ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТОМ 60 № 6 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 6, 2025, стр. 3 – 14.

О ФРЕДГОЛЬМОВЫХ СВОЙСТВАХ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ОТРАЖЕНИЕМ

А. Г. КАМАЛЯН, Г. А. КАМАЛЯН

Институт Математики НАН Армении
Армянский государственный экономический университет
E-mails: *kamalyan_armen@yahoo.com*; *qamalyan.hayk@asue.am;*

Аннотация. В работе рассматривается матричный сингулярный интегральный оператор с отражением определённый на действительной оси и действующий в лебеговых пространствах с весом Макенхаупта. В случае кусочно-непрерывных коэффициентов получен критерий фредгольмовости.

MSC2020 number: 47B35; 45E05; 47B38.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор; оператор отражения; вес Макенхаупта.

1. Введение

Пусть $L_p(\Gamma, w)$, где Γ либо $\mathbb{R}$ либо $\mathbb{R}_\pm := \{\pm x > 0\,; \, x \in \mathbb{R}\}$ лебегово пространство с весом w с нормой

$$\|f\|_{p,w} := \left(\int\limits_\Gamma |f(t)|^p w(t)^p |dt| \right)^{1/p}.$$

Предполагается, что $w \in \mathcal{A}_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, т.е. w удовлетворяет условию Макенхаупта

$$\sigma(p, w) := \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int\limits_I w(x)^p dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|I|} \int\limits_I w(x)^{-q} dx \right)^{1/q} < \infty,$$

где $q = {}^p/_{(p-1)}$, I пробегает множество всех ограниченных интервалов Γ, а $|I|$ – длина интервала I.

Хорошо известно (см. [1]), что сингулярный интегральный оператор

$$(Sy)(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma \setminus (t-\varepsilon, t+\varepsilon)} \frac{y(\tau)}{\tau - t} \, d\tau, \qquad t \in \mathbb{R},$$

является линейным ограниченным оператором отображающим $L_p(\mathbb{R}, w)$ на себя. Оператор S является инволюцией и определяет проекторы $P^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$ (I –

тождественный оператор) и соответствующее разложение

$$L_p(\mathbb{R},w)=L_p^+(\mathbb{R},w)\oplus L_p^-(\mathbb{R},w),\quad \text{где}\ \ L_p^{\pm}(\mathbb{R},w):=P^{\pm}L_p(\mathbb{R},w).$$

Условимся о следующих обозначениях. Если X линейное пространство, то через X^n ($X^{n\times n}$) будем обозначать линейное пространство всех $n\times 1$ векторов ($n\times n$ матриц) с компонентами из X. Если X и Y банаховы пространства, а $A\colon X\to Y$ линейный оператор, то оператор $\operatorname{diag}(A,\dots,A):=X^n\to Y^n$ мы также будем обозначать через A, т.е. действие A на X^n понимается покомпонентно. Через $m(a)$ мы обозначаем оператор умножения на матриц-функцию $a\in(L_\infty(\mathbb{R}))^{n\times n}$, т.е. $m(a)\colon (L_p(\mathbb{R},w))^n\to(L_p(\mathbb{R},w))^n$ действует по формуле $(m(a)y)(x)=a(x)y(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Множество весов w из $\mathcal{A}_p(\mathbb{R})$ обладающих свойством симметрии $w(-x)=w(x)$, $x\in\mathbb{R}$, будем обозначать через $\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$. Поскольку весовая функция $w\in\mathcal{A}_p(\mathbb{R}_+)$ по симметрии может быть продолжена на $\mathbb{R}$, и это продолжение принадлежит $A_p(\mathbb{R})$, то между $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$ существует взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем вес из $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}_+)$ и его симметрическое продолжение на $\mathbb{R}$ мы будем обозначать одной и той же буквой. Заметим, что (см., например, [2]) множество степенных весов, принадлежащих $\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$, имеет вид

$$w(\xi)=\gamma|\xi+i|^{\mu_\infty}|\xi|^{\mu_0}\prod_{j=1}^{m}|\xi^2-\beta^2|^{\mu_j},\quad \xi\in\mathbb{R},\tag{1.1}$$

где $\gamma,\beta_1,\dots,\beta_m>0$, $\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_m\in\left(-{}^1\!/_p,{}^1\!/_q\right)$ и $\mu:=\mu_\infty+\mu_0+2(\mu_1+\dots+\mu_m)\in\left(-{}^1\!/_p,{}^1\!/_q\right)$ Очевидно, что оператор отражения $J\colon L_p(\mathbb{R},w)\to L_p(\mathbb{R},w)$ действующий по формуле $(Jy)(x)=y(-x)$ в случае $w\in\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$ является ограниченным. Через $PC(\dot{\mathbb{R}})$ будем обозначать алгебру всех ограниченных кусочно-непрерывных функций на $\dot{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Другими словами $f\in PC(\dot{\mathbb{R}})$ тогда и только тогда, когда $f\in L_\infty(\mathbb{R})$ и в каждой точке $x_0\in\dot{\mathbb{R}}$ существуют односторонние пределы

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x),\qquad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)$$

В частности $f(\infty\pm 0):=f(\mp\infty)=\lim_{x\to\mp\infty}f(x)$. Условимся также вместо $f(0\pm 0)$ пользоваться обозначением $f(\pm 0)$.

Пусть X и Y банаховы пространства, $A\colon X\to Y$ линейный ограниченный оператор. Если образ $\operatorname{im}A$ замкнут в Y, а ядро $\ker A$ и коядро ${}^Y\!/_{\operatorname{im}A}$ конечномерны, то говорят что оператор A является оператором Фредгольма.

Сингулярный интегральный оператор

$$\mathcal{V}(a^{\pm})=(m(a^+)P^++m(a^-)P^-)\colon(L_p(\mathbb{R},w))^n\to(L_p(\mathbb{R},w))^n$$

является ограниченным как только $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$, $a^{\pm} \in (L_\infty(\mathbb{R}))^{n\times n}$. Соответственно сингулярный интегральный оператор с отражением $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm}) = \mathcal{V}(a^{\pm}) + \mathcal{V}(b^{\pm})J : (L_p(\mathbb{R}, w))^n \to (L_p(\mathbb{R}, w))^n$ является ограниченным как только $w \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$, $a^{\pm}, b^{\pm} \in (L_\infty(\mathbb{R}))^{n\times n}$. Теория Фредгольма сингулярных интегральных операторов $\mathcal{V}(a^{\pm})$ в случае кусочно непрерывных коэффициентов в пространствах Лебега со степенным весом достаточно полно изложена в работах [3]-[5]. Операторы $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ являются частным классом сингулярных интегральных операторов со сдвигом, теория которых изложена в работах [6]-[10].

Теория Фредгольма оператора $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ тесно связанна с теорией Фредгольма оператора без сдвига $\mathcal{V}(c_{\pm})$, где

$$(1.2)\qquad c_+(x) = \begin{pmatrix} a^+(x) & b^+(x) \\ b^-(-x) & a^-(-x) \end{pmatrix},\ c_-(x) = \begin{pmatrix} a^-(x) & b^-(x) \\ b^+(-x) & a^+(-x) \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R},$$

Действительно (см. [9]) справедливо тождество

$$(1.3)\qquad \begin{pmatrix} I & J \\ I & -J \end{pmatrix} \mathcal{V}(c_{\pm}) \begin{pmatrix} I & I \\ J & -J \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm}) & 0 \\ 0 & \mathcal{K}(a^{\pm}, -b^{\pm}) \end{pmatrix}$$

В силу этого тождества из фредгольмовости оператора $\mathcal{V}(c_{\pm})$ следует фредгольмовость оператора $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$. В работе [9] приведён пример, когда обратное утверждение не имеет место. Тем не менее в случае $n = 1$, кусочно непрерывных на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и непрерывных в точках $x = 0$ и $x = \infty$ (т.е. в неподвижных точках сдвига) коэффициентов эти операторы либо фредгольмовы одновременно либо одновременно не фредгольмовы (см., например, [8]).

В работе [2], исследования оператора $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ сводится к исследованию некоторого теплицева оператора действующего в пространстве $(L_p^+(\mathbb{R}, w^*))^{4n}$, где вес $w^* \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$ определён по формуле

$$(1.4)\qquad w^*(x) = 2^{-1/p}\, |x|^{-1/2p}\, w(\sqrt{|x|}).$$

Теория Фредгольма теплицевых операторов в случае произвольного веса $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$ построена в работах [11]-[12]. На основе этой теории, в работе [2] получен критерий фредгольмовости оператора $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ в терминах весовой функции w^*, матриц-функций $c_{\pm}$ и

$$(1.5)\qquad c(x) = (c_-(x))^{-1} c_+(x).$$

В данной работе получен критерий фредгольмовости оператора $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ в терминах исходного веса $w \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$.

В работе [2] получены необходимые и достаточные условия фредгольмовости оператора $\mathcal{V}(c_\pm)$. В случае степенных весов вида (1.1), в [2] получены необходимые и достаточные условия при которых оператор $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ фредгольмов, а оператор $\mathcal{V}(c_\pm)$ нет. В данной статье эти результаты распространены на случай произвольных весов из $\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$.

2. Вспомогательная лемма

Пусть $1 < p < \infty$, $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$. Как известно (см. [12, теорема 16.17]) каждое из множеств

$$I_x(p,w) := \left\{\lambda \in \mathbb{R}\colon \left|\frac{\xi - x}{\xi + i}\right|^\lambda w(\xi) \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$I_\infty(p,w) := \left\{\lambda \in \mathbb{R}\colon |\xi + i|^{-\lambda} w(\xi) \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})\right\}$$

является открытым интервалом длины не более чем 1 и содержащий $\lambda = 0$:

$$I_x(p,w) = (-\nu_x^-(p,w), 1 - \nu_x^+(p,w)), \quad (x \in \dot{\mathbb{R}}),$$

где $0 < \nu_x^-(p,w) \le \nu_x^+(p,w) < 1$.

Пусть весовая функция w^* определена по формуле (1.4). Заметим, что w^* принадлежит $\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$ (см. [2, Предложение 3.1]). Следующее утверждение играет важное значение при доказательстве основных результатов.

Лемма 2.1. *Пусть $w \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$. Тогда число $\lambda = 1/2$ принадлежит множеству $I_0(p, w^*)$, а число $\lambda = -1/2$ множеству $I_\infty(p, w^*)$.*

Доказательство. Поскольку функции

$$w_1(\xi) = \left|\frac{\xi}{\xi + i}\right|^{1/2} w^*(\xi), \quad w_2(\xi) = |\xi + i|^{1/2} w^*(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

являются четными ($w_i(-\xi) = w_i(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$), то достаточно убедиться, что $w_i \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}_+)$, $i = 1,2$. Пусть $0 \le \alpha < \beta < \infty$, $I = [\alpha, \beta]$, $I' = [\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}]$. Учитывая очевидные неравенства

$$1 \le \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^4 + 1}} \le \sqrt{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{x^s}{|x + i|^s} \le c_1(\beta), \qquad |x + i|^s \le c_2(\beta),\ s > 1,\ 0 \le x \le \sqrt{\beta},$$

где

$$c_1(\beta) = \begin{cases} \beta^{s/2}, & 0 \le \beta < 1 \\ 1, & \beta \ge 1 \end{cases}, \qquad c_2(\beta) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \le \beta < 1 \\ (\beta + 1)^{s/2}, & \beta \ge 1 \end{cases}$$

и сделав замену переменной $x = \sqrt{\xi}$, несложно убедиться, что

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{\xi^{p/2}}{|\xi+i|^{p/2}}\,w^*(\xi)^p\,d\xi\right)^{1/p} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/p}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{x^p}{|x+i|^p}\cdot\frac{|x+i|^p}{|x^2+i|^{p/2}}\,w(x)^p\,dx\right)^{1/p} \le$$

$$\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/p}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{x^p}{|x+i|^p}\,w(x)^p\,dx\right)^{1/p} \le$$

$$\frac{\sqrt{2}c_1(\beta)}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/p}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{I'} w(x)^p\,dx\right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

Аналогично

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{\xi^{-q/2}}{|\xi+i|^{-q/2}}\,w^*(\xi)^{-q}\,d\xi\right)^{1/q} =$$

$$\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\xi^{-q/2}}{|\xi+i|^{-q/2}}\cdot\frac{2^{q/p+1}\xi^{q/2p+1/2}w(\sqrt{\xi})^{-q}}{2\sqrt{\xi}}\,d\xi\right)^{1/q} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{x^{-q}}{|x+i|^{-q}}\cdot\frac{|x+i|^{-q}}{|x^2+i|^{-q/2}}\,2^q\,x^q\,w^{-q}(\xi)\,d\xi\right)^{1/q} \le$$

$$\frac{2}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} (x+i)^q\,w(\xi)^{-q}\,d\xi\right)^{1/q} \le$$

$$\frac{2c_2(\beta)}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{I'} w(\xi)^{-q}\,d\xi\right)^{1/q}. \tag{2.2}$$

Поскольку $c_(\beta)c_2(\beta) \le \sqrt{2}\sqrt{\beta}$, из неравенств (2.1), (2.2) следует, что

$$\sigma(p,w_1) = \frac{4\sqrt{\beta}}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})}\,\sigma(p,w) \le 4\sigma(p,w),$$

т.е. $w_1 \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}_+)$.

Перейдем теперь к доказательству второго утверждения.

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\xi+i|^{p/2}\, w^*(\xi)^p\, d\xi\right)^{1/p} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/p}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} |x+i|^p\cdot\frac{|x^2+i|^{p/2}}{|x+i|^p}\, w(x)^p\, dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\frac{c_2(\beta)}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/p}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{I'} w(x)^p\, dx\right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

Кроме того

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\xi+i|^{-q/2}\, w^*(\xi)^{-q}\, d\xi\right)^{1/q} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{1}{|\xi+i|^{q/2}}\, 2^{q/p+1}\, \xi^{q/2p+1/2}\, w(\xi)^{-q}\, d\xi\right)^{1/q} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{x^q}{|x+i|^q}\cdot\frac{|x+i|^q}{|x^2+i|^{q/2}}\, w(x)^{-q}\, dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\frac{2\sqrt{2}c_1(\beta)}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{I'} w(x)^{-q}\, dx\right)^{1/q}. \tag{2.4}$$

Из неравенств (2.3) и (2.4) следует, что

$$\sigma(p,w_2) \leq \frac{4\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}\,\sigma(p,w) \leq 4\sigma(p,w).$$

Лемма доказана. □

3. Фредгольмовость

Ниже мы предполагаем, что $w \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$, $a^\pm, b^\pm \in (PC(\dot{\mathbb{R}}))^{n\times n}$, матрицы-функции $c_\pm$ и c определены равенствами (1.2), (1.5), а весовая функция w^* определена равенством (1.4). Будем пользоваться обозначениями: E_m – единичная матрица порядка m,

$$E'_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}, \quad E''_{2n} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix},$$

$$c'_+(x) = \begin{pmatrix} a^+(x) & -b^+(x) \\ -b^-(-x) & a^-(-x) \end{pmatrix}, \quad c'_- = \begin{pmatrix} a^-(x) & -b^-(x) \\ -b^+(-x) & a^+(-x) \end{pmatrix},$$
$$c'(x) = (c'_-(x))^{-1} c'_+(x)$$

Заметим, что матрицы-функции $c'_\pm$, c' играют ту же роль для оператора $\mathcal{K}(a^\pm, -b^\pm)$, что $c_\pm$, c для оператора $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$.

