}{a_0^2(0)} - \lambda^2}{\frac{1}{a_0^2(y)} - \lambda^2}} \frac{C}{\sqrt{J_1}} \sqrt{t - \tau(x, y)}, \tag{3}$$

где

$$C = V\sqrt{2} \int_{-1}^{1} \frac{f(|\xi|)\, d\xi}{(1 - V\lambda\xi)^2},$$

$$J_1 = \int_0^y \frac{dy}{a_0^2 \left(\frac{1}{a_0^2} - \lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}},$$

а уравнение линии $BB' - t = \tau(x, y)$ в линейном случае имеет вид [1]:

$$x = \lambda \int_0^y \sqrt{\frac{dy}{\frac{1}{a_0^2} - \lambda^2}}, \tag{4}$$

$$t = \int_0^y \frac{dy}{a_0^2 \sqrt{\frac{1}{a_0^2} - \lambda^2}},$$

причем $\lambda = \frac{\sin\theta}{a_0(0)}$, где θ — угол выхода лучей (4) на поверхности $y=0$ с осью Oy. Определим решение в окрестности линии BB' в нелинейной задаче, учитывая, что если ввести вместо x, y координаты τ, θ, производные по τ значительно превосходят производные по θ в силу (3), и движение одномерно вдоль лучей, причем производные P по τ будут значительно превосходить P. Несмотря на некоторое различие в постановках эта задача относится к области применения теории коротких волн [2], поскольку, хотя решение отлично от нуля не только в окрестности BB', но и во всей области, ограниченной линией $ABB'A'$, быстроменяющаяся часть решения (3) имеет место только в окрестности BB', имеющей второй порядок по $\gamma = \frac{P_A(0)}{\rho_0 a_0^2}$, и оценки [2] применимы. Тогда имеем окрестности BB' [2] для давления $P = \Delta$:

$$\Delta = \alpha \sqrt{\rho_0 a_0}\; e^{-\frac{1}{2}\int_0^t a_0 \left(\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y}\right) dt}, \tag{5}$$

где $\alpha = \text{const}$ есть выбранная характеристика вблизи BB', n_x, n_y—косинусы нормали к поверхности, причем

$$n_x = \frac{\partial t}{\partial x} a_0,\ n_y = \frac{\partial t}{\partial y} a_0,\ t = t\ (x, y)$$

есть характеристическая поверхность, близкая к BB', поэтому вычисление n_x и n_y может быть проведено для поверхности (4), где вместо 0 в пределе интегрирования нужно брать малую положительную величину $y_1'(\alpha)$. Тогда можно найти по (4)

$$n_x = \lambda a_0 (y),\ n_y = \sqrt{\frac{1}{a_0^2} - \lambda^2}\, a_0 (y),$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} = \frac{a_0}{J_1 (y)},\ \frac{\partial n_y}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial}{\partial y} \lambda^2 a_0^2}{2\sqrt{1 - \lambda^2 a_0^2}}, \tag{6}$$

где и $J_1 (y)$ в пределе интегрирования вместо 0 нужно брать $y_1'(\alpha)$. Учитывая, что по (4) вдоль луча

$$dt = \frac{dy}{a_0^2 \sqrt{\frac{1}{a_0^2} - \lambda^2}}, \tag{7}$$

можно проинтегрировать (5), (6). Однако производная $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ отлична от нуля, в то время как при интегрировании в (5) λ постоянно. Раскрывая (6) с учетом (4), получим

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = \frac{a_0}{(1 - \lambda^2 a_0^2)\, J_1(y)} - \frac{\lambda^2 \frac{\partial a_0^2}{\partial y}}{2\sqrt{1 - \lambda^2 a_0^2}}, \tag{8}$$

и подставляя в (5) решение на характеристике $\alpha = \mathrm{const}$ в виде

$$P = \alpha \sqrt{\rho_0}\, \frac{\sqrt{J_1(y_1')}}{\sqrt{J_1 (y)}} \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{a_0^2(0)} - \lambda^2}{\frac{1}{a_0^2(y)} - \lambda^2}}. \tag{9}$$

Введем вместо α переменную y_1, имеющую размерность времени

$$\alpha \sqrt{J_1 (y_1')} = \frac{P_A (0)}{\pi} C \sqrt{y_1}\, \frac{1}{\sqrt{\rho_0 (0)}}. \tag{10}$$

Тогда (9) представляет линейное решение (3), где произведена замена линейной характеристики $t - \tau$ на y_1. Здесь $y_1 = \mathrm{const}$ уравнение нелинейных характеристик. Учитывая, что скорость возмущений в бегущих волнах дается (3):

$$\frac{dl}{dt} = a_0 + a_0 \alpha^\circ \frac{P}{\rho_0 a_0^2}, \tag{11}$$

где $\alpha^\circ = \frac{1}{2\rho_0^3\, a_0^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_s$, $V = \frac{1}{\rho}$, причем для уравнения (2)

$\alpha^\circ = \frac{n+1}{2}$, l есть длина дуги вдоль луча, и, подставляя (9) в (11), после интегрирования легко найти

$$t = \int_0^y \frac{dy}{a_0^2 \sqrt{\frac{1}{a_0^2} - \lambda^2}} -$$

$$- \sqrt{y_1}\, \frac{P_A(0)}{\pi}\, C \int_0^y \frac{\alpha^\circ}{\rho_0 a_0} \sqrt{\frac{\rho_0(y)}{\rho_0(0)}} \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{a_0^2(0)} - \lambda^2}{\frac{1}{a_0^2(y)} - \lambda^2}}\, \frac{dy}{\sqrt{J_1(y)}} + y_1. \qquad (12)$$

Исключая y_1 из (9), (10) и (12), можно найти решение в окрестности BB', которое ранее было получено в ([1]) методом непосредственной замены линейных характеристик уточненными.

Решение на ударной волне находится обычным способом ([2]) и совпадает с ([4]). Следует заметить, что начальные параметры зависят, вообще говоря, от начальных, то есть лагранжевых координат, однако, поскольку вертикальные смещения частиц, равные $\int_2^t v_y\, dt$, имеют порядок $\gamma\,(t-\tau)$, ими можно пренебречь и использовать эйлеровы координаты.

Решение для больших моментов времени в линейном случае получается из общего решения вблизи фронта ([1]) в виде:

$$P = \frac{F(\tau')}{\sqrt{J_1(y)}},$$

где

$$F(\tau') = \frac{1}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{a_0^2(\infty)} - \lambda^2}{\frac{1}{a_0^2(0)} - \lambda^2}}\, \sqrt{2}\, \sqrt{\frac{\rho_0(\infty)}{\rho_0(0)}} \int_0^{\sqrt{\tau'}} d\eta' \int_{-R(\tau')}^{R(\tau')} P_1\, d\xi,$$

причем $\tau' = t - \tau$. Если здесь заменить $F(\tau')$ через

$$\lambda \sqrt{\rho_0(\infty)}\, \sqrt{J_1(y_1')} \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{a_0^2(\infty)} - \lambda^2}{\frac{1}{a_0^2(0)} - \lambda^2}}$$

можно видеть, что решение (9) также и в этом случае приводит к решению нелинейной задачи. Таким образом показано, как, пользуясь общим решением ([2]), несколько видоизмененным введением $y_1'(\alpha)$ для данной задачи, получить решение в прифронтовой области.

Уравнение для P вблизи фронта волны можно получить также, учитывая, что зависимость от переменной l более слабая, чем от $\tau = t - \int\limits_0^l \frac{dl}{a_0}$. Тогда можно найти:

$$-\alpha^\circ \frac{P}{\rho(y)\, a_0(y)} \frac{1}{a_0(y)} \frac{\partial P}{\partial \tau} + a_0(y) \frac{\partial P}{\partial l} + \left\{ \frac{\frac{\partial H_2}{\partial l}}{2H_2} - \frac{\frac{\partial \rho(y)\, a_0(y)}{\partial l}}{2\rho(y)\, a_0(y)} \right\} a_0 P = 0,$$

где

$$H_2 = J_1(y) \sqrt{\frac{1}{a_0^2(0)} - \lambda^2} \sqrt{\frac{1}{a_0^2(y)} - \lambda^2}\,.$$

Это уравнение верно и для произвольной $a_0(x, y)$, где

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2}$$

есть радиус кривизны BB'. Характеристики этого уравнения имеют вид

$$\frac{d\tau}{-\alpha^\circ \frac{P}{\rho(y)\, a_0^2(y)}} = \frac{dl}{a_0(y)} ; \frac{dl}{a_0(y)} = \frac{\frac{dP}{P}}{-\frac{a_0}{2H_2} \frac{\partial H_2}{\partial l} - \frac{a_0}{2\rho a_0} \frac{\partial \rho a_0}{\partial l}}$$

или

$$\frac{dt}{dl} = \frac{1}{a_0(y)} - \alpha^\circ \frac{1}{a_0(y)} \frac{P}{\rho(y)\, a_0^2(y)}\,,$$

$$\frac{dP}{dl} + \left\{ \frac{1}{2a_0\left(\frac{1}{a_0^2} - \lambda^2\right) J_1} - \frac{\lambda^2 \frac{\partial}{\partial y} a_0^2}{4\sqrt{1 - \lambda^2 a_0^2}} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial \rho a_0}{\partial l}}{\rho a_0} \right\} P = 0,$$

$dl = a_0 dt$, причем первое уравнение совпадает с (11), а второе — с (5), (8). Таким образом, нелинейное уравнение для возмущений вблизи фронта эквивалентно нелинейному уравнению характеристик (11) и линейному условию совместности вдоль них.

Для случая затухающих ударных фронтов рассмотрение фронтов по методу ([2]) дано также в ([5]).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Ճնշման ճակատի շարժումը անհամասեռ հեղուկում

Դիտարկվում է անհամասեռ հեղուկում թույլ ոչ գծային ալիքների շարժման խնդիրը։ Հեղինակի կողմից մինչև այդ ստացված լուծումը, որը ենթադրում էր մինչ ճակատային տիրույթում լուծման ավելի թույլ կապը ճառագայթի աղեղի l երկարությունից քան ճակատային

$\tau = t - \int_0^l \frac{dl}{a_0(y)}$ հեռավորությունից, գտնվում է (1) մեթոդի մի փոքր ձևափոխված տեսքով։

Նեղ գրգռված տիրույթի համար ստացված (1) ընդհանուր լուծումը ընդհանրացված է այն դեպքի համար, երբ լուծումը ամենուրեք տարբեր է զրոյից հարվածային ալիքի $ABB'A'$ սահմանափակ տիրույթում, բայց ճակատի մոտ ունի լուծման արագ փոփոխման նեղ տիրույթ։ Ցույց է տված, որ (1) առնչությունները ներկայացնում են իրենցից P-ի ոչ գծային հավասարման բնութագրեր։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Багдоев*, Пространственные нестационарные движения, Ереван, 1961. [2] *К. Е. Губкин*, ПММ, т. XXII, в. 4, 1958. [3] *Л. Д. Ландау* и *Е. М. Лившиц*, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953. [4] *А. Г. Багдоев*, „Известия АН АрмССР" (серия физ.-мат. наук), т. XVII, № 5 (1964). [5] *О. Ю. Полянский*, ПММ, т. XXIV, в. 4, 1960.