

ПА-8232

МАТЕМАТИКА

А. В. Чакмазян

О гауссовом кручении двумерной двойственно нормализованной поверхности D_2 , вложенной в E_4

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 4/IV 1966)

1. Будем говорить, что поверхность V_m в проективном пространстве P_n нормализована двойственно, если она нормализована в смысле А. П. Нордена ⁽¹⁾ и ее нормаль первого рода содержит характеристику семейства гиперплоскостей, касающихся V_m .

В этой заметке мы рассмотрим двумерные поверхности, погруженные в евклидово E_4 , и пусть $x = x(u^1, u^2)$ является радиус-вектором точки поверхности. Репер присоединяется к этой точке так, чтобы первые два единичных вектора e_i ($i, j, k = 1, 2$) лежали в касательной плоскости к поверхности V_2 , а остальные векторы e_α ($\alpha, \beta, \gamma = 3, 4$) были ортогональны к касательной плоскости и между собой. Тогда получим компонент инфинитезимальных смещений репера

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_j^i e_j + \omega_\alpha^i e_\alpha, \quad de_\alpha = \omega_i^\alpha e_i + \omega_\beta^\alpha e_\beta. \quad (1)$$

Дифференцируя тождества $e_i e_\alpha = 0$, получим соотношения

$$\omega_\alpha^k + g^{ki} \omega_i^\alpha = 0, \quad (2)$$

где g^{ki} — контравариантные компоненты метрического тензора $g_{ij} = e_i e_j$ поверхности V_2 .

Если уравнения $\omega^\alpha = 0$ продифференцировать внешним образом, а затем к полученным ковариантам применять лемму Картана, то получаются уравнения

$$\omega_i^\alpha = \gamma_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \gamma_{ij}^\alpha = \gamma_{ji}^\alpha, \quad (3)$$

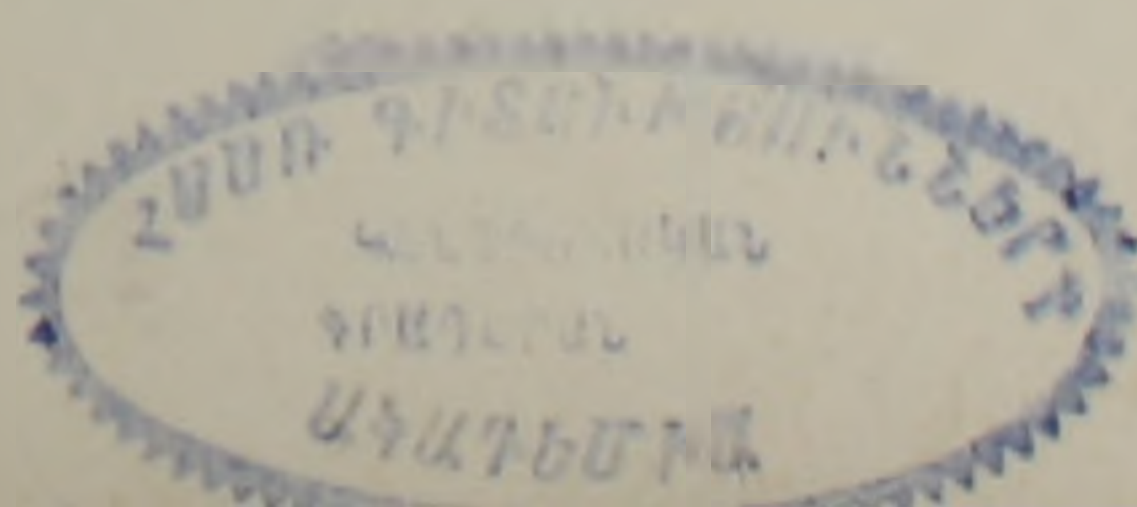
где γ_{ij}^α — вторые основные тензоры поверхности.

Внешнее дифференцирование уравнения (3) дает

$$d\gamma_{ij}^\alpha = \gamma_{ik}^\alpha \omega_j^k - \gamma_{kj}^\alpha \omega_i^k + \gamma_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha \Lambda \omega^j = 0.$$

Условия интегрируемости уравнения (1) имеют следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \text{I } D\omega^1 &= \omega^2 \Lambda \omega_2^1, \quad D\omega^2 = \omega^1 \Lambda \omega_1^2, \\ \text{II } D\omega_1^2 &= \omega_1^3 \Lambda \omega_3^2 + \omega_1^4 \Lambda \omega_4^2, \quad \text{III } D\omega_3^1 = \omega_3^1 \Lambda \omega_1^1 + \omega_3^2 \Lambda \omega_2^1, \\ \text{IV } D\omega_1^3 &= \omega_1^2 \Lambda \omega_2^3 + \omega_1^4 \Lambda \omega_4^3, \quad \text{V } D\omega_2^3 = \omega_2^1 \Lambda \omega_1^3 + \omega_2^4 \Lambda \omega_4^3, \\ \text{VI } D\omega_1^4 &= \omega_1^2 \Lambda \omega_2^4 + \omega_1^3 \Lambda \omega_3^4, \quad \text{VII } D\omega_2^4 = \omega_2^1 \Lambda \omega_1^4 + \omega_2^3 \Lambda \omega_3^4. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



Имея в виду (3), (4.II, III) можно записать в виде

$$D\omega_1^2 = [(\gamma_{12}^{32} - \gamma_{11}\gamma_{22}^3) + (\gamma_{12}^{42} - \gamma_{11}\gamma_{22}^4)] \omega^1 \Lambda \omega^2,$$

$$D\omega_3^4 = [(\gamma_{11}\gamma_{12}^3 - \gamma_{11}\gamma_{12}^4) + (\gamma_{12}\gamma_{22}^3 - \gamma_{22}\gamma_{12}^4)] \omega^1 \Lambda \omega^2.$$

Э. Картан [2] называет инварианты

$$\left. \begin{aligned} K &= \gamma_{12}^{32} - \gamma_{11}\gamma_{22}^3 + \gamma_{12}^{42} - \gamma_{11}\gamma_{22}^4 = \frac{D\omega_1^2}{\omega^1 \Lambda \omega^2}, \\ \kappa &= \gamma_{11}\gamma_{12}^3 - \gamma_{11}\gamma_{12}^4 + \gamma_{12}\gamma_{22}^3 - \gamma_{22}\gamma_{12}^4 = \frac{D\omega_3^4}{\omega^1 \Lambda \omega^2}, \end{aligned} \right\}$$

соответственно гауссовой кривизной и гауссовым кручением поверхности V_2 .

2. Допустим, что V_2 можно дополнить до гиперполосы так, чтобы характеристики семейства касательных гиперплоскостей были перпендикулярны к касательной плоскости поверхности. Очевидно, что тогда естественная нормализация V_2 будет одновременно и двойственной (2). Поверхности V_2 , допускающие двойственную нормализацию, образуют некоторый класс, который в дальнейшем обозначим через D_2 . Если e_3 есть вектор характеристической прямой, а e_4 нормальный вектор касательной гиперплоскости, то по условию двойственности нормализации имеем $e_3 de_4 = 0$ или $e_4 de_3 = 0$.

В силу (1) последнее условие принимает следующий вид: $\omega_3^4 = 0$.

Дифференцируя внешним образом последнее уравнение, получим

$$\omega_3^1 \Lambda \omega_1^1 + \omega_3^2 \Lambda \omega_2^1 = 0.$$

Имея в виду (5), можем сделать вывод, что для поверхности D_2 гауссово кручение равно нулю. Итак, мы доказали, что поверхность D_2 в E_4 характеризуется тем, что ее гауссово кручение равно нулю.

Теперь докажем, что если на поверхности V_2 , вложенной в E_4 , гауссово кручение равно нулю, то поверхность будет D_2 . Если выбрать новые нормальные орты так

$$\left. \begin{aligned} e_3^* &= e_3 \cos \varphi + e_4 \sin \varphi \\ e_4^* &= -e_3 \sin \varphi + e_4 \cos \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

то тогда (1) принимает следующий вид

$$\left. \begin{aligned} dx &= \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^* e_a^*, \\ de_3^* &= \omega_3^* e_i + \omega_3^{*4} e_4^*, \quad de_4^* = \omega_4^* e_i - \omega_3^{*4} e_4^*. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Дифференцируя (6) и имея в виду (1), получим

$$de_3^* = (\omega_3^1 \cos \varphi + \omega_3^2 \sin \varphi) e_i + (\omega_3^4 + d\varphi) e_4^*.$$

Из (7) и из последнего получаем $\omega_3^{*4} = e_4^* de_3^* = \omega_3^4 + d\varphi$.

Так как по условию $D\omega_3^4 = 0$, то это значит, что ω_3^4 есть полный дифференциал, и мы можем функцию $\varphi(u^1, u^2)$ выбрать так, чтобы

ω_3^{*4} обратилось в нуль. Но тогда для выбранных e_3^* , e_4^* уравнения (7) принимают вид

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^* e_a^*, \quad de_3^* = \omega_3^{*i} e_i, \quad de_4^* = \omega_4^{*i} e_i.$$

Таким образом, мы видим, что e_3^* и e_4^* осуществляют полярно двойственную нормализацию поверхности.

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Для того, чтобы поверхность V_2 была двойственно нормализуема D_2 , необходимо и достаточно, чтобы гауссово кручение поверхности V_2 равнялось нулю.

Э. Картан в работе (3) доказал, что если гауссово кручение поверхности равно нулю, то в этом случае на поверхности существует два ортогональных семейства линий кривизны. Таким образом, на D_2 существует два ортогональных семейства линий кривизны.

3. Для поверхности D_2 мы имеем

$$D\omega_a^3 = 0 \quad \text{или} \quad \omega_a^i \Lambda \omega_i^3 = 0. \quad (8)$$

Имея в виду (3), равенство (8) можно записать в виде

$$\varepsilon^{ke} g^{ij} \gamma_{kj}^3 \gamma_{ie}^4 = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon^{ke} \varepsilon^{lm} \varepsilon^{jn} g_{mn} \gamma_{kj}^3 \gamma_{el}^4 = 0.$$

Это показывает, что тензоры g_{ij} , γ_{ij}^3 , γ_{ij}^4 комполярны (1, § 20), т. е.

$$g_{ij} = A_a \gamma_{ij}^a. \quad (9)$$

В. Т. Базылев (4) доказал, что для того, чтобы на поверхности V_m существовало поле особых нормалей, необходимо и достаточно, чтобы метрический тензор g_{ij} поверхности был линейной комбинацией ее вторых тензоров γ_{ij}^a .

Имея в виду (9) и последнее замечание, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 2. Поверхность D_2 , вложенная в E_4 , характеризуется тем, что она допускает существование поля особых нормалей. В работе (5) доказано, что если на поверхности V_2 имеет место условие (9), то поверхность будет D_2 ; отсюда получаем

Теорема 3. Для того, чтобы поверхность V_2 , вложенная в E_4 , была поверхностью D_2 , необходимо и достаточно, чтобы V_2 допускала поле особых нормалей.

4. В работе (6) доказано, что всякая D_2 в E_4 сечет ортогонально касательные плоскости некоторой поверхности нулевой кривизны. Таким образом, задача нахождения D_2 в E_4 равносильна задаче нахождения V_2 нулевой кривизны.

Как известно (7), например, что поверхность

$$x(u, v) = \{\sin u \sin v, \cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v\}$$

имеет нулевую гауссову кривизну. Тогда по формуле ((6), (12)) мы можем искать уравнение соответствующих поверхностей D_2 в следующем виде

$$x^* = x(u, v) + (a - u)x_u + (b - v)x_v,$$

или

$$\begin{aligned}x^* = & \{\sin u \sin v, \cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v\} + \\& + (a - u) \{\cos u \sin v, -\sin u \cos v, \cos u \cos v, -\sin u \sin v\} + \\& + (b - v) \{\sin u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos u \cos v\},\end{aligned}$$

где a и b — постоянные величины.

Ереванский государственный
университет

Ա. Վ. ՉԱԿՄԱԶՅԱՆ

Եվկլիդյան E_4 տարածությունում բնկղմված երկակի նորմալացված D_2 մակերևույթի գաուսյան ոլորման մասին

Այս հաղորդումը նվիրված է երկակի նորմալացված մակերևույթի ուսումնասիրությանը,
որը բնկղմված է չորս չափանի եվկլիդյան E_4 տարածությունում:

Ինքնացուցված է հետևյալը՝

1. Որպեսզի V_2 մակերևույթը, որը բնկղմված է E_4 լինի D_2 անհրաժեշտ և բավարար է,
որ նրա գաուսյան ոլորումը լինի նույնարար զերո:

2. Որպեսզի V_2 մակերևույթը, որը բնկղմված է E_4 լինի D_2 անհրաժեշտ և բավարար է,
 V_2 թույլատրի եղակի նորմալների դաշտ:

3. Իհտարկվում է օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ А. П. Норден, Пространства аффинной связности, 1950. ² А. В. Чакмазян, ДАН АрмССР, т. 28, № 4 (1959). ³ Э. Картан, Риманова геометрия в ортогональном репере, М., МГУ, 1960. ⁴ В. Т. Базылев, Сиб. мат. журнал, т. VII, № 3, 1966. ⁵ А. В. Чакмазян, ДАН АрмССР, т. 37, № 2, 1963. ⁶ А. В. Чакмазян, ДАН СССР, т. 144, № 6, 1962. ⁷ М. Pinl, B-Kugelbilder reeller Minimalflächen in R_4 , Math. Z., 1953, 59.