Обозначим через $\lambda_j(x)$ $(\lambda'_j(x))$, $j = 1, \dots, 2n$, $x \in \mathbb{R}_+$ собственные значения матрицы $c^{-1}(x-0)c(x+0)$ $(c'^{\,-1}(x-0)c'(x+0))$; через $\lambda_j(0)$ $(\lambda'_j(0))$, $j = 1, \dots, 2n$, собственные значения матрицы $c(+0)E'_{2n}$ $(c'(+0)E'_{2n})$, а через $\lambda_j(\infty)$ $(\lambda'_j(\infty))$, $j = 1, \dots, 2n$, собственные значения матрицы $c(+\infty)E'_{2n}$ $(c'(+\infty)E'_{2n})$. Матрицы-функции $c_\pm$, c, $c'_\pm$, c' связаны соотношениями

$$c'_\pm(x) = E''_{2n} c_\pm(x) E''_{2n}, \quad c'(x) = E''_{2n} c(x) E''_{2n}, \qquad x \in \{0, \infty\} \cup \mathbb{R}_+ \tag{3.1}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\lambda'_j(x) = \lambda_j(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \;\; j = 1, \dots, 2n. \tag{3.2}$$

Кроме того

$$c'(x)E'_{2n} = E''_{2n} c(x) E''_{2n} E'_{2n} = E''_{2n}(-c(x)E'_{2n})E''_{2n}$$

и потому

$$\lambda'_j(0) = -\lambda_j(0), \quad \lambda'_j(+\infty) = -\lambda_j(+\infty) \qquad j = 1, \dots, 2n. \tag{3.3}$$

Сформулируем ряд условий играющие важную роль в исследовании фредгольмовости операторов $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$, $\mathcal{K}(a^\pm, -b^\pm)$, $\mathcal{V}(c^\pm)$.

(A) $\operatorname*{essinf}_{x \in \mathbb{R}_+} |\det c_-(x)| > 0$;

(B) требования

$$\det c(x \pm 0) \neq 0 \;\text{ и }\; {}^1/_{2\pi}\, \arg \lambda_j(x) + \nu \notin \mathbb{Z} \tag{3.4}$$
$$\text{при всех } \; x \in \mathbb{R}_+ \; \text{ и всех } j = 1, \dots, 2n$$

справедливы для каждого $\nu \in [\nu_x^-(p,w), \nu_x^+(p,w)]$;

(B$_*$) требования (3.4) справедливо для каждого $\nu \in \left[\nu_{x^2}^-(p,w^*), \nu_{x^2}^+(p,w^*)\right]$;

(C) требования

$$\det c(+0) \neq 0 \;\text{ и }\; {}^1/_{2\pi}\, \arg \lambda_j(0) + \nu - {}^1/_2 \notin \mathbb{Z} \;\text{ при всех }\; j = 1, \dots, 2n \tag{3.5}$$

справедливы для каждого $\nu \in \left[{}^1/_2\, \nu_0^-(p,w), {}^1/_2\, \nu_0^+(p,w)\right]$;

(C$_*$) требования (3.5) справедливы для каждого $\nu \in \left[\nu_0^-(p,w^*), \nu_0^+(p,w^*)\right]$;

(C′) требования

$$\det c(+0) \neq 0 \;\text{ и }\; {}^1/_{2\pi}\, \lambda_j(0) + \nu \notin \mathbb{Z} \;\text{ при всех }\; j = 1, \ldots, 2n \tag{3.6}$$

справедливы для каждого $\nu \in \left[{}^1/_2\, \nu_0^-(p, w), {}^1/_2\, \nu_0^+(p, w)\right]$;

(C'_*) требования (3.6) справедливы для каждого $\nu \in \left[\nu_0^-(p, w^*), \nu_0^+(p, w^*)\right]$;

(D) требования

$$\det c(+\infty) \neq 0 \;\text{ и }\; {}^1/_{2\pi}\, \arg \lambda_j(+\infty) - \nu - {}^1/_2 \notin \mathbb{Z} \quad \text{при всех }\; j = 1, \ldots, 2n \tag{3.7}$$

справедливы для каждого $\nu \in \left[{}^1/_2\, \nu_\infty^-(p, w), {}^1/_2\, \nu_\infty^+(p, w)\right]$;

(D_*) требования (3.7) справедливы для каждого $\nu \in [\nu_\infty^-(p, w^*), \nu_\infty^+(p, w^*)]$;

(D′) требования

$$\det c(+\infty) \neq 0 \;\text{ и }\; {}^1/_{2\pi}\, \arg \lambda_j(+\infty) - \nu \notin \mathbb{Z} \;\text{ при всех }\; j = 1, \ldots, 2n \tag{3.8}$$

справедливы для каждого $\nu \in \left[{}^1/_2\, \nu_\infty^-(p, w), {}^1/_2\, \nu_\infty^+(p, w)\right]$;

(D'_*) требования (3.8) справедливы для каждого $\nu \in [\nu_\infty^- 0(p, w^*), \nu_\infty^+(p, w^*)]$;

В работе [2] (Теоремы 4.3 и 4.5]) доказаны следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Оператор* $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)\colon (L_p(\mathbb{R}, w))^n \to (L_p(\mathbb{R}, w))^n$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (A), (B_*), (C_*), (D_*).

Теорема 3.2. *Оператор* $\mathcal{V}(c^\pm)\colon (L_p(\mathbb{R}, w))^{2n} \to (L_p(\mathbb{R}, w))^{2n}$ *фредгольмов тогда и только тогда когда одновременно выполнены условия* (A), (B), (C), (C′), (D), (D′).

Применяя теорему 3.2 к оператору $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$, из равенств (3.1)-(3.3) получим

Следствие 3.1. *Оператор* $\mathcal{K}(a^\pm, -b^\pm)\colon (L_p(\mathbb{R}, w))^n \to (L_p(\mathbb{R}, w))^n$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (A), (B_*), (C'_*), (D'_*).

Основная цель этой работы получить критерий фредгольмовости оператора $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ в терминах начальной весовой функции w. Убедимся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3.3. *Числа* $\nu_x^\pm(p, w)$ *и* $\nu_x^\pm(p, w^*)$, $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0, \infty\}$ *связаны следующими соотношениями*

$$\nu_{x^2}^\pm(p, w^*) = \nu_x^\pm(p, w), \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{3.9}$$

$$\nu_0^{\pm}(p, w^*) = \frac{1}{2}\nu_0^{\pm}(p, w), \tag{3.10}$$

$$\nu_\infty^{\pm}(p, w^*) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\nu_0^{\pm}(p, w). \tag{3.11}$$

Доказательство. Из тождества (1.3) следует, что фредгольмовость оператора $\mathcal{V}(c_\pm)$ эквивалентно одновременной фредгольмовости операторов $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ и $\mathcal{K}(a^\pm, -b^\pm)$.

В тех точках $x \in \mathbb{R}_+$ где матрица-функция $c(x)$ обратима и непрерывна имеем $\lambda_j(x) = 1$ при всех $j = 1, \ldots, 2n$. Поэтому требования ${}^1/_{2\pi} \arg \lambda_j(x) + \nu \notin \mathbb{Z}$ автоматически выполнено при всех $\nu \in (0, 1)$.

Пусть матрица-функция c обратима и непрерывна в нуле. Из равенства $c^{-1}(0) = E'_{2n}c(0)E'_{2n}$ (см. [2, формула (4.17)]) следует, что $(c(0)E'_{2n})^2 = E_{2n}$ и потому $\{\lambda_1(0), \ldots, \lambda_{2n}(0)\} \subset \{-1; 1\}$. Следовательно число ${}^1/_{2\pi} \arg \lambda_j(0) + \nu - {}^1/_2$ является целым лишь в случае $\lambda_j(0) = 1$ и $\nu = {}^1/_2$. Но из предложения 4.2 из [2] следует, что ${}^1/_2 \notin \left[\nu_0^-(p, w^*), \nu_0^+(p, w^*)\right] \cup [\nu_\infty^-(p, w^*), \nu_\infty^+(p, w^*)]$. По этой причине условие (C$_*$) выполняется автоматически.

В случае когда $\nu \in \left[{}^1/_2\,\nu_0^-(p, w); {}^1/_2\,\nu_0^+(p, w)\right]$ имеем $0 < \nu < {}^1/_2$ и потому условия (C) и (C$'$) также выполняются автоматически.

Пусть теперь матрица-функция c обратима и непрерывна в $x = \infty$ (т.е. $c(-\infty) = c(+\infty)$). Пользуясь формулой (4.18) аналогично как и в [2] получаем, что $\{\lambda_1(+\infty), \ldots, \lambda_{2n}(+\infty)\} \subset \{-1; 1\}$. Повторяя рассуждения сделанные при $x = 0$ получаем, что условия (D$_*$), (D), (D$'$) выполняются автоматически.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим частный случай когда $n = 1$, $b^\pm = 0$, $a^- = 1$ и

$$a^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \ x \in [-x_0, x_0], \\ \lambda_0 & \text{при } \ x \in \mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0], \quad \lambda_0 \neq 0. \end{cases}$$

В этом случае $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm) = \mathcal{K}(a^\pm, -b^\pm)$ и поэтому $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ и $\mathcal{V}(c^\pm)$ фредгольмовы лишь одновременно. Несложно убедиться, что $c(x) = E_2$ при $x \in [-x_0, x_0]$ и

$$c(x) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } \ x \in \mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0].$$

Собственные значения матрицы $c^{-1}(x_0 - 0)c(x_0 + 0) = c(x_0 + 0)$ совпадают с $\lambda_1(x_0) = \lambda_0$ и $\lambda_2(x_0) = 1$. Поскольку $c(x)$ непрерывна в $x = 0$, $x = +\infty$ и на $\mathbb{R}_+ \setminus \{x_0\}$, то оператор $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда ${}^1/_{2\pi} \arg \lambda_0(x) + \nu \notin \mathbb{Z}$ при $\nu \in \left[\nu_{x_0^2}^-(p, w^*), \nu_{x_0^2}^+(p, w^*)\right]$, а оператор $\mathcal{V}(c^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда ${}^1/_{2\pi} \arg \lambda_0(x) + \nu \notin \mathbb{Z}$ при $\nu \in \left[\nu_{x_0}^-(p, w), \nu_{x_0}^+(p, w)\right]$.

Если отрезки $\left[\nu^-_{x_0^2}(p,w^*),\nu^+_{x_0^2}(p,w^*)\right]$ и $\left[\nu^-_{x_0}(p,w),\nu^+_{x_0}(p,w)\right]$ не совпадают, то существует ν_0 которая принадлежит одному из этих множеств и не принадлежит другому. Выбрав λ_0 так, чтобы $\arg\lambda_0 = 2\pi - 2\pi\nu_0$ мы получим, что один из операторов $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)$ и $\mathcal{V}(c^\pm)$ фредгольмов, а второй нет. Полученное противоречие доказывает равенство (3.9).

Пусть теперь $n=1$, $b^\pm=0$, $a^-=1$, a^+ – отличная от нуля непрерывная на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функция и имеющая конечные пределы $\lim\limits_{x\to-0}a^+(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+0}a^+(x)=\lambda_0^2$, где $\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Для определённости будем считать, что значение $\arg\lambda_0$ в интервале $(0,2\pi)$, равно $2\pi\xi_0$, где $0\le\xi_0<{}^1/_2$.

Матрица

$$c(+0)E_2' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1(0)=\lambda_0$, $\lambda_2(0)=-\lambda_0$. В силу теоремы 3.2 оператор $\mathcal{V}(c^\pm)$ фредгольмов когда числа $\xi_0+\nu$, $\xi_0+\nu-{}^1/_2$, $\xi_0+\nu+{}^1/_2$ не являются целыми при всех $\nu\in\left[{}^1/_2\ \nu_0^-(p,w),{}^1/_2\ \nu_0^+(p,w)\right]$. Заметим, что достаточно требовать эти условия только для первых двух чисел. Заметим также, что условие $\xi_0+\nu-{}^1/_2\in\mathbb{Z}$ эквивалентно тому, что $\nu={}^1/_2-\xi_0$, а условие $\xi_0+\nu\in\mathbb{Z}$ эквивалентно тому, что $\nu=1-\xi_0$, но $1-\xi_0>{}^1/_2$, поэтому $1-\xi_0\notin\left[{}^1/_2\ \nu_0^-(p,w);{}^1/_2\ \nu_0^+(p,w)\right]$. Таким образом, оператор $\mathcal{V}(c^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда

$$ {}^1/_2-\xi_0\notin\left[{}^1/_2\ \nu_0^-(p,w);{}^1/_2\ \nu_0^+(p,w)\right]. \tag{3.12}$$

В силу теоремы 3.1 оператор $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда при $\nu\in\left[\nu_0^-(p,w^*),\nu_0^+(p,w^*)\right]$ числа $\xi_0+\nu-{}^1/_2$ и $\xi_0+\nu$ не являются целыми. Очевидно, что эти числа одновременно не могут быть целыми. Из неравенства $-{}^1/_2<\xi_0+\nu-{}^1/_2<\nu<1$ следует, что условие $\xi_0+\nu-{}^1/_2\in\mathbb{Z}$ эквивалентно $\nu={}^1/_2-\xi_0$. Из неравенства $0<\xi_0+\nu<{}^3/_2$ следует, что если $\xi_0+\nu\in\mathbb{Z}$, то $\nu=1-\xi_0$. Таким образом, оператор $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда либо ${}^1/_2-\xi_0\notin\left[\nu_0^-(p,w^*),\nu_0^+(p,w^*)\right]$, либо

$${}^1/_2-\xi_0\notin\left[-{}^1/_2+\nu_0^-(p,w^*),-{}^1/_2+\nu_0^+(p,w^*)\right].$$

Учитывая, что оператор $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)=\mathcal{K}(a^\pm,-b^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $\mathcal{V}(c^\pm)$, нетрудно понять, что либо имеет место равенство (3.10) либо $\nu_0^\pm(p,w^*)={}^1/_2+{}^1/_2\ \nu_0^\pm(p,w)$. Но во втором случае имеет место

$$1-\nu_0^+(p,w^*)={}^1/_2-{}^1/_2\ \nu_0^+(p,w)<{}^1/_2$$

что противоречит утверждению Леммы 2.1. Таким образом справедивы равенства (3.10).

Рассмотрим теперь случай, когда $n = 1$, $b^{\pm} = 0$, $a^{-} = 1$, a^{+} – отличная от нуля непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, имеющая конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} a^{+}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{+}(x) = \lambda_0^2$, где $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Вновь будем считать, что значение $\arg\lambda_0$ в интервале $[0, 2\pi)$ равно $2\pi\xi_0$, где $0 \le \xi_0 < {}^1/_2$. Из теоремы 3.2 следует, что оператор $\mathcal{V}(c^{\pm})$ фредгольмов тогда и только тогда, когда

$$\xi_0 \notin \left[{}^1/_2\ \nu_\infty^-(p, w); {}^1/_2\ \nu_\infty^+(p, w)\right]. \tag{3.13}$$

Повторяя рассуждения, проведенные при $x = 0$, несложно понять, что в силу теоремы 3.1 оператор $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ фредгольмов тогда и только тогда, когда либо

$$\xi_0 \notin \left[\nu_\infty^-(p, w^*), \nu_\infty^+(p, w^*)\right]$$

либо

$$\xi_0 \notin \left[-{}^1/_2 + \nu_\infty^-(p, w^*), -{}^1/_2 + \nu_\infty^+(p, w^*)\right].$$

Поскольку $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm}) = \mathcal{K}(a^{\pm}, -b^{\pm})$, то операторы $\mathcal{V}(c^{\pm})$ и $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ одновременно фредгольмовы поэтому сравнивая последние два условия с (3.13) получим, что либо $\nu_\infty^{\pm}(p, w^*) = {}^1/_2 + \nu_\infty^{\pm}(p, w)$, либо имеет место равенство (3.11). Но в первом случае

$$-\nu_\infty^-(p, w^*) = -{}^1/_2 - \ \nu_\infty^-(p, w) > -{}^1/_2$$

что противоречит утверждению Леммы 2.1. Теорема доказана. □

Заметим, что при справедливости формул (3.11) условие (D_*) принимает вид (D'), а условие (D'_*) принимает вид (D). Таким образом, из теоремы 3.1 и теоремы 3.3 следует следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Оператор $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ является оператором Фредгольма тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (A), (B), (C) *и* (D').

Следствие 3.2. *Оператор $\mathcal{K}(a^{\pm}, -b^{\pm})$ является оператором Фредгольма тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (A), (B), (C') *и* (D).

Теорема 3.5. *Чтобы оператор $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ был фредгольмовым и одновременно оператор $\mathcal{V}(c^{\pm})$ не был фредгольмовым необходимо и достаточно чтобы были выполнены условия* (A), (B), (C) *и* (D')*, а также*

(E) *либо существуют* $j \in \{1, \dots, 2n\}$ *и* $\nu \in \left[{}^{1}/{}_{2}\ \nu_0^-(p,w); {}^{1}/{}_{2}\ \nu_0^+(p,w)\right]$ *такие, что число* ${}^{1}/{}_{2\pi} \arg \lambda_j(0) + \nu$ *является целым, либо существуют* $j' \in \{1, \dots, 2n\}$ *и* $\nu' \in \left[{}^{1}/{}_{2}\ \nu_0^-(p,w); {}^{1}/{}_{2}\ \nu_0^+(p,w)\right]$ *такие, что число* ${}^{1}/{}_{2\pi} \arg \lambda_{j'}(+\infty) - \nu' - {}^{1}/{}_{2}$ *является целым.*

Эта теорема обобщает теорему 4.2 из [2], где рассмотрен случай степенных весов вида (1.1), на случай произвольной весовой функции $w \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$.

Список литературы

[1] A. Böttcher, Y. I. Karlovich, Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators, al Progress in Mathematics, Birkhäuser, Basel, **154** (1997).

[2] A. G. Kamalyan, "On singular integral operators with reflection", Advances in Operator Theory, **10**:26 (2025).

[3] I. Gohberg, N. Krupnik, Dimensional Linear Singular Integral Equations, Basel, Birkhäuser, **1, 2** (1992).

[4] K. F. Clancy, I. Gohberg, N. Krupnik, Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators, Basel and Boston, Birkhäuser (1981).

[5] N. Krupnik, Banach Algebras with Symbol and Singular Integral Operators, Basel, Birkhäuser (1987).

[6] Г. С. Литвинчук, Краевые Задачи и Сингулярные Интегральные Уравнения со Сдвигом, Москва, Наука (1977).

[7] V. G. Kravchenko, G. S. Litvinchuk, Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift, Dordrecht a.o. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994).

[8] N. Karapetiants, S. Samko, Equations with Involutive Operators, Boston, Birkhäuser (2001), (Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, Уравнения с инволютивными операторами и их приложения, Ростовский ун-т, Ростов на Дону (1988)).

[9] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, "Об одномерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом", Известия АН Арм. ССР, **8**: 1, 3 – 12 (1973); English translation in Convolution equations and singular integral operators, Operator Theory: Advances and Applications, **206**, 201 – 211 (2010).

[10] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, "Об алгебрах сингулярных интегральных операторов со сдвигом", Матем. исследования, Кишинев, **8**:2 (28), 170 – 175 (1973). English translation in Convolution equations and singular integral operators, Operator Theory: Advances and Applications, **206**, 213–217 (2010).

[11] I. M. Spitkovsky, "Singular integral operators with PC symbols on the spaces with general weights", Journal of Functional Analysis, **105**, 129 – 143 (1992).

[12] A. Böttcher, Y. I. Karlovich and I. M. Spitkovsky, Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions, Birkhäuser, Basel (2002).

Поступила 12 июня 2025

После доработки 12 июня 2025

Принята к публикации 25 августа 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 6, 2025, стр. 15 – 27.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕПСТРА И КЕПСТРА МЕТОДОМ РЯДОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ ДЛЯ ЦЕЛЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Г. В. МИКАЕЛЯН, В. Г. МИКАЕЛЯН

Ереванский государственный университет
ООО Крисп
E-mails: *gagik.mikaelyan@ysu.am*; *mik.vazgen@gmail.com*

Аннотация. Вводятся обобщения понятий сепстра и кепстра в теории обработки сигналов. Предлагаются универсальные методы нахождения сепстра и кепстра, получены формулы их вычисления по предыдущим значениям.

MSC2020 number: 42A38; 30D30; 92C55.

Ключевые слова: обработка сигналов; сепстр; кепстр; ряды и преобразования Фурье.

1. Введение

В теории обработки сигналов часто используют понятия «сепстр» и «кепстр». Они применяются при обработке речевых сигналов, сейсмических сигналов, медикобиологических сигналов, старых звукозаписей, гидроакустических сигналов.

Слово «сепстр» (cepstrum), является анаграммой слова «спектр» (spectrum), впервые ввели Богерт, Хили и Тьюки [1] в 1963 г.. Шафер[2] в 1969 г. рассматривал «комплексный сепстр». Похожее слово «кепстр» (kepstrum) ввели Силвиа и Робинсон [3] в 1978 г. С другой стороны термин «кепстр» связывают с именем Колмогорова, которым был предложен специальный степенной ряд для обработки регулярных стационарных случайных процессов [4], первые буквы слова «kepstrum» могут быть расшифрованы как «Kolmogorov-equation power- series time response», хотя термин «кепстр» в работах Колмогорова не упоминается (см. [5]).

Системой называется преобразование, которое переводит входящий сигнал $x(n)$ в выходящий сигнал $y(n)$. Система называется инвариантной по времени n, если сигналу $x(n-k)$ соответствует сигнал $y(n-k)$, где k любое положительное или отрицательное целое число. Линейная, инвариантная по времени система

(LTI) называется BIBO (bounded input bounded output, ограниченный вход- ограниченный выход) стабильным, если из ограниченности последовательности $x(n)$ следует ограниченность последовательности $y(n)$ ([6], [7]).

z-преобразование дискретного сигнала $x(n)$ называется степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

где z – комплексное переменное.

LTI система является BIBO стабильной тогда и только тогда, когда область сходимости z-преобразования $f(z)$ содержит единичную окружность([7]).

Допустим, что $\log f(z)$ имеет сходящийся степенной ряд вида

$$\log f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(r,f) z^{-n}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r_1 < |z| < r_2,$$

где

$$d_n(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta$$

Определение 1.1. *Последовательность $d_n(r,f)$ $(r_1 < r < r_2)$ назовем обобщенным комплексным кепстром.*

Если область сходимости $r_1 < |z| < r_2$ содержит единичную окружность, т.е. $r_1 < 1 < r_2$, то последовательность $d_n(1,f)$ называется комплексным кепстром.

Обычно в применениях $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \arg f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta$ игнорируется и рассматривается только последовательность

$$c_n(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| e^{-in\theta} d\theta$$

Определение 1.2. *Последовательность $c_n(r,f)(r_1 < r < r_2)$ назовем обобщенным реальным кепстром.*

Если область сходимости $r_1 < |z| < r_2$ содержит единичную окружность, т.е. $r_1 < 1 < r_2$, то последовательность $c_n(1,f)$ называется реальным кепстром. В случае, когда z-преобразование $f(z)$ дискретного сигнала $x(n)$ является рациональной функцией, Опенгеймом и Шафером [6], получены формулы для кепстра $f(z)$ и оценки для кепстральных коэффициентов. Комплексный сепстр определяется формулой $C_c = F^{-1}\{\log F\{f\}\}$ или формулой $C_c = F\{\log F\{f\}\}$, где F преобразование Фурье. Реальный сепстр определяется формулой $C_r = F^{-1}\{\log |F\{f\}|\}$ или формулой $C_r = F\{\log |F\{f\}|\}$.

Определение 1.3. *Если* $\boldsymbol{f}$ *спектр входного сигнала, то при* $v < 0$ *интеграл*

$$H(x, v, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log f(u + iv) du$$

назовем обобщенным комплексным сепстром. При $v = 0$ *интеграл называется комплексным сепстром.*

Определение 1.4. *Если* $\boldsymbol{f}$ *спектр входного сигнала, то при* $v < 0$ *интеграл*

$$H(x, v, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log |f(u + iv)| du$$

назовем обобщенным реальным сепстром. При $v = 0$ *интеграл называется реальным сепстром.*

В настоящей статье предлагаются универсальные методы нахождения обобщенного кепстра и сепстра (в частности кепстра и сепстра), формулы их вычисления по предыдущим значениям.

2. Кепстр

Так называемый «Метод рядов фурье для целых и мероморфных функций», основанный на использовании ряда Фурье для $\ln\left|f\left(re^{i\vartheta}\right)\right|$ как функции от ϑ систематически применяется, начиная с 60-х годов прошлого столетия Рубелем, Тейлором [8], а затем многими другими математиками. Метод основан на следующей лемме, полученной Неванлинной в 1923 году.

Лемма 2.1. *Пусть* f *мероморфная в круге* $\{z : |z| < R\}$ *функция.* $f(0) = 1, \{a_v\}, \{b_\mu\}$ *-последовательности нулей и полюсов функции* f *и*

$$\log f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

разложение в некоторой окрестности точки $z = 0$*. Тогда для коэффициентов Фурье(обобщенного реального кепстра)*
$c_k(r) \equiv c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\vartheta}\right)\right| e^{-ik\vartheta} d\vartheta$
справедливы формулы

$$c_0(r) = \sum_{|a_v| \le r} \log \frac{r}{|a_v|} - \sum_{|b_\mu| \le r} \log \frac{r}{|b_\mu|},$$

(2.1)

$$c_k(r) = \frac{1}{2}\alpha_k r^k + \frac{1}{2k} \sum_{|a_v| \le r} \left(\left(\frac{r}{a_v}\right)^k - \left(\frac{\overline{a_v}}{r}\right)^k\right) - \frac{1}{2k} \sum_{|b_\mu| \le r} \left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \left(\frac{\overline{b_\mu}}{r}\right)^k\right)$$

при $k \ge 1$ *и* $c_k = \overline{c_{-k}}$ *при* $k \le -1$.

Пусть $\{a_v\}$-последовательность комплексных чисел, $0<|a_v|\leq|a_{v+1}|\to\infty$. Положим $\varphi_v=\arg a_v, 0\leq\varphi_v<2\pi$. При целых k определим характеристики

$$n_k\left(r,\{a_v\}\right)=\sum_{|a_v|\leq r}e^{-ik\varphi_\nu},\quad N_k\left(r,\{a_v\}\right)=\int_0^r\frac{n_k\left(t,\{a_v\}\right)}{t}dt.$$

Одно из доказательств леммы основано на вычислении коэффициентов Фурье $d_k(r,f)$ функции $\log f\left(re^{i\theta}\right)$ (обобщенного комплексного кепстра)

$$d_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f\left(re^{i\theta}\right)e^{-ik\theta}d\theta.$$

Доказывается, что при $k\geq1$

(2.2)

$$d_k(r,f)=-\frac{1}{k}\left(n_0\left(r,\{a_\nu\}\right)-n_0\left(r,\{b_\mu\}\right)\right)+\alpha_kr^k+\frac{1}{k}\sum_{|a_\nu|<r}\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{|b_\mu|<r}\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k$$

и при $k\leq-1$

(2.3) $$d_k(r,f)=-\frac{1}{k}\left(n_0\left(r,\{a_v\}\right)-n_0\left(r,\{b_\mu\}\right)\right)+\frac{1}{k}\sum_{|a_v|<r}\left(\frac{r}{a_v}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{|b_\mu|<r}\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k$$

(см.[8], [9])). Из равенства

$$c_k(r,f)=\frac{d_k(r,f)+\overline{d_{-k}(r,f)}}{2}$$

получаются формулы (2.1).

В [9] установлены в некотором смысле обратные формулы для коэффициентов Фурье $c_k(r,f)$. Справедлива следующая лемма:

Лемма 2.2. *Пусть f мероморфная в круге $\{z:|z|<R\}$ функция. $f(0)=1,\{a_v\},\{b_\mu\}$ -последовательности нулей и полюсов функции f. Тогда при $0<r<R$ справедливо равенство*

$$c_k(r)=N_k(r)+k^2\int_0^r\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{c_k(\tau)}{\tau}d\tau,$$

где $N_k(r)=N_k\left(r,\{a_v\}\right)-N_k\left(r,\{b_v\}\right)$.

При $\delta>0$ справедливы оценки

$$|c_k(r)|\leq\frac{|c_k((1+\delta)r)|}{(1+\delta)^{|k|}}+\frac{1}{|k|+1}(n((1+\delta)r,f)+n((1+\delta)r,1/f))$$

$$|c_k(r)|\leq\frac{1}{(1+\delta)^{|k|}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\ln|f\left((1+\delta)re^{i\vartheta}\right)||d\vartheta+$$
$$+\frac{1}{|k|+1}(n((1+\delta)r,f)+n((1+\delta)r,1/f))$$

где $n(r,f)\equiv n_0\left(r,\{b_\mu\}\right)$ и $n(r,1/f)\equiv n_0\left(r,\{a_\nu\}\right)$.

Доказательство этих неравенств аналогичны случаю $\delta = 1$ в [9].

Последние оценки являются обобщениями оценок, используемых в теории цифровой обработки сигналов при $r = 1$ ([6]).

Следующая лемма также доказана в [9].

Лемма 2.3. *Пусть f мероморфная функция порядка $\rho, f(0) = 1, \{a_v\}, \{b_\mu\}$ последовательности нулей и полюсов функции f. Тогда при $k > \rho$ коэффициенты Фурье имеют вид*

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2k}\left(\sum_{|b_\mu|>r}\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \sum_{|a_\nu|>r}\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k + \sum_{|b_\mu|\le r}\left(\frac{\overline{b_\mu}}{r}\right) - \sum_{a_\nu\le r}\left(\frac{\overline{a_\nu}}{r}\right)\right) \tag{2.4}$$

Сделаем дополнение к этой лемме. По теореме Адамара для мероморфных функций, если f мероморфная функция порядка $\rho(\rho < \infty), [\rho] = \mathrm{q}, f(0) = 1$, с нулями и полюсами $\{a_\nu\}, \{b_\mu\}$, то

$$f(z) = \exp\left\{P_{\mathrm{q}}(z)\frac{\prod_{v=1}^{\infty} E\left(z/a_v, q\right)}{\prod_{v=1}^{\infty} E\left(z/b_\mu, \mathrm{q}\right)}\right\},$$

где $P_{\mathrm{q}}(z) = s_{\mathrm{q}}z^q + s_{\mathrm{q}-1}z^{q-1} + \cdots + s_1 z$ многочлен, степень которой не превосходит q и

$$E(u, q) = (1-u)\exp\left\{u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^q}{q}\right\}$$

первичный множитель Вейерштрасса.

Отсюда получаем, что в окрестности $z = 0$ имеет место разложение

$$\log f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k,$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} s_k, \quad k = 1, \ldots, q \\ -\frac{1}{k}\sum_v a_v^{-k} + \frac{1}{k}\sum_v b_v^{-k}, \quad k = q+1, q+2, \ldots \end{cases}$$

Следовательно, при $k = 1, \ldots, q$ коэффициенты Фурье можно вычислить по формуле

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2}s_k r^k + \frac{1}{2k}\sum_{|a_v|\le r}\left(\left(\frac{r}{a_v}\right)^k - \left(\frac{\overline{a_v}}{r}\right)^k\right) - \frac{1}{2k}\sum_{|b_\mu|\le r}\left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \left(\frac{\overline{b_\mu}}{r}\right)^k\right).$$

В качестве примера рассмотрим гамма функцию Эйлера, которую можно представить в виде

$$\Gamma(z+1) = \frac{e^{-\gamma z}}{\prod_{v=1}^{\infty} E(-z/v, 1)}$$

где $\gamma-$ постоянная Эйлера. Для этой функции

$$\alpha_k = \begin{cases} -\gamma & \text{при } k=1 \\ \frac{(-1)^k}{k}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v^k} & \text{при } k>1 \end{cases}$$

По лемме 2.1 будем иметь

$$c_0(r,\Gamma) = -\sum_{v\le r}\log\frac{r}{v},$$

$$c_1(r,\Gamma) = -\frac{1}{2}\gamma r + \frac{1}{2}\sum_{v\le r}\left(\frac{r}{v}-\frac{v}{r}\right),$$

$$c_k(r,\Gamma) = \frac{(-1)^k}{2k}\left(\sum_{v>r}\left(\frac{r}{v}\right)^k - \sum_{v\le r}\left(\frac{v}{r}\right)^k\right) \qquad \text{при } k>1.$$

Полагая в последних формулах $r=1$, получим следующие формулы для кепстра

$$c_0(1,\Gamma)=0, \quad c_1(1,\Gamma) = -\frac{1}{2}\gamma$$

$$c_k(1,\Gamma) = \frac{(-1)^k}{2k}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v^k} = \frac{(-1)^k}{2k}\zeta(k) \qquad \text{при } k>1,$$

где ζ - дзета функция Римана.

В теории цифровой обработки сигналов очень часто встречаются последовательности $x(n)$, z-преобразование которых является рациональной функцией вида (например, если $x(n)$-сумма комплексных экспоненциальных последовательностей)

$$H(z) = Bz^p\frac{\prod_{v=1}^{N}(z-a_v)}{\prod_{\mu=1}^{M}(z-b_\mu)}$$

где B-положительное постоянное, p-целое число, a_ν и b_μ-комплексные числа.

Вычислим коэффициенты Фурье функций $\log f, \log|f|$ и как следствие получим формулы для кепстральных коэффициентов.

Рассмотрим функцию

$$H_1(z) = \frac{H(z)}{Bz^p}\frac{\prod_{\mu=1}^{M}(-b_\mu)}{\prod_{v=1}^{N}(-a_v)}.$$

Имеем

$$H_1(z) = \frac{\prod_{v=1}^{N}(1-z/a_v)}{\prod_{\mu=1}^{M}(1-z/b_\mu)}$$

и в окрестности нуля

$$\ln H_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{\mu=1}^{M}b_\mu^{-k} - \sum_{v=1}^{N}a_v^{-k}\right)z^k.$$

Поскольку

$$d_k(r,H) = d_k\left(r,H_1\right) - \frac{|p|}{k}$$

следовательно, по формулам (2.2), (2.3) будем иметь: при $k \geq 1$

$$d_k(r,H) = -\frac{|p|}{k} - \frac{1}{k}\left(n_0\left(r,\{a_v\}\right) - n_0\left(r,\{b_\mu\}\right)\right) + \frac{r^k}{k}\left(\sum_{\mu=1}^{M} b_\mu^{-k} - \sum_{v=1}^{N} a_v^{-k}\right)$$
$$+ \frac{1}{k}\sum_{|a_v|<r}\left(\frac{r}{a_v}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{|b_\mu|<r}\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k$$

при $k \leq -1$

$$d_k(r,H) = -\frac{|p|}{k} - \frac{1}{k}\left(n_0\left(r,\{a_v\}\right) - n_0\left(r,\{b_\mu\}\right)\right) + \frac{1}{k}\sum_{|a_v|<r}\left(\frac{r}{a_v}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{|b_\mu|<r}\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k.$$

В частном случае $r = 1$ из последних формул получаются формулы Опенгейма и Шафера [6].

Так как $c_k(r,H) = c_k\left(r,H_1\right)$ при $k \neq 0$, то применяя формулы (2.1), получим

$$c_0(r,H) = c_0\left(r,H_1\right) + \ln B + \sum_{v=1}^{N}\ln|a_v| - \sum_{\mu=1}^{M}\ln|b_\mu| + p\ln r$$

$$c_0(r,H) = \sum_{|a_v|\leqslant r}\log\frac{r}{|a_v|} - \sum_{|b_\mu|\leqslant r}\log\frac{r}{|b_\mu|} + \ln B + \sum_{k=1}^{N}\ln|a_k| - \sum_{k=1}^{M}\ln|b_k| + p\log r$$

при $k \neq 0$

$$c_k(r,H) = \frac{1}{2k}r^k\left(\sum_{\mu=1}^{M} b_\mu^{-k} - \sum_{v=1}^{N} a_v^{-k}\right)$$
$$+ \frac{1}{2k}\sum_{|a_v|\leq r}\left(\left(\frac{r}{a_v}\right)^k - \left(\frac{\overline{a_v}}{r}\right)^k\right) - \frac{1}{2k}\sum_{|b_\mu|\leq r}\left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \left(\frac{\overline{b_\mu}}{r}\right)^k\right).$$

При $k \neq 0$ для вычисления коэффициентов $c_k(r,H)$ можно было применить лемму 2.3 и представить их в виде формулы (2.4).

Если все нули и полюсы функции H находятся в единичном круге для кепстральных коэффициентов, получаем формулы

$$c_k(1,H) = \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{M}\bar{b}_i^k - \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{N}\bar{a}_i^k, \quad k \neq 0$$
$$c_0(1,H) = \ln B$$

z-преобразованием дискретного сигнала $x(n) = a^n\cos\left(\omega_0 n\right)$ является функция

$$H(z) = \frac{z^2 - az\cos\omega_0}{z^2 + a^2 - 2az\cos\omega_0}, \quad |z| > |a|.$$

Замечая, что

$$H(z)=\frac{z\left(z-a\cos\omega_0\right)}{\left(z-ae^{i\omega_0}\right)\left(z-ae^{-i\omega_0}\right)},$$

из предыдущих формул получаем при $|a|<1$

$$c_k(1,H)=\frac{1}{k}\bar{a}^k\cos k\omega_0-\frac{1}{2k}\bar{a}^k\cos^k\omega_0,\quad k\neq 0,$$

$$c_0(1,H)=0.$$

3. Сепстр

Справедливы следующие теоремы (см.[10], [11]).

Теорема 3.1. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в нижней полуплоскости $G=\{w:\operatorname{Im}w<0\}$, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty)=1$. Пусть*

$$\frac{e^{xv_0}}{i\sqrt{2\pi}x}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}\frac{f'\left(u+iv_0\right)}{f\left(u+iv_0\right)}du=h(x),\quad v_0<\min_k v_k,v_0<\min_k q_k,x\neq 0$$

Тогда $h(x)$ не зависит от v_0, равен нулю при $x>0$ и при любом $v<0$ справедливы следующие формулы для обобщенного реального и комплексного сепстра

$$\Omega(x,v,f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}\log|f(u+iv)|du=\frac{1}{2}\left(e^{-xv}h(x)+e^{xv}\overline{h(-x)}\right)-$$

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{v_k<v}e^{-ixu_k}\operatorname{sh}\left(x\left(v_k-v\right)\right)+\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{q_k<v}e^{-ixp_k}\operatorname{sh}\left(x\left(q_k-v\right)\right)\tag{3.1}$$

$$H(x,v,f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}\log f(u+iv)du=$$

$$=e^{-xv}\left\{-\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{v_k<v}e^{-ixw_k}+\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{q_k<v}e^{-ixr_k}+h(x),\right\},$$

где $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}=\{u_k+iv_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность нулей а $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}=\{p_k+iq_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность полюсов функции f.

Теорема 3.2. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в области G, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty)=1$. Тогда при $v\to 0$ справедлива формула*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\log|f(u+iv)|du=\sum_{v_k<v}\left(v-v_k\right)+\sum_{q_k<v}\left(v-q_k\right)+O(1),v<0$$

где v_k и q_k мнимые части соответственно нулей и полюсов функции f (интеграл следует понимать в смысле главного значения).

Пусть последовательности нулей и полюсов функции f удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_k| < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|q_k| < +\infty. \tag{3.2}$$

Следствие 3.1. *Если последовательности нулей и полюсов функции f удовлетворяют условиям (3.2), то*

$$\lim_{v\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\log|f(u+iv)|du = \frac{1}{2}(h(x)+\overline{h(-x)})-$$
$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{v_k<0} e^{-ixu_k}\operatorname{sh}(xv_k) + \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{q_k<0} e^{-ixp_k}\operatorname{sh}(xq_k) \tag{3.3}$$

Доказательство. Обозначим через $n(v)$ количество нулей функции f в полуплоскости $\{w : \operatorname{Im} w < v\}$.

Из условий (3.2) следует, что $\lim\limits_{v\to 0} vn(v) = 0$. Переходя к пределу при $v \to 0$ в равенстве

$$\sum_{v_k<v} e^{-ixu_k}\operatorname{sh}(x(v_k - v)) = \operatorname{ch}(xv)\sum_{v_k<v} e^{-ixu_k}\operatorname{sh}(xv_k) - \operatorname{sh}(xv)\sum_{v_k<v} e^{-ixu_k}\operatorname{ch}(xv_k)$$

и в аналогичном равенстве для полюсов, получаем формулу (3.3).

Из условия $f(\infty) = 1$ следует, что в окрестности бесконечно удаленной точки справедливо разложение

$$f(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{w^k}$$

Отсюда следует,что

$$\log f(w) = \frac{\varphi(w)}{w}, \text{ где } \varphi(w) = O(1) \text{ при } w \to \infty.$$

Следствие 3.2. *Если функция f мероморфна в полуплоскости $G = \{w : \operatorname{Im} w \le 0\}$ и в окрестности бесконечно удаленной точки $f(w) = 1 + \frac{\varphi(w)}{w^k}, k > 1$, то*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\log|f(u)|du = \frac{1}{2}(h(x)+\overline{h(-x)})-$$
$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{v_k<0} e^{-ixu_k}\operatorname{sh}(xv_k) + \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{q_k<0} e^{-ixp_k}\operatorname{sh}(xq_k).$$

Доказательство. Справедлива оценка

$$|f(u+iv)| \le \frac{c}{|u|^k} \quad \text{при} \quad |u| > \delta(\delta > 0), k > 1,$$

где c - постоянная.

Далее, если u_0 действительный корень функции f порядка $k \geq 1$, то

$$f(w) = (w - u_0)^k \, \psi(w),$$
$$\log |f(w)| = k \log |w - u_0| + \log |\psi(w)|,$$

где $\Psi(u_0) \neq 0$.
Обозначая через $\gamma(\varepsilon)$ полуокружность $\left\{w : w - u_0 = \varepsilon e^{i\vartheta}, \operatorname{Im} w < 0\right\}$ будем иметь

$$\int_{\gamma(\varepsilon)} e^{-ixw} \log |f(w)| dw \leq O(1) \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$$

Рассмотрим функцию $f(w) = 1 + \frac{A}{w}$, где A - постоянная. Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log \left| 1 + \frac{A}{u + iv} \right| du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log \frac{(u+A)^2 + v^2}{u^2 + v^2} du =$$

$$= 2 \frac{1 - e^{ixA}}{ix} \int_0^{+\infty} \frac{u \sin(ux)}{u^2 + v^2} du, x > 0$$

то вычисляя последний интеграл при $v < 0$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log \left| 1 + \frac{A}{u + iv} \right| du = 2\pi i \frac{1 - e^{ixA}}{x} e^{-|xv|}, x \neq 0.$$

Таким образом, в данном случае реальный сепстр не существует , а обобщенный сепстр существует.

Пусть $\{w_k\}_1^\infty = \{u_k + iv_k\}_1^\infty$-последовательность комплексных чисел, $0 < |v_{k+1}| \leq |v_k| \to 0$. Положим

$$n_x\left(v, \{w_k\}\right) = \sum_{v_k < v} e^{-ixu_k}, \quad N_x\left(v, \{w_k\}\right) = \int_{-\infty}^{v} n_x\left(t, \{w_k\}\right) dt$$

Пусть теперь $\{w_k\}_{k=1}^\infty = \{u_k + iv_k\}_{k=1}^\infty$ последовательность нулей а $\{r_k\}_{k=1}^\infty = \{p_k + iq_k\}_{k=1}^\infty$ последовательность полюсов функции f. Обозначим

$$N_x(v) = N_x\left(v, \{w_k\}\right) - N_x\left(v, \{r_k\}\right).$$

Справедлива следующая теорема представления преобразования $\Omega(x, v, f)$.

Теорема 3.3. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в нижней полуплоскости $G = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty) = 1$. Тогда справедливо представление*

$$\Omega(x, v, f) = x^2 \int_{-\infty}^{v} dt \int_{-\infty}^{t} \Omega(x, \tau) d\tau - \sqrt{2\pi} N_x(v). \tag{3.4}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{v_k<v} e^{-ixu_k} \operatorname{sh}\left(x\left(v_k-v\right)\right)=\int_{-\infty}^{v} \operatorname{sh} x(t-v) d n_x\left(t,\left\{w_k\right\}\right)=$$

$$=-x \int_{-\infty}^{v} \operatorname{ch} x(t-v) n_x\left(t,\left\{w_k\right\}\right) d t=-x \int_{-\infty}^{v} \operatorname{ch} x(t-v) d N_x\left(t,\left\{w_k\right\}\right)=$$

$$=-x N_x\left(v,\left\{w_k\right\}\right)+x^2 \int_{-\infty}^{v} \operatorname{sh} x(t-v) N_x\left(t,\left\{w_k\right\}\right) d t$$

Следовательно, из формулы (3.1) вытекает представление
$\Omega(x, v, f)=\sqrt{2 \pi} N_x(v)-x \sqrt{2 \pi} \int_{-\infty}^{v} N_x(t) \operatorname{sh} x(t-v) d t+\frac{1}{2}\left(e^{-x v} h(x)+e^{x v} \overline{h(-x)}\right)$.
Обозначим
$\Phi_x(v)=x \int_{-\infty}^{v} N_x(t) \operatorname{sh} x(t-v) d t$.
Тогда для производных этой функции справедливы равенства
$\Phi_x^{\prime}(v)=-x^2 \int_{-\infty}^{v} N_x(t) \operatorname{ch} x(t-v) d t$,
$\Phi''{}_x(v)=-x^2 N_x(v)+x^3 \int_{-\infty}^{v} N_x(t) \operatorname{sh} x(t-v) d t$,
$\Phi''{}_x(v)=-x^2 N_x(v)+x^2 \Phi_x(v)$.
Таким образом

$$\Phi_x(v)=N_x(v)+\frac{1}{x^2} \Phi''{}_x(v) \tag{3.5}$$

и

$$\Omega(x, v, f)=\sqrt{2 \pi} N_x(v)-\sqrt{2 \pi} \Phi_x(v)+H_x(v), \tag{3.6}$$

где $H_x(v)=\frac{1}{2}\left(e^{-x v} h(x)+e^{x v} \overline{h(-x)}\right)$.

Из (3.5) и (3.6) имеем
$\Omega(x, v, f)=-\frac{1}{x^2} \sqrt{2 \pi} \phi_x^{\prime \prime}(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{H}_x(\boldsymbol{v})$
или

$$\sqrt{2 \pi} \Phi_x^{\prime \prime}(v)=x^2 H_x(v)-x^2 \Omega(x, v, f).$$

Отсюда получаем равенство

$$\sqrt{2 \pi} \phi_x^{\prime}(\boldsymbol{v})=\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}} e^{x v} \overline{h(-x)}-x^2 \int_{-\infty}^{v} \Omega(x, t, f) d t$$

Интегрируя еще раз, при $x>0$ будем иметь

$$\sqrt{2 \pi} \phi_x(\boldsymbol{v})=\frac{1}{2} e^{x v} \overline{h(-x)}-x^2 \int_{-\infty}^{v} \int_{-\infty}^{t} \Omega(x, t, f) d t. \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) получается представление (3.4).

Рассмотрим теперь следующий важный для применений пример. Пусть $f(w)=\frac{p(w)}{q(w)}$ рациональная функция, где p и q полиномы, $f(\infty)=1$. Имеем $\frac{f^{\prime}(w)}{f(w)}=\frac{p^{\prime}(w)}{p(w)}-\frac{q^{\prime}(w)}{q(w)}$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ нули полинома p порядков $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ а $b_1, \ldots, b_m$ нули полинома q порядков $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Тогда

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \frac{\alpha_1}{w-a_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{w-a_n}$$

$\frac{q'(w)}{q(w)} = \frac{\beta_1}{w-b_1} + \cdots + \frac{\beta_m}{w-b_m}$. При $x<0, v_0 < \min \alpha_k$ вычисляя интеграл

$$\frac{e^{xv_0}}{i\sqrt{2\pi}x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{u+iv_0-a_k}du = \frac{e^{xv_0}}{i\sqrt{2\pi}x}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{-ix\operatorname{Re}a_k}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\frac{\alpha_k}{u+i\left(v_0-\operatorname{Ima}a_k\right)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{-ixa_k}$$

при $x<0$ получим

$$h(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{-ixa_k} - \sum_{k=1}^{m}\beta_k e^{-ixb_k}\right). \tag{3.8}$$

По формуле (3.1) теоремы 3.1 в силу (3.8) при $x<0$ имеем

$$\begin{aligned}\Omega(x,v,f) =& \frac{\sqrt{2\pi}}{2x}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{-ixa_k} - \sum_{k=1}^{m}\beta_k e^{-ixb_k}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{v_k<v}e^{-ixu_k}\operatorname{sh}\left(x\left(v_k-v\right)\right)\\ &+\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{q_k<v}e^{-ixp_k}\operatorname{sh}\left(x\left(q_k-v\right)\right)\end{aligned}\tag{3.9}$$

где $a_k = u_k+iv_k, b_k = p_k+iq_k$ соответственно нули полиномов p и q, и в последних двух суммах участвуют те из них, которые лежат в нижней полуплоскости.

В силу (3.3) при $x<0$ имеем также

$$\begin{aligned}\lim_{\mathrm{v}\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}\log|f(u+iv)|du =& \frac{\sqrt{2\pi}}{2x}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{-ixa_k} - \sum_{k=1}^{m}\beta_k e^{-ixb_k}\right)\\ &-\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{v_k<0}e^{-ixu_k}\operatorname{sh}\left(xv_k\right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{q_k<0}e^{-ixp_k}\operatorname{sh}\left(xq_k\right)\end{aligned}\tag{3.10}$$

По формулам (3.9) и (3.10) для функции

$$H(z) = \frac{z^2 - az\cos\omega_0}{z^2+a^2-2az\cos\omega_0} \equiv \frac{z\left(z-a\cos\omega_0\right)}{\left(z-ae^{i\omega_0}\right)\left(z-ae^{-i\omega_0}\right)}$$

можно вычислить $\Omega(x,v,H)$ и $\lim_{v\to 0}\Omega(x,v,H)$ при всех ω_0 и a.

В частности, при $0<\omega_0<\pi, a>0$

$$\lim_{v\to 0}\Omega(x,v,H) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2x}\left(1+e^{-ixa\cos\omega_0}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{x}e^{-ixae^{i\omega_0}}$$

при $\omega_0 = 0$ и $\operatorname{Im}\alpha < 0$

$$\lim_{v\to 0}\Omega(x,v,H) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2x}\left(1-e^{-ix\bar{a}}\right)$$

при $\omega_0 = 0$ и $\mathrm{Im}\alpha \geq 0$

$$\lim_{v\to 0} \Omega(x, v, H) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2x}\left(1 - e^{-ixa}\right).$$

Замечание. Из условия $f(\infty) = 1$ следует, что в окрестности бесконечно удаленной точки справедливо разложение

$f(w) = 1 + \frac{\varphi(w)}{w^k}, k \geq 1, \varphi(\infty) = \varphi_\infty \neq 0.$

Тогда

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = \frac{\Phi(w)}{w^{k+1}}, \Phi(\infty) = -k\varphi_\infty$$

и при $x < 0$ справедлива оценка

$$|h(x)| \leq \frac{e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi|x|}} \max_{-\infty<u<+\infty} |\Phi\left(u + iv_0\right)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{|u + iv_0|^{k+1}} =$$

$$= \frac{e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi}|x|\,|v_0|^k} \max_{-\infty<u<+\infty} |\Phi\left(u + iv_0\right)| \frac{2^{k-1}\Gamma^2(k/2)}{(k-1)!}$$

где Г-гамма функция Эйлера.

Список литературы

[1] B. P. Bogert, M. J. R. Healy, and J. W. Tukey, The Quefrency Alanysis of Time series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-Autocovariance, Cross-Cepstrum, and Saphe Cracking, in Proc. of the Symp. on Time Series Analysis, by M. Rosenblatt (Ed.),. Wiley, NY, 209 – 243 (1963).

[2] R. W. Schafer, “Echo removal by discrete generalized linear filtering”, Res. Lab. Electron. MIT, Tech. Rep., 466 (1969).

[3] M.T. Silvia, E.A. Robinson, “Use of the kepstrum in signal analysis”, Geoexploration **16**, 55 – 73 (1978).

[4] А. Н. Колмогоров, “Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве”, Бюллетень МГУ, Математика, **2**, no. 6, 3 – 40 (1941).

[5] R. B. Randall, “A history of cepstrum analysis and its application to mechanical problems”, Mechanical Systems and Signal Processing, **97**, 3 – 19 (2017).

[6] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, Digital Signal Processing, Prentice-Hall (2010).

[7] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, Digital Signal Processing, Prentice-Hall (2007).

[8] L. A. Rubel, B. A, Taylor, “A Fourier series method for meromorphic and entire functions”, Bulletin de la Société Mathématique de France **96**, 53 – 96 (1968).

[9] А. А. Кондратюк, Ряды Фурье и Мероморфные Функции, Львов, Изд. Вища школа (1988).

[10] Г. В. Микаелян, “Преобразование Фурье, ассоциированное с функциями, мероморфными в полуплоскости”, Изв АН Арм ССР, Сер. Матем., **XIX**, no. 5, 361 – 376 (1984).

[11] Г. В. Микаелян, “О росте функций, мероморфных в полуплоскости”, Известия вузов, **4**, 79 – 82 (1988).

Поступила 17 июня 2025

После доработки 17 июня 2025

Принята к публикации 25 августа 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 6, 2025, стр. 28 – 35.

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ФРАКТАЛОВ В КОМПОЗИЦИЯХ АРМЯНСКОЙ АРХИТЕКТУРЫ

А. А. НАХАПЕТЯН

Университет Ла Сапиенца, Рим, Италия
E-mail:*ar.nahapetyan@gmail.com*

Аннотация. Приводится фрактальный анализ следующих объектов современной армянской архитектуры: Ереванский каскад, Правительственное здание №2 на Площади Республики, собор Святого Григория Просветителя и церковь Святой Троицы. На основе вычисления соответствующих фрактальных размерностей (метрика Хаусдорфа–Безиковича) получены объективные (количественные) оценки их эстетической привлекательности.

MSC2020 number: 28A80; 92C99.

Ключевые слова: фрактал; фрактальная размерность; архитектура.

1. Введение

Хорошо известно, что геометрическая наука фундаментальным образом влияет на архитектурное творчество, содействуя ему при выборе форм, размеров и структуры сооружений. Немаловажную роль играет геометрия и в вопросах эстетической привлекательности проектируемых объектов.

Говоря геометрия, мы не имеем в виду исключительно евклидову (классическую) геометрию, изучающую хорошо известные пространственные фигуры (тела) — многогранники, цилиндры, конусы, сферы и т.д. Эти тела евклидовой геометрии предполагаются идеальными как с точки зрения форм, так и с точки зрения свойств их поверхностей. Это означает, что поверхности тел в рамках классической геометрии мыслятся абсолютно гладкими без наличия каких-либо изъянов. Однако, при таких ограничениях классическая геометрия способна описать лишь весьма узкий класс природных структур и явлений. Ведь (подавляющее) большинство объектов природы не обладают правильными геометрическими формами и идеальной поверхностью. Возникает вопрос, как построить геометрию, описывающую сложнейшие по своей структуре физические объекты, например, такие как формы облаков и гор, кроны деревьев или система бронхов человека.

Этот вопрос интересовал ученых издавна, но только с появлением мощных вычислительных комплексов такая геометрия была создана. Ее автор, Бенуа Мандельброт [1] назвал свою теорию фрактальной геометрией. В основе этой теории лежит понятие фрактала — геометрической фигуры, сложной по форме, но простой по алгоритму построения.

Фрактальная геометрия предлагает различные способы описания и измерения природных объектов и явлений. Ее первоначальными понятиями являются масштаб измерения и дробная размерность пространства. Существует мнение, что фрактальная геометрия — это основная геометрия живой природы.

Начиная с последней декады прошлого столетия идеи фрактальной геометрии все больше используются в архитектурных композициях на основе компьютерных технологий. Идет поиск гармонии и красоты архитектурных форм с применением фрактальных мотивов. Сооружения с высокой фрактальностью характеризуются необычностью и уникальностью фасада, а также сильной эстетической привлекательностью.

Благодаря фрактальной геометрии, впервые в архитектуре были установлены объективные (количественные) критерии эстетической привлекательности архитектурных строений — высокий уровень фрактальности композиции говорит о ее несомненных художественных достоинствах (см., например, [2–8]).

Касательно армянской архитектуры, публикации по фрактальному анализу ее композиций практически отсутствуют. В недавно опубликованной работе [9], автором был проведен фрактальный анализ трех важнейших памятников средневековой Армении: храма Рипсиме (618 г.), храма Звартноц (середина VII в.) и Анийского кафедрального собора (IX–XI вв.).

Цель настоящей работы — провести фрактальный анализ для некоторых объектов армянской архитектуры последнего времени с очевидным наличием фрактальных мотивов. Будут рассмотрены Ереванский каскад, Правительственное здание №2 на Площади Республики, собор Святого Григория Просветителя и церковь Святой Троицы.

Фрактальный анализ осуществляется с использованием вычислительных программ. Это программный пакет FrakOut!, применяемый для расчета параметров архитектурных структур, в частности, для вычисления метрики Хаусдорфа–Безиковича рассматриваемых объектов. Применяется также программный пакет STATISTICA, позволяющий вычислять статистические оценки требуемых величин на основе имеющихся данных.

2. Геометрия фракталов и размерность Хаусдорфа–Безиковича

По Мандельброту [1] фрактал — это структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Объект называется самоподобным, когда увеличенные части объекта похожи на сам объект или друг на друга. Самоподобие одно из основных свойств фрактала. В окружающей среде фракталы встречаются почти всюду. Это, например, береговые линии островов, снежинки, кристаллы, кочан брокколи и т.д. Фракталы хорошо изучены и имеют многочисленные применения (см., например, [3, 10–12]).

С математических позиций фрактал — совокупность точек Евклидова пространства, которая самоподобна и размерность Хаусдорфа–Безиковича которой либо дробная, либо превышает её топологическую размерность.

Размерность Хаусдорфа–Безиковича (фрактальная размерность) для конечного множества G в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется следующим образом. Пусть $\mathbb{Z}^n(\Delta)$ — кубическая решётка в R^n с длиной ребра куба (ячейки) равной Δ. Пусть $N(\Delta)$ — минимальное число кубов решетки, необходимых для покрытия множества G. Тогда фрактальная размерность D множества G определяется следующим образом

$$D = -\lim_{\Delta\to 0}\frac{\ln N(\Delta)}{\ln \Delta}.$$

Эта размерность допускает и дробные значения. Отметим, что размерность Хаусдорфа–Безиковича может быть определена эквивалентным образом на основе следующего требования

$$\lim_{\Delta\to 0} N(\Delta)\Delta^d = \begin{cases} 0, & \text{если } d > D, \\ \infty, & \text{если } d < D. \end{cases}$$

Таким образом, размерность D множества G по сути является той границей, которая показывает, что если $d < D$, то количество кубов $N(\Delta)$ недостаточно для покрытия множества G, а если $d > D$, то количество кубов избыточно для покрытия.

Размерность Хаусдорфа–Безиковича растет в зависимости от степени извилистости объекта. Для прямой она равна единице, для слегка извилистой линии 1,03, для более извилистой 1,16, а для сильно извилистой 1,57 и т.д.

Общепринято, что успехи фрактальной геометрии обязаны именно метрике Хаусдорфа–Безиковича, которая оказалась весьма удобной количественной мерой для объектов с четко выраженными изъянами — шероховатостью, изломанностью, трещинами и т.д.

Помимо природных фракталов существуют и искусственные. Первые примеры таких фракталов были построены в конце девятнадцатого века в связи с сугубо математическими задачами. Это пример Вейерштрасса нигде не дифференцируемой и непрерывной функции, сингулярное множество Кантора, снежинка Коха, броуновская кривая на плоскости и т.д. Для некоторых из них вычисленны фрактальные размерности — канторово множество имеет фрактальную размерность $D = \ln 2/\ln 3$, а для броуновской кривой на плоскости эта размерность равна 2, что больше ее топологической размерности.

3. Фрактальная размерность как объективная оценка художественной привлекательности архитектурных композиций

Много работ посвящено вопросам психологии восприятия фракталов. Первые работы в этом направлении осуществлялись группой профессора Дж. Спротта [7]. Сходные исследования проводил Р. Тейлор [8], который показал, что подавляющее большинство участников эксперимента предпочитают фрактальные модели другим. Спротт установил, что привлекательность фрактальных объектов коррелирует с фрактальной размерностью. Результаты экспериментов показали, что для испытуемых предпочтительней были объекты с фрактальной размерностью от 1,1 до 1,5.

Работы по психологии восприятия фракталов ведутся и в настоящее время (см., например, [2–6]). В этих исследованиях подтвердилась гипотеза, что эстетическая привлекательность архитектурных композиций во многом определяется значением ее фрактальной размерности.

4. Фрактальный анализ современной армянской архитектуры

При применении фрактальных принципов в архитектуре важную роль играют практические методы расчета фрактальной размерности рассматриваемых конструкций. Одним из самых востребованных является метод подсчёта клеток (ячеек), имеющих непустое пересечение с исследуемым изображением (the box-counting dimension method). По-видимому, В. Лоренц [13] и К. Бовилл [14] были первыми кто наиболее полно изучали и использовали данный метод.

В общих чертах алгоритм применения этого метода заключается в следующем. На исследуемое изображение накладывается квадратная (кубическая) решётка с длиной ребра ячейки (масштаб) равной Δ, и пусть $N(\Delta)$ — число всех кубов, имеющих непустое пересечение с рассматриваемым изображением. Далее, рассматривается отношение $-\log N(\Delta)/\log \Delta$, и исследуется его поведение при пошаговом изменении масштаба Δ. Масштаб на каждом шаге уменьшается в два раза. Этот процесс может продолжаться бесконечно, но в практических применениях он останавливается в зависимости от требования поставленной задачи. Наклон графика величины $\log N(\Delta)$ от $-\log \Delta$ и даёт приближённое значение фрактальной размерности изображения.

Далее будет приведен фрактальный анализ трех объектов современной армянской архитектуры: Ереванский каскад, собор Святого Григория Просветителя и церковь Святой Троицы. Полученные результаты показывают, что рассматриваемые объекты имеют высокую архитектурную привлекательность.

Ереванский каскад. Ереванский каскад представляет собой архитектурно-монументальный комплекс в виде многоуровневой лестничной структуры с террасами, фонтанами, скульптурами и выставочными залами. Его строительство началось в 1980 г., однако в конце 1980-х было приостановлено в связи со Спитакским землетрясением, распадом СССР и Первой карабахской войной. Архитектура сочетает элементы советского модернизма с традиционными мотивами армянского каменного зодчества.

Результаты вычислений фрактальной размерности каскада приведены в Таблице 1. Из полученных данных видно, что Ереванский каскад имеет среднюю фрактальную размерность 1.455. Расчеты также показывают, что среднеквадратическое отклонение этих данных от среднего 0.058. На Рисунке 1 а) приводится график зависимости $\log N(\Delta)$ от $-\log \Delta$, представляющий собой линейную регрессию, построенную по полученным значениям фрактальной размерности.

Правительственное здание №2 на Площади Республики. Площадь Республики — центральная площадь города Ереван Правительственное здание №2 на этой площади было построено к 1955 году по проекту Самвела Сафаряна,

Расчет фрактальной размерности между:		фрактальная размерность			
большой размер сетки	маленький размер сетки	Каскад	Прави- тельствен- ное здание	собор Св. Григория Просветителя	церковь Св. Троицы
128	64	1.51	1.56	1.66	1.63
64	32	1.49	1.51	1.60	1.63
32	16	1.44	1.52	1.52	1.59
16	8	1.38	1.49	1.46	1.52
средняя фрактальная размерность		1.455	1.52	1.56	1.593

Таблица 1. Результаты вычислений фрактальной размерности

Рафаеля Исраеляна и Вараздата Аревшатяна. С 1996 по 2016 год здание принадлежало Министерству иностранных дел РА.

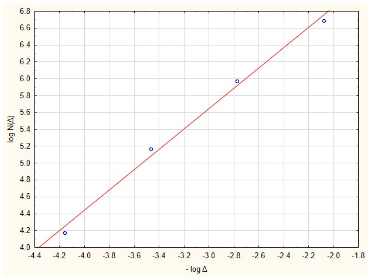
Результаты вычислений фрактальной размерности фасада Правительственного здания сведены в Таблицу 1. Из полученных данных видно, что Правительственное здание №2 имеет среднюю фрактальную размерность 1.52. Расчеты также показывают, что среднеквадратическое отклонение этих данных от среднего 0.029. На Рисунке 1 б) приводится график зависимости $\log N(\Delta)$ от $-\log \Delta$.

Собор Святого Григория Просветителя. Собор Святого Григория Просветителя является самым большим собором, построенным в Ереване. Он построен в память 1700-летия принятия Арменией христианства как государственной религии. Строительство собора началось в 1997 г. и длилось около четырех лет. Архитектором храма является Степан Кюркчян.

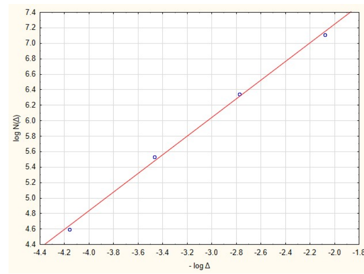
Результаты вычислений фрактальной размерности фасада собора приведены в Таблице 1. Из полученных данных видно, что собор Св. Григория Просветителя имеет среднюю фрактальную размерность 1.56. Расчеты также показывают, что среднеквадратическое отклонение этих данных от среднего 0.088. На Рисунке 1 в) приводится график зависимости $\log N(\Delta)$ от $-\log \Delta$ для фасада собора.

Церковь Святой Троицы. Церковь Св. Троицы построена в 2003 г. в Ереване в районе Малатия-Себастия. Автор проекта — заслуженный архитектор Багдасар Арзуманян. Церковь создана по образцу храма Звартноц.

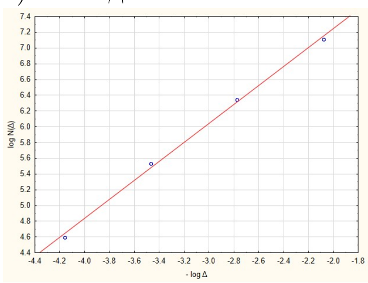
Результаты вычислений фрактальной размерности восточного фасада церкви Св. Троицы сведены в Таблицу 1. Из полученных данных видно, что церковь



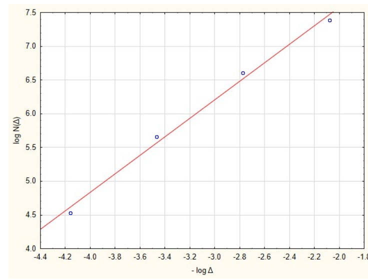
а) Каскад



б) Правительственное здание



в) Собор Св. Гр. Просветителя



г) Церковь Св. Троицы

Рис. 1. График зависимости $\log N(\Delta)$ от $-\log \Delta$.

Св. Троицы имеет среднюю фрактальную размерность 1.593. Расчеты также показывают, что среднеквадратическое отклонение этих данных от среднего 0.052. На Рисунке 1 г) приводится график зависимости $\log N(\Delta)$ от $-\log \Delta$.

5. Заключение

Фрактальный анализ рассмотренных объектов современной армянской архитектуры показал высокую согласованность субъективных и объективных оценок их эстетической привлекательности.

Список литературы

[1] B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco (1982).

[2] C. M. Hagerhall, T. Purcell, R. Taylor, “Fractal dimension of landscape silhouette outlines as a predictor of landscape preference”, Journal of Environmental Psychology, **24** (2), 247 – 255 (2004). https://doi.org/10.1016/j.jenvp.2003.12.004

[3] Ф. И. Маврикиди, “Фрактальная математика и природа перемен”, Дельфис, **54** (2) (2008).

[4] С. Д. Пьянкова, “Фрактально-аналитические исследования в психологии: особенности восприятия самоподобных объектов”, Психологические исследования, **9** (46), 16 стр. (2016). https://doi.org/10.54359/ps.v9i46.484

[5] С. Д. Пьянкова, “Субъективные оценки визуальной сложности и эстетической привлекательности фрактальных изображений: индивидуальные различия и генетические влияния”, Психологические исследования, **12** (63), 16 стр. (2019). https://doi.org/10.54359/ps.v12i63.238

[6] N. A. Salingaros, “Fractal Art and Architecture Reduce Physiological Stress”, Computers and Graphics, **27** (5), 813 – 820 (2003).
[7] J. C. Sprott, Strange Attractors: Creating Patterns in Chaos, New York, M&T Books (1993).
[8] R. P. Taylor, Reduction of Physiological Stress Using Fractal Art and Architecture, Leonardo, **39** (3) (2006).
[9] A. A. Nahapetyan, “Fractal geometry and quantitative evaluation of the aesthetic appeal of ancient Armenian architecture monuments”, Mathematical Problems of Computer Science, **63**, 42 – 53 (2025). https://doi.org/10.51408/1963-0130
[10] R. M. Crownover, Introduction to Fractals and Chaos, Jones and Bartlett Publishers (1995).
[11] J. Feder, Fractals, Publisher New York: Plenum Press (1988).
[12] N. A. Salingaros, Architecture, Patterns, and Mathematics, Nexus Network Journal, **1** (1), 75 – 86 (1999). https://doi.org/10.1007/s00004-998-0006-0
[13] W. E. Lorenz, Fractals and Fractal Architecture, Department of computer sided planning and architecture: site Vienna University of Technology Vienn (2003). www.fractalatinitest.com
[14] C. Bovill, Fractal Geometry in Architecture and Design, Birkhäuser, 73 – 92 (1996).

Поступила 05 августа 2025

После доработки 05 октября 2025

Принята к публикации 16 октября 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 6, 2025, стр. 36 – 49.

РЕШЕНИЯ КЛАССА СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Ю. ФУ, С. ЦИ

Цзинаньский университет, Цзинань, Шаньдун, Китайская Народная Республика[1]
E-mails: *3024868071@qq.com; xiaoguang.202@163.com; xiaogqi@mail.sdu.edu.cn*

Аннотация. В данной статье мы обсуждаем существование мероморфных решений следующей системы разностных уравнений

$$\begin{cases} f(z+c) = e^P f - ae^P + a \\ f(z+c) = e^Q f - be^Q + b \end{cases}$$

где P и Q являются целыми функциями, a и b — различными комплексными числами. Кроме того, в данной работе разъясняется применение этих результатов, что позволяет улучшить результаты уникальности, связанные с мероморфными функциями $f(z)$ и их сдвигами $f(z+c)$.

MSC2020 numbers: 39B32; 30D35.

Ключевые слова: мероморфная функция; система разностных уравнений; совместно принимающие значения.

1. Введение

В данной статье мы предполагаем, что читатель знаком с элементарной теорией Неванлинны, см. [1]. Теория единственности мероморфных функций является классическим приложением теории распределения значений мероморфных функций. В 1929 году Неванлинна доказал знаменитые теоремы о пяти значениях и четырех значениях: если две непостоянные мероморфные функции f и g совместно принимают пять различных значений ИК (игнорируя кратности), то $f \equiv g$; если две непостоянные мероморфные функции совместно принимают четыре различных значения УК (с учетом кратностей), то $f \equiv T \circ g$, где T — преобразование Мёбиуса. Хорошо известно, что условие "4 УК" в теореме о четырех значениях не может быть улучшено до "4 ИК". Гундерсен [2] провел дальнейшие исследования и доказал, что "4 УК" может быть улучшено до "2 УК + 2 ИК."

[1]Работа была поддержана Национальным научным фондом провинции Шаньдун (ZR2022MA071) и Национальным фондом естественных наук Китая (No. 12061042).

Тем не менее, вопрос о том, можно ли его улучшить до “1 УК + 3 ИК”, остается открытым.

Когда функция g в ранее упомянутых теоремах задается как производная от f, полученные результаты приобретают более глубокое значение. В 1977 году Рубель и Ян [3] рассмотрели задачу о совместном принятии значений целой функцией и её производной. Они получили следующий результат: предположим, что f — непостоянная целая функция. Если f и f' совместно применяют две различные константы a и b УК, то $f \equiv f'$. После этого многие ученые стремились улучшить этот результат. Соответствующие выводы см. в [1, Глава 8].

С достижением результатов, связанных с разностным аналогом леммы о логарифмической производной [4, 5, 6], разностные аналоги теории Неванлинны достигли значительного прогресса. Соответствующие результаты можно найти в [7]. Благодаря этому начались дискуссии, касающиеся проблемы единственности функций f и их сдвигов $f(z+c)$. Первый результат в этой области:

Теорема А [8]**.** *Пусть f — мероморфная функция конечного порядка, пусть $c \in \mathbb{C}$, а $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{S}(f) \bigcup \{\infty\}$ — три различные периодические функции с периодом c. Если $f(z)$ и $f(z+c)$ совместно принимают значения a_1, a_2,a_3 с УК, то $f(z) = f(z+c)$ для всех $z \in \mathbb{C}$.*

Теорема А была уточнена путем ослабления условий совместности с «3 УК» до «2 УК+1 ИК» , как сообщается в [9]. В результате многие ученые предприняли попытки дальнейшего усовершенствования условий совместности для функций, соответствующие результаты приведены в [10, 11, 12]. Уникальные результаты, касающиеся функций f и их разностных операторов, а также сдвигов и производных функций, можно найти в [7, 13]. Однако вследствие ограничения на порядок роста функций, вытекающего из разностного аналога леммы о логарифмической производной, при изучении проблемы единственности f и ее сдвигов $f(z+c)$ всегда необходимо учитывать ограничения на порядок роста функций. Недавно, Фанг и др. [14] сняли ограничение на порядок роста функций, тем самым достигнув следующего результата:

Теорема Б. *Пусть f — непостоянная мероморфная функция, пусть $c \in \mathbb{C}$. Если $f(z)$ и $f(z+c)$ совместно принимают три различных значения a, b, ∞*

УК, то $f(z) = f(z+c)$. Если только f не имеет следующего вида

$$f = \frac{(b-a)e^{\varphi+\psi} - be^{\varphi} + ae^{\psi}}{e^{\psi} - e^{\varphi}},$$

где φ и ψ — две целые функции с $\varphi(z)+\varphi(z+c) = 2k\pi i$, и $\psi(z)+\psi(z+c) = 2m\pi i$ для некоторых $k, m \in \mathbb{Z}$. Действительно, в обоих случаях имеем $f(z) = f(z+2c)$.

Одновременно с развитием дифференциальных аналогов теории Неванлинны все большее значение приобретает исследование комплексных дифференциальных уравнений. В этой области анализ систем дифференциальных уравнений становится особенно интересной темой для исследования. Соответствующие результаты можно найти в работе [15, 16, 17]. Действительно, когда мы изучаем проблему единственности f и $f(z+c)$, мы всегда получаем соответствующие результаты, исследуя свойства решений следующего разностного уравнения

$$\frac{f(z+c)-\alpha}{f-\alpha} = e^{\gamma(z)}, \tag{1.1}$$

где α — константа, а $\gamma(z)$ — целая функция. Следовательно, основное внимание в данной статье уделяется исследованию существования и формы решений системы разностных уравнений, связанных с уравнением (1.1). В качестве приложения мы можем уточнить выражение f в Теореме Б. Действительно, мы имеем

Теорема 1.1. *Пусть P и Q — две трансцендентные целые функции, а a, b — два различных значения. Тогда решения следующей системы разностных уравнений*

$$\begin{cases} f(z+c) = e^{P} f - ae^{P} + a \\ f(z+c) = e^{Q} f - be^{Q} + b \end{cases} \tag{1.2}$$

удовлетворяют одному из следующих условий

(1) $f = f(z+c)$.

(2) $f = f(z+2c)$. *В частности, когда $P-Q$ является многочленом, следует, что $e^{P} = -e^{Q}$. Следовательно, в соответствии с этим условием, явное выражение для f можно получить так:*

$$f = \frac{(a+b)e^{P} - (a-b)}{2e^{P}},$$

где $P + P(z+c) = 2n\pi i$, n — целое число.

Теорема 1.2. *Пусть P и Q — два непостоянных многочлена, а a, b — два различных значения. Тогда следующая система разностных уравнений*

$$\begin{cases} f(z+c) = e^P f - ae^P + a \\ f(z+c) = e^Q f - be^Q + b \end{cases}$$

не имеет мероморфных решений, если только $f = f(z+c)$.

Примечание. (1). Доказательство Теоремы 1.2 следует подходу, аналогичному в Теореме 1.1. Примечательно, что в Теореме 1.2, поскольку P и Q являются многочленами, из того, что $e^{P+P(z+c)} = 1$, следует, что $e^{Q+Q(z+c)} = 1$. Следовательно, и P, и Q должны быть постоянными, что противоречит предположению. В случае, когда $e^{P+P(z+c)} \not\equiv 1$, мы используем стратегию доказательства Теоремы 1.1, с той модификацией, что считаем R, R_1, R_2, R_3 постоянными, а не многочленами. Это также приводит к противоречию. Поэтому мы опускаем подробное доказательство Теоремы 1.2.

(2). Для удобства использования в данной статье мы будем сокращенно обозначать $f(z+c)$ как $\overline{f}$.

2. Леммы

Лемма 2.1. [1, Теорема 1.51] *Предположим, что f_j $(j = 1, \dots n)$ $(n \geq 2)$ являются мероморфными функциями, а g_j $(j = 1, \dots, n)$ — целыми функциями, удовлетворяющими следующим условиям:*

(1) $\sum_{j=1}^{n} f_j e^{g_j} = 0.$

(2) $1 \leq j < k \leq n$, *$g_j - g_k$ не являются константами для* $1 \leq j < k \leq n$.

(3) *Для* $1 \leq j \leq n$, $1 \leq h < k \leq n$,

$$T(r, f_j) = o\{T(r, e^{g_h - g_k})\}, \quad r \to \infty, r \notin E,$$

где $E \subset (1, \infty)$ имеет конечную линейную меру.

Тогда $f_j(z) \equiv 0$.

Лемма 2.2. [1, Теорема 1.64] *Пусть f_j $(j = 1, \dots n)$ — непостоянные мероморфные функции, и пусть f_j $(j = n+1, \dots, n+m)$ — мероморфные функции, такие что*

$$f_j \not\equiv 0, \quad (j = n+1, \dots, n+m)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n+m} f_j \equiv A,$$

где A *— ненулевая константа. Если существует подмножество* $I \subseteq R^{+}$ *удовлетворяющее* $mesI = \infty$ *такое, что*

$$\sum_{j=1}^{n+m} N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + (n+m-1)\overline{N}(r, f_j) < (\lambda + o(1))T(r, f_k), \quad r \to \infty, r \in I,$$

где $\lambda < 1$, $k = 1, 2, \ldots n$. *Тогда существует* $t_i \in \{0, 1\}(i = 1, 2, \ldots m)$ *такое, что*

$$\sum_{i=1}^{m} t_i f_{n+i} \equiv A.$$

Лемма 2.3. [1, Теорема 1.55] *Пусть* f_j $(j = 1, \ldots n)$ *— непостоянные мероморфные функции, удовлетворяющие* $\Theta(\infty, f_j) = 1$ *для* $j = 1, \ldots, p$, *и пусть* a_j $(j = 0, 1, \ldots n)$ *— ненулевые константы. Если*

$$\sum_{j=1}^{p} a_j f_j \equiv a_0.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{p} \delta(0, f_j) \leq p - 1,$$

где

$$\delta(0, f) = 1 - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, \frac{1}{f})}{T(r, f)}, \quad \Theta(\infty, f) = 1 - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\overline{N}(r, f)}{T(r, f)}.$$

Лемма 2.4. [1, Лемма 2.1] *Пусть* f *и* g *— непостоянные рациональные функции. Если* f *и* g *совместно принимают значения* $0, \infty$ *УК, то существует ненулевая константа* K *такая, что* $f \equiv Kg$.

3. Доказательство Теоремы 1.1

Предположим, что f является непостоянным мероморфным решением уравнений (1.2). Если $e^P = e^Q$, то из этого следует, что $f = \overline{f}$. В последующем анализе мы рассмотрим случай, когда $e^P \not\equiv e^Q$.Из уравнений (1.2) получаем, что

$$f = \frac{ae^P - be^Q - (a-b)}{e^P - e^Q}. \tag{3.1}$$

Следовательно,

$$\overline{f} = \frac{ae^{\overline{P}} - be^{\overline{Q}} - (a-b)}{e^{\overline{P}} - e^{\overline{Q}}}. \tag{3.2}$$

Объединив уравнение (3.1) с первым уравнением (1.2), получаем

$$\overline{f} = \frac{ae^{2P} - be^{P+Q} - (a-b)e^P}{e^P - e^Q} - ae^P + a. \tag{3.3}$$

Кроме того, из уравнений (3.2) и (3.3)можно сделать вывод, что

$$e^P - e^Q - e^{P+\overline{P}} + e^{Q+\overline{Q}} + e^{P+Q+\overline{P}} - e^{P+Q+\overline{Q}} = 0. \tag{3.4}$$

Случай 1. Предположим, что $e^{P+\overline{P}} = 1$. Следовательно, из первого уравнения (1.2) мы делаем вывод, что

$$\frac{\overline{f} - a}{f - a} = e^P.$$

Кроме того,

$$\frac{\overline{\overline{f}} - a}{\overline{f} - a} = e^{\overline{P}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\overline{\overline{f}} - a}{f - a} = e^{P+\overline{P}} = 1,$$

что указывает на то, что $f = \overline{\overline{f}}$.

В частности, когда $P - Q$ является многочленом, мы можем вывести выражение для f. Разделив обе части уравнения (3.4) на e^Q, получаем

$$-e^{\overline{P}+\Phi} + e^{\overline{Q}} - e^{P+\overline{Q}} = -e^{\Phi}, \tag{3.5}$$

где $\Phi = P - Q$. Применив Лемму 2.2 к (3.5), получаем $e^{P+\overline{Q}} = e^{\Phi}$, что означает $e^{Q+\overline{Q}} = 1$. Следовательно,

$$\frac{e^{P+\overline{P}}}{e^{Q+\overline{Q}}} = e^{\Phi+\overline{\Phi}} = 1.$$

Учитывая предположение, что Φ является многочленом, получаем, что Φ должно быть константой. Итак, $e^{2\Phi} = 1$. Учитывая предположение, что $e^P \not\equiv e^Q$, мы делаем вывод, что $e^{\Phi} = -1$. В результате можно сделать вывод, что $e^P = -e^Q$. Кроме того, из уравнения (3.1) имеем

$$f = \frac{(a+b)e^P - (a-b)}{2e^P}.$$

Случай 2. Предположим, что $e^{P+\overline{P}} \not\equiv 1$. Разделив обе части (3.4) на e^Q, получаем

$$e^R - e^{R+\overline{P}} + e^{\overline{Q}} + e^{P+\overline{P}} - e^{P+\overline{Q}} = 1, \tag{3.6}$$

где $R = P - Q$.

Случай 2.1. Если R является многочленом, то уравнение (3.6) переписываем следующим образом:

$$-e^{R+\overline{P}}+e^{\overline{Q}}+e^{P+\overline{P}}-e^{P+\overline{Q}}=1-e^{R}. \tag{3.7}$$

Если $1-e^R\not\equiv 0$, то по Лемме 2.2 существуют $t_i\in\{0,1\},(1=1,2)$, удовлетворяющие

$$t_1e^{P+\overline{P}}-t_2e^{P+\overline{Q}}=1-e^{R}.$$

Если $t_1=0$, то имеем

$$-e^{P+\overline{Q}}=1-e^{R}. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.7), получаем

$$-e^{R+\overline{P}}+e^{\overline{Q}}+e^{P+\overline{P}}=0.$$

Разделив обе части вышеуказанной формулы на $e^{\overline{P}}$, получаем

$$-e^{R}+e^{-\overline{R}}+e^{P}=0$$

что невозможно, если R является многочленом. Аналогично, противоречие можно получить и при $t_2=0$.

Если $t_1=1,t_2=1$, то получаем

$$e^{P+\overline{P}}-e^{P+\overline{Q}}=1-e^{R}. \tag{3.9}$$

Из (3.7) и (3.9), следует, что

$$e^{R+\overline{R}}=1.$$

Исходя из предположения, что R является многочленом, мы делаем вывод, что R должен быть константой. Пусть $e^R=A(\neq 0,1)$, тогда

$$e^{P}=Ae^{Q},\quad e^{P+\overline{P}}=A^2e^{Q+\overline{Q}},\quad e^{P+Q+\overline{P}}=A^2e^{2Q+\overline{Q}},\quad e^{P+Q+\overline{Q}}=Ae^{2Q+\overline{Q}}.$$

Подставляя вышеуказанные уравнения в (3.4), получаем

$$1-(1+A)e^{\overline{Q}}+Ae^{Q+\overline{Q}}=0. \tag{3.10}$$

Если $A=-1$, то $e^{Q+\overline{Q}}=1$. Следовательно, $e^{P+\overline{P}}=(-1)^2\cdot 1=1$ что противоречит предположению, что $e^{P+\overline{P}}\not\equiv 1$. Следовательно, $A\neq -1$.

Если $Q+\overline{Q}$ является многочленом, то из (3.10) следует, что Q является многочленом, что приводит к противоречию. Если $Q+\overline{Q}$ является трансцендентной целой функцией, то, применив Лемму 2.1 к (3.10) и учитывая, что $A\neq -1$, мы также приходим к противоречию.

Таким образом, мы получаем $1-e^R=0$, что означает $e^P=e^Q$, что противоречит предположению, что $e^P\not\equiv e^Q$. Следовательно, R является трансцендентной целой функцией.

Случай 2.2. Если $R+\overline{P}$ является многочленом, то мы задаем $R+\overline{P}=R_1$. Следовательно, (3.6) можно переписать в виде

$$e^{R_1}e^{-\overline{P}}+e^{\overline{Q}}+e^{R_1}e^{Q}-e^{R_1}e^{Q-\overline{R}}=1+e^{R_1}. \tag{3.11}$$

Если $1+e^{R_1}\not\equiv 0$, то, применив Лемму 2.2 к (3.11), имеем

$$-e^{R_1}e^{Q-\overline{R}}=1+e^{R_1}. \tag{3.12}$$

Отсюда следует, что

$$N\left(r,\frac{1}{1+e^{R_1}}\right)=0,$$

что указывает на то, что R_1 является константой. Кроме того, очевидно, что $Q-\overline{R}$ также является константой. Таким образом, $Q-\overline{R}+R_1=P+\overline{Q}$ также является константой. Пусть $e^{R_1}=B(\neq 0,-1)$, тогда из (3.11) и (3.12) следует, что

$$Be^{-\overline{P}}+e^{\overline{Q}}+Be^{Q}=0.$$

Разделив обе части вышеуказанной формулы на $e^{\overline{Q}}$, получаем

$$-Be^{-\overline{P}-\overline{Q}}=Be^{Q-\overline{Q}}+1,$$

что означает

$$N\left(r,\frac{1}{Be^{Q-\overline{Q}}+1}\right)=0.$$

Следовательно, $Q-\overline{Q}$ является константой. Одновременно мы наблюдаем, что $\overline{P}+\overline{Q}$ является константой, а значит, $P+Q$ также является константой. Более того, $\overline{P}+Q=\overline{P}+\overline{Q}+Q-\overline{Q}$ является константой. Следовательно, $P-\overline{P}=P+\overline{Q}-(\overline{P}+Q)-(\overline{Q}-Q)$ является константой. Пусть

$$e^{\overline{P}-P}=D(\neq 0),\quad e^{\overline{Q}-Q}=E(\neq 0),\quad e^{P+Q}=F(\neq 0).$$

Подставляя вышеуказанные уравнения в (3.4), получаем

$$(1+DF)e^{P}-(1+EF)e^{Q}-De^{2P}+Ee^{2Q}=0.$$

Если $(1+DF)(1+EF)\neq 0$. Поскольку P, Q, $R=P-Q$, $P-2Q=P+Q-3Q$, $Q-2P=P+Q-3P$ являются трансцендентными целыми функциями, из Леммы 2.1 можно вывести $D=E=0$, что приводит к противоречию.

Если $(1+DF)(1+EF)=0$, что приводит к противоречию $D=E=0$ из Леммы 2.1, что невозможно.

Таким образом, $1+e^{R_1}=0$. Следовательно, уравнение (3.11) можно переписать в виде

$$e^{-\overline{P}}-e^{\overline{Q}}+e^{Q}-e^{Q-\overline{R}}=0.$$

Разделив обе части вышеуказанного уравнения на e^{Q}, получаем

$$e^{-\overline{P}-Q}-e^{\overline{Q}-Q}-e^{-\overline{R}}=-1. \tag{3.13}$$

Применив Лемму 2.3 к уравнению (3.13), мы приходим к выводу, что по крайней мере одно из $-\overline{P}-Q$ и $\overline{Q}-Q$ должно быть константой.

Предположим, что $-\overline{P}-Q$ является константой, тогда зададим $e^{-\overline{P}-Q}=G(\neq 0)$. Следовательно, (3.13) можно переписать как

$$e^{\overline{Q}-Q}+e^{-\overline{R}}=1+G. \tag{3.14}$$

Если $1+G\neq 0$, то по Лемме 2.2, получаем $e^{\overline{Q}-Q}=1+G$, что означает, что $e^{-\overline{R}}=0$, что приводит к противоречию. С другой стороны, если $1+G=0$, то из (3.14) следует, что $e^{\overline{Q}+\overline{R}-Q}=e^{\overline{P}-Q}=-1$, что указывает на то, что $\overline{P}-Q$ является константой. Предполагая, что $-\overline{P}-Q$ является константой, мы получаем, что Q является константой, что противоречит нашим изначальным предположениям.

Предположим, что $\overline{Q}-Q$ является константой, тогда зададим $e^{\overline{Q}-Q}=H(\neq 0)$. Уравнение (3.13) можно переписать как

$$e^{-\overline{P}-Q}-e^{-\overline{R}}=H-1. \tag{3.15}$$

Если $H-1\neq 0$,то, применив Лемму 2.2 к (3.15), получаем $e^{-\overline{P}-Q}=H-1$, что означает $e^{-\overline{R}}=0$, что невозможно. В противном случае, если $H-1=0$, то из (3.15) следует, что $e^{-\overline{P}-Q+\overline{R}}=e^{-Q-\overline{Q}}=1$, предполагая, что $-Q-\overline{Q}$ является константой. Учитывая, что $\overline{Q}-Q$, получаем, что Q является константой, что снова противоречит нашим предположениям. Следовательно, $R+\overline{P}$ является трансцендентной целой функцией.

Случай 2.3. Если $P+\overline{P}$ является многочленом, то зададим $P+\overline{P}=R_2$. Следовательно, уравнение (3.6) можно переписать в виде

$$e^{R}-e^{R_2}e^{-Q}+e^{\overline{Q}}-e^{R_2}e^{-\overline{R}}=1-e^{R_2}. \tag{3.16}$$

При предположении, что $e^{P+P} \not\equiv 1$, следует, что $1 - e^{R_2} \not\equiv 0$. Применив Лемму 2.3 к (3.16), получаем противоречие. Следовательно, $P + \overline{P}$ является трансцендентной целой функцией.

Случай 2.4. Если $P + \overline{Q}$ является многочленом, то мы задаем $P + \overline{Q} = R_3$. Следовательно, мы переписываем (3.6) следующим образом

$$e^R - e^{R_3} e^{\overline{R}-Q} + e^{\overline{Q}} + e^{R_3} e^{\overline{R}} = 1 + e^{R_3}. \tag{3.17}$$

Если $1 + e^{R_3} \not\equiv 0$, то, применяя Лемму 2.2, получаем $-e^{R_3} e^{\overline{R}-Q} = 1 + e^{R_3}$. Это означает, что

$$N\left(r, \frac{1}{1 + e^{R_3}}\right) = 0.$$

Кроме того, из этого следует, что e^{R_3} и $e^{\overline{R}-Q}$ являются константами. Пусть $e^{R_3} = M(\neq 0, -1)$, тогда (3.17) можно переписать в виде

$$e^R - M e^{\overline{R}-Q} + e^{\overline{Q}} + M e^{\overline{R}} = 1 + M. \tag{3.18}$$

Применив Лемму 2.2 к (3.18), получаем $-M e^{\overline{R}-Q} = 1 + M$. Следовательно, из уравнения (3.18), получаем

$$e^R + e^{\overline{Q}} + M e^{\overline{R}} = 0.$$

Разделив обе части вышеуказанной формулы на $e^{\overline{Q}}$, получаем

$$e^{R-\overline{Q}} + M e^{\overline{R}-\overline{Q}} = -1.$$

Применив Лемму 2.3 к вышеуказанному уравнению, получаем, что $R - \overline{Q}$ и $\overline{R} - \overline{Q} = \overline{P} - 2\overline{Q}$ должны быть константами. Таким образом, $P - 2Q$ является константой. Кроме того, мы видим, что $R - \overline{Q} + R_3 = 2P - Q$ является константой. Следовательно, мы получаем, что $P - 2Q + 2P - Q = 3R$ является константой, что приводит к противоречию.

Если $1 + e^{R_3} = 0$, то R_3 является константой. Мы можем переписать (3.17) как

$$e^R + e^{\overline{R}-Q} + e^{\overline{Q}} - e^{\overline{R}} = 0.$$

Разделив обе части вышеуказанной формулы на $e^{\overline{R}}$, получаем

$$e^{R-\overline{R}} + e^{-Q} + e^{2\overline{Q}-\overline{P}} = 1. \tag{3.19}$$

Применив Лемму 2.3 к вышеуказанному уравнению, мы делаем вывод, что по крайней мере одно из $R - \overline{R}$ и $2\overline{Q} - \overline{P}$ должен быть константой.

Предположим, что $R-\overline{R}$ является константой, тогда зададим $e^{R-\overline{R}}=N$, и уравнение (3.19) можно переписать в виде

$$e^{-Q}+e^{2\overline{Q}-\overline{P}}=1-N. \tag{3.20}$$

Если $1-N\neq 0$, то из Леммы 2.3, следует, что $2\overline{Q}-\overline{P}$ должно быть константой, что означает, что Q является константой, что является противоречием. Если $1-N=0$, то из (3.20) следует, что

$$e^{2\overline{Q}-\overline{P}+Q}=-1,$$

что означает, что $2\overline{Q}-\overline{P}+Q$ является константой. Учитывая, что $R-\overline{R}$ и $R_3=P+\overline{Q}$ являются константами, мы делаем вывод, что $P+\overline{Q}-R+\overline{R}=Q+\overline{P}$ является константой. Следовательно, $2\overline{Q}-\overline{P}+Q-Q-\overline{P}=-2\overline{R}$ является константой, что является противоречием.

Предположим, что $2\overline{Q}-\overline{P}$ является константой, тогда зададим $e^{2\overline{Q}-\overline{P}}=T$, и перепишем (3.19) как

$$e^{R-\overline{R}}+e^{-Q}=1-T. \tag{3.21}$$

Если $1-T\neq 0$, то из Леммы 2.3 следует, что $R-\overline{R}$ является константой, что предполагает, что Q является константой, что является противоречием. Если $1-T=0$, то из (3.21), получаем, что $e^{P-\overline{R}}=-1$, что означает, что $P-\overline{R}$ является константой. Следовательно $P-\overline{R}-(2\overline{Q}-\overline{P})=P-\overline{Q}$ является константой. Отмечая, что $R_3=P+\overline{Q}$ является константой, получаем $P+\overline{Q}+P-\overline{Q}=2P$ является константой, что является противоречием. Следовательно, $P+\overline{Q}$ является трансцендентной целой функцией.

Таким образом, мы утверждаем, что $R, R+\overline{P}, \overline{Q}, P+\overline{P}, P+\overline{Q}$ являются трансцендентными целыми функциями. Следовательно, при применении Леммы 2.3 к (3.6), возникает противоречие.

4. Применение Теоремы 1.1

В качестве применения Теоремы 1.1 мы усовершенствовали результаты теоремы Б и получили следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть f — непостоянная мероморфная функция, пусть $c\in\mathbb{C}$. Если $f(z)$ и $f(z+c)$ совместно принимают три различных значения a, b, ∞ УК, то верно следующее заключение:*

(1) $f = f(z + c)$.

(2) $f = \frac{(b-a)e^{P+Q} - be^P + ae^Q}{e^Q - e^P}$, *по крайней мере одно из* P *и* Q *является трансцендентной целой функцией и удовлетворяет* $P + \overline{P} = 2k\pi i$, *а* $Q + \overline{Q} = 2m\pi i$ *для некоторых* $k, m \in \mathbb{Z}$.

Доказательство Теоремы 4.1. Если f является непостоянной рациональной функцией, то в сочетании с условием общего значения из Леммы 2.4 следует, что $f = \overline{f}$.

Далее мы рассмотрим случай, когда f является трансцендентной мероморфной функцией. Учитывая, что $\overline{f}$ и f совместно принимают значения a, b и ∞ УК, имеем

$$\frac{\overline{f} - a}{f - a} = e^P, \quad \frac{\overline{f} - b}{f - b} = e^Q,$$

где P и Q — две целые функции.

Если P и Q являются многочленами, то по Теореме Б мы приходим к выводу, что либо $f = \overline{f}$, либо

$$f = \frac{(b-a)e^{P+Q} - be^P + ae^Q}{e^Q - e^P}, \tag{4.1}$$

где $P + \overline{P} = 2k\pi i$ и $Q + \overline{Q} = 2m\pi i$, k и m — целые числа. Примечательно, что и P , и Q являются многочленами, что означает, что P и Q являются константами. Следовательно, согласно уравнению (4.1), f также должна быть константой. Это противоречит нашему предположению, что f является трансцендентной мероморфной функцией. Поэтому, если P, Q являются многочленами, то из этого обязательно следует, что $f = \overline{f}$.

Если по крайней мере одно из P и Q является трансцендентной целой функцией, то по Теореме Б мы приходим к выводу, что либо $f = \overline{f}$, либо

$$f = \frac{(b-a)e^{P+Q} - be^P + ae^Q}{e^Q - e^P},$$

где $P + \overline{P} = 2k\pi i$ и $Q + \overline{Q} = 2m\pi i$, k и m — целые числа.

Дальнейшее обсуждение. Действительно, при определенных условиях вид функции f в заключении (2) Теоремы 4.1 можно еще больше упростить.

Если P — трансцендентная целая функция, а Q — многочлен, то из этого следует, что $Q = m\pi i$. Если m — четное число, то уравнение (4.1) сводится к $f = a$, что является противоречием. Если m является нечетным числом, то уравнение (4.1) дает

$$f = \frac{(2b-a)e^P + a}{e^P + 1},$$

где $P + \overline{P} = 2k\pi i$, k — целое число.

И наоборот, если Q является трансцендентной целой функцией, а P — многочленом, то аналогичное рассуждение, как и выше, приводит к следующему результату:

$$f = \frac{(2a-b)e^Q + b}{e^Q + 1},$$

где $Q + \overline{Q} = 2m\pi i$, m — целое число.

Когда P и Q являются трансцендентными целыми функциями, тот факт, что f удовлетворяет заключению 2 Теоремы 4.1 означает, что $f \neq \overline{f}$. Следовательно, из Теоремы 1.1, мы делаем вывод, что если $P - Q$ является многочленом, то

$$f = \frac{(a+b)e^P - (a-b)}{2e^P},$$

где $P + \overline{P} = 2n\pi i$, n — целое число.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные предложения и комментарии.

Список литературы

[1] C. C. Yang and H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2003).

[2] G. G. Gundersen, “Meromorphic functions that share four values”, Trans. Amer. Math. Soc., **277**, 545 – 567 (1983).

[3] L. A. Rubel and C. C. Yang, “Values shared by an entire function and its derivative”, Lecture Notes in Math., **599**, Springer, Berlin, 101 – 103 (1977).

[4] Y. M. Chiang and S. J. Feng, “On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane”, Ramanujan J., **16**, 105 – 129 (2008).

[5] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, “Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations”, J. Math. Anal. Appl., **314**, 477 – 487 (2006).

[6] R. G. Halburd and R. J. Korhonen and K. Tohge, “Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages”, Trans. Amer. Math. Soc. **366**, 4267 – 4298 (2014).

[7] Z. X. Chen, Complex Differences and Difference Equations, Mathematics Monograph Series 29, Science Press, Beijing (2014).

[8] J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine and J. Rieppo, “Uniqueness of meromorphic functions sharing values with their shifts”, Complex Var. Elliptic Equ. **56**, 81 – 92 (2011).

[9] J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo and J. L. Zhang, “Value sharing results for shifts of meromorphic functions, and sufficient conditions for periodicity”, J. Math. Anal. Appl., **355**, 352 – 363 (2009).

[10] K. S. Charak, R. J. Korhonen and G. Kumar, “A note on partial sharing of values of meromorphic functions with their shifts”, J. Math. Anal. Appl., **435**, 1241 – 1248 (2016).

[11] X. M. Li, X. Yang and H. X. Yi, “Entire functions sharing an entire function of smaller order with their shifts”, Proc. Japan Acad. Ser. A., **89**, 34 – 39 (2013).

[12] X. G. Qi, "Value distribution and uniqueness of difference polynomials and entire solutions of difference equations", Ann. Polon. Math., **102**, 129 – 142 (2011).
[13] K. Liu, I. Laine and L. Z. Yang, Complex Delay-Differential Equations, De Gruyter, Boston (2021).
[14] L. M. Fang, H. Li, W. Q. Chen and X. Yao, "A difference version of the Rubel-Yang-Mues-Steinmetz-Gundersen Theorem", Comput. Methods Funct. Theory, **24**, 811 – 832 (2024).
[15] Y. H. Guo and K. Liu, "Meromorphic solutions of Fermat type differential and difference equations of certain types", Ann. Polon. Math. **131**, 1 – 19 (2023).
[16] Y. X. Li and K. Liu, "Meromorphic solutions of nonlinear systems of Fermat type", Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **46**, 196 (2023).
[17] H. Y. Xu, S. Y. Liu and Q. P. Li, "Entire solutions for several systems of nonlinear difference and partial differential-difference equations of Fermat-type", J. Math. Anal. Appl., **483**, 123641 (2020).

Поступила 19 декабря 2024

После доработки 21 февраля 2025

Принята к публикации 01 марта 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 6, 2025, стр. 50 – 62.

О КОНСТРУКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УРЫСОНА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Х. А. ХАЧАТРЯН, Р. С. АМБАРЦУМЯН

Ереванский государственный университет [1]
E-mails: *khachatur.khachatryan@ysu.am; ruben.hambardzumyan2@edu.ysu.am*

Аннотация. Исследуется класс нелинейных многомерных интегральных уравнений Урысоновского типа в n-мерном евклидовом пространстве в критическом случае. При различных представлениях ядра Урысона, указанное уравнение возникает в теории p-адических струн и в математической теории распространения эпидемических заболеваний. Доказывается конструктивная теорема существования нетривиального положительного непрерывного и ограниченного решения. При этом показывается, что соответствующие последовательные приближения равномерно со скоростью убывающей геометрической прогрессии сходятся к решению уравнения. Более того, в определенном классе ограниченных функций доказывается теорема единственности построенного решения. В конце для иллюстрации важности полученных результатов приводятся конкретные примеры указанных уравнений.

MSC2020 number: 45G05.

Ключевые слова: ядро Урысона; вогнутая нелинейность; итерации; ограниченное решение; монотонность.

1. Введение

Рассмотрим следующий класс нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$:

(1.1)
$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n, f(t_1, \dots, t_n))dt_1 \dots dt_n, \ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

относительно искомой неотрицательной и ограниченной на $\mathbb{R}^n$ функции f. В уравнении (1.1) ядро Урысона $U(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n, z)$ удовлетворяет следующим условиям:

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 23RL-1A027.

1) **(условия критичности и монотонности)**
$U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,0)\equiv 0$, $U\in C(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$ и при каждом фиксированном $(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ функция $U(x_1,\dots,x_n,$ $t_1,\dots,t_n,z)$ монотонно возрастает по z на $\mathbb{R}^+$,
2) **(условие равномерной ограниченности интеграла ядра Урысона)**
существует число $\xi>0$ такое, что
$$\sup_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,\xi)dt_1\dots dt_n=:\lambda<+\infty,$$
причем
$$\lim_{|x|\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,\xi)dt_1\dots dt_n=\lambda,$$
3) **(условие φ-вогнутости)**
существует непрерывное монотонно возрастающее и строго вогнутое отображение $\varphi:[0,1]\to[0,1]$, со свойствами $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, $\varphi'(+0)=+\infty$ такое, что
$$U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,\sigma z)\geq\varphi(\sigma)U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,z),$$
$$(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n,\quad z\in\mathbb{R}^+,\quad\sigma\in[0,1].$$

Отметим, что уравнение (1.1), при различных конкретных представлениях функции U, имеет приложения во многих отраслях естествознания. В частности, уравнение (1.1) возникает в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в математической теории географического распространения эпидемических заболеваний в рамках обычных и модифицированных моделей Аткинсона-Ройтера и Дикмана-Капера (см. [1]-[5]).

Исторически первые результаты, касающиеся вопросов существования и единственности решения нелинейных интегральных уравнений Урысоновского типа начались в начале прошлого века с пионерских работ П. Урысона и А. Гаммерштейна (см. [6] и [7]). В указанных работах рассматривались одномерные нелинейные интегральные уравнения на ограниченных числовых множествах. В работе [6], при достаточно сильных ограничениях на ядро Урысона (таких как гладкость, существование линейной миноранты, компактность соответствующего нелинейного интегрального оператора в пространстве непрерывных на отрезке функций и т.д.), получены теоремы существования и единственности непрерывных нетривиальных решений. В дальнейшем в работе [7] при помощи вариационных методов исследованы аналогичные вопросы для нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейновского типа.

Начиная с 1950 года научной школой М. А. Красносельского начались систематические исследования одномерных нелинейных интегральных операторов Урысона и Гаммерштