ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIV 1967 4

МАТЕМАТИКА

А. Г. Назаров, академик АН Армянской ССР

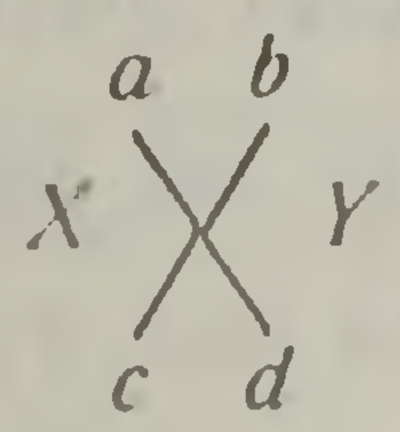
Опыт одной идеографической записи некоторых операций математической логики*

(Представлена 12/IV 1967)

Рассмотрим таблицу истинности для некоторой бинарной логической операции над высказываниями X и Y

$X \backslash Y$	и	л
и	a	b
л	c	d

В этой таблице под a, b, c и d понимаются либо и (истина), либо л (ложь). Предлагаем следующую схему символа для этой таблицы:



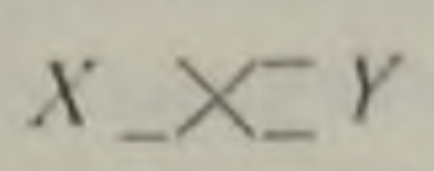
(1)

Мы видим, что четырем концам этой схемы, в зависимости от их ориентации, отвечают следующие значения X и Y:

1) верхний левый конец a, X есть и, Y есть и;
2) верхний правый конец b, X — и, Y — л;
3) нижний левый конец c, X — л, Y — и,
4) нижний правый конец d, X — л, Y — л.

Условимся для обозначения данной конкретной логической операции придерживаться следующего правила: если данному концу символа отвечает истина, то не вводить никакого обозначения; если же данному концу символа отвечает ложь, то к этому концу добавить горизонтальную черту. Эту черту будем называть знаком лжи.

Например, символ с тремя знаками лжи, приводимый здесь,



* О различных попытках идеографической записи операций математической логики см. (1). Там же приведена литература, посвященная этому вопросу.

изображает следующую логическую операцию:

$X \diagdown Y$		л
и	и	л
л	л	л

Приведем все 16 возможных значений логических операций, систематизированных определенным образом. Наименования десяти из них нами заимствованы из ([2, 3]).

Знак $\equiv$ означает равносильность.

В качестве символа для отрицания принимаем горизонтальную черту над символом, изображающим высказывание.

Группа 0—символ не содержит ни одной лжи:

$$Z_{01} \equiv X \times Y.$$

Таким образом, Z_{01} означает тождественную истинность, каковы бы ни были X и Y.

Группа 1—символ содержит лишь одну ложь:

$Z_{11} \equiv X\,{}^{-}\!\times Y$ — антиконъюнкция, отрицание конъюнкции, неконъюнкция, штрих Шеффера;
$Z_{12} \equiv X \times^{-} Y$ — (истинностный) условный союз, (материальная) импликация, следование;
$Z_{13} \equiv X\,{}_{-}\!\times Y$ — обратная импликация;
$Z_{14} \equiv X \times_{-} Y$ — (неразделительная) дизъюнкция;

Группа 2—символ содержит две лжи:

$Z_{21} \equiv X\,{}_{-}\!\times_{-} Y \equiv X$ каков бы ни был Y;
$Z_{22} \equiv X\,{}^{-}\!\times^{-} Y \equiv \bar{X}$ „ „ „ „ Y;
$Z_{23} \equiv X \times^{-}_{-} Y \equiv Y$ „ „ „ „ X;
$Z_{24} \equiv X\,{}^{-}_{-}\!\times Y \equiv \bar{Y}$ „ „ „ „ X;
$Z_{25} \equiv X\,{}_{-}\!\times^{-} Y$ (истинностный) биусловный союз, (материальная) эквивалентность;
$Z_{26} \equiv X\,{}^{-}\!\times_{-} Y$ — разделительная дизъюнкция, (материальная) антиэквивалентность, неэквивалентность, отрицание (материальной) эквивалентности;

Группа 3 — символ содержит три лжи:

$Z_{31} \equiv X\,{}_{-}\!\times^{-}_{-} Y$ — конъюнкция;
$Z_{32} \equiv X\,{}^{-}_{-}\!\times_{-} Y$ — (материальная) антиимпликация, неимпликация, отрицание (материальной) импликации;
$Z_{33} \equiv X\,{}^{-}\!\times^{-}_{-} Y$ — обратная антиимпликация, неимпликация, отрицание обратной импликации;

$Z_{34} \equiv X\,{}^{-}_{-}\!\times^{-}\,Y$ — антидизъюнкция, недизъюнкция, отрицание дизъюнкции;

Группа 4—символ содержит все четыре лжи:

$$Z_{41} \equiv X\,{}^{-}_{-}\!\times^{-}_{-}\,Y \equiv л.$$

Таким образом, Z_{41} означает тождественную ложь, каковы бы ни были X и Y.

Мы замечаем, что вторая группа символов приводит к разного рода тождественностям, эквивалентности и отрицанию эквивалентности. Здесь тривиальными являются Z_{21}, Z_{22}, Z_{23} и Z_{24} из-за того обстоятельства, что знаки лжи расположены рядом.

По ходу работы мы иногда будем рассматривать одновременно несколько символов, на некоторых концах которых допускаем возможными либо ложь, либо истину.

Например, символ ${}^{-}\!\times_{\underset{\cdot}{-}}$ означает либо ${}^{-}\!\times$, либо ${}^{-}\!\times_{-}$. Символ ${}^{-}_{\underset{\cdot}{-}}\!\times^{\dot{-}}_{\underset{\cdot}{-}}$ означает все множество символов.

Условимся в дальнейшем в следующем: отрезок ad символа (1) будем называть главной диагональю, а отрезок cb—второстепенной диагональю.

Приведем теперь основные свойства рассмотренных здесь символов логических операций. Доказательства их крайне просты и потому останавливаться на них не будем.

Свойство 1.

$$X \begin{array}{c} a\quad b \\ \times \\ c\quad d \end{array} Y \equiv Y \begin{array}{c} a\quad c \\ \times \\ b\quad d \end{array} X,$$

т. е. X и Y можно поменять местами, если поменять местами значения b и c на второстепенной диагонали. Отсюда вытекает условие коммутативности,

$$X \begin{array}{c} a\quad b \\ \times \\ b\quad d \end{array} Y \equiv Y \begin{array}{c} a\quad b \\ \times \\ b\quad d \end{array} X,$$

т. е. знаки истинности на концах второстепенной диагонали должны быть одинаковыми.

Таким образом коммутируются Z_{01}, Z_{11}, Z_{14}, Z_{25}, Z_{26}, Z_{31}, Z_{34} и Z_{41}.

Свойство 2.

$$\overline{X} \begin{array}{c} a\quad b \\ \times \\ c\quad d \end{array} Y \equiv X \begin{array}{c} c\quad d \\ \times \\ a\quad b \end{array} Y.$$

Итак, для того чтобы снять знак отрицания с X, достаточно логический символ повернуть на 180° относительно горизонтальной оси. Также наоборот, если логический символ повернуть на 180° относительно горизонтальной оси, то над X надо поставить знак отрицания.

Свойство 3.

$$X \overset{a\quad b}{\underset{c\quad d}{\times}} \bar{Y} \equiv X \overset{b\quad a}{\underset{d\quad c}{\times}} Y.$$

Итак, для того чтобы снять знак отрицания с Y, достаточно логический символ повернуть на 180° относительно вертикальной оси. Также наоборот, если логический символ повернуть на 180° относительно вертикальной оси, то над Y надо поставить знак отрицания.

Свойство 4.

$$\bar{X} \overset{a\quad b}{\underset{c\quad d}{\times}} \bar{Y} \equiv X \overset{d\quad c}{\underset{b\quad a}{\times}} Y.$$

Итак, для того чтобы снять знаки отрицания с обоих высказываний X и Y, достаточно поменять местами концы главной диагонали и концы второстепенной диагонали и наоборот.

Свойство 5.

$$\overline{X \overset{a\quad b}{\underset{c\quad d}{\times}} Y} \equiv X \overset{\bar{a}\quad \bar{b}}{\underset{\bar{c}\quad \bar{d}}{\times}} Y.$$

Итак, чтобы снять знак отрицания с логической операции в целом, достаточно ввести знаки отрицания во всех четырех концах символа логической связки.

Свойство 6.

Операции отрицания над высказываниями X и Y, а также над обоими ими не изменяют принадлежности символа к группе.

Действительно, из свойств *2*, *3* и *4* вытекает, что значения истинности a, b, c и d лишь меняют свои положения. Стало быть не меняется количество знаков лжи и потому не меняется принадлежность символа к группе.

Свойство 7.

При использовании операции отрицания над логической операцией в целом, символ нулевой группы переводится в символ четвертой группы и наоборот; символ первой группы в символ третьей группы и наоборот; символ второй группы переводится в другой символ той же группы.

Например, $\overline{X \times Y} \equiv X \,{}^{-}_{-}\!\times^{-}_{-} Y$,

$$\overline{X \,{}_{-}\!\times^{-}_{-} Y} \equiv X \,{}^{-}\!\times Y, \qquad \overline{X \,{}_{-}\!\times^{-} Y} \equiv X \,{}^{-}\!\times_{-} Y.$$

Свойство 8.

Если $X \equiv Y$, то значения истинности находятся на главной диагонали; если же $X \equiv \bar{Y}$, то значения истинности находятся на второстепенной диагонали.

Приведем некоторые простейшие примеры операций математической логики для иллюстрации вышеизложенного.

1. $X \times^{-} Y \equiv \bar{X} \times_{-} Y$.
2. $\overline{X \times_{-} Y} \equiv X \,{}^{-}_{-}\!\times^{-} Y \equiv \bar{X} \,{}_{-}\!\times^{-}_{-} \bar{Y}$ | (законы де Моргана)
   $\overline{X \,{}_{-}\!\times^{-}_{-} Y} \equiv X \,{}^{-}\!\times Y \equiv \bar{X} \times_{-} \bar{Y}$ |
3. $\overline{\bar{X} \times_{-} \bar{Y}} \equiv \bar{X} \,{}^{-}_{-}\!\times^{-} \bar{Y} \equiv X \,{}_{-}\!\times^{-}_{-} Y$.
4. Рассмотрим

$$\overset{(1)}{(X \,{}^{\dot{-}}_{\dot{-}}\!\times^{\dot{-}}_{\dot{-}} Y)} \,{}_{-}\!\times^{-}_{-} \overset{(2)}{(X \,{}^{\dot{-}}_{\dot{-}}\!\times^{\dot{-}}_{\dot{-}} Y)} \equiv \overset{(3)}{(X \,{}^{\dot{-}}_{\dot{-}}\!\times^{\dot{-}}_{\dot{-}} Y)}. \qquad (2)$$

Здесь символы (1) и (2) произвольны, а символ (3) зависит от них. Анализируя это выражение, приходим к выводу, что если на одном из сходственных концов первого или второго символа имеется знак лжи, то на сходственном конце третьего символа должна быть ложь.

Например,

$$(X \times^{-} Y) \,{}_{-}\!\times^{-}_{-} (X \,{}^{-}\!\times Y) \equiv (X \,{}^{-}\!\times^{-} Y) \equiv \bar{X},$$
$$(X \times^{-} Y) \,{}_{-}\!\times^{-}_{-} (X \,{}_{-}\!\times Y) \equiv (X \,{}_{-}\!\times^{-} Y),$$
$$(X \,{}^{-}\!\times^{-}_{-} Y) \,{}_{-}\!\times^{-}_{-} (X \,{}_{-}\!\times^{-} Y) \equiv (X \,{}^{-}_{-}\!\times^{-}_{-} Y) \equiv л.$$

Отсюда следует, что для того чтобы операция (2) приводила к тождественной лжи, необходимо и достаточно, чтобы был знак лжи на любом конце либо символа (1), либо символа (2), либо для обоих символов одновременно.

5. Рассмотрим

$$\overset{(1)}{(X \,{}^{\dot{-}}_{\dot{-}}\!\times^{\dot{-}}_{\dot{-}} Y)} \times_{-} \overset{(2)}{(X \,{}^{\dot{-}}_{\dot{-}}\!\times^{\dot{-}}_{\dot{-}} Y)} \equiv \overset{(3)}{(X \,{}^{\dot{-}}_{\dot{-}}\!\times^{\dot{-}}_{\dot{-}} Y)}. \qquad (3)$$

Здесь символы (1) и (2) по-прежнему произвольны, а символ (3) зависит от них. Анализируя это выражение, приходим к выводу, что какой-либо конец символа (3) содержит ложь, если сходственные концы символов (1) и (2) содержат ложь.

Например,

$$(X \times^{-} Y) \times_{-} (X \,{}^{-}_{-}\!\times_{-} Y) \equiv (X \times Y) \equiv и,$$
$$(X \,{}^{-}_{-}\!\times_{-} Y) \times_{-} (X \times_{-} Y) \equiv (X \times_{-} Y).$$

Отсюда следует, что логическая операция (3) будет тождественно истинной только в том случае, если сходственные концы символов (1) и (2) одновременно не содержат знака лжи.

Аналогичным путем, по-видимому, можно разработать символику для трехзначной математической логики (истина, ложь, неопределенность). Для этого, кроме диагонали, надо ввести через центр их пересечений горизонтальные и вертикальные лучи. Всего образуется восемь лучей, на концах которых помещаются обозначения, отвечающие восьми элементам таблицы истинности. Девятый, центральный элемент, остается на пересечении лучей. Преобразование различных символов друг в друга осуществляется путем вращения их относительно различных осей. Соотношения при этом значительно сложнее и многообразнее и не исследованы нами до конца.

Сектор вычислительной техники
Института геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս

Մաթեմատիկական տրամաբանության մի քանի օպերացիաների իդեոգրաֆիկական գրառման փորձ

Հոդվածում արված է երկակի տրամաբանական օպերացիայի խորության ցանկացած աստիճանի իդեոգրաֆիկական գրառում: Այդ ձևով ստացված սիմվոլները ընդունված են որպես տրամաբանական օպերացիաների կապակցող:

Ցույց է տրված, թե տրամաբանական օպերացիաների պրոցեսում ինչպես մի ձևի սիմվոլները ձևափոխվում են մի այլ ձևի:

Վերջում ցուցադրման համար բերված են մաթեմատիկական տրամաբանության օպերացիաների օրինակներ:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Стяжкин*, Становление идей математической логики, Изд. Наука, М., 1964. [2] *П. С. Новиков*, Элементы математической логики, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959. [3] *А. Черч*, Введение в математическую логику, т. 1, Изд. иностран. лит., М., 1960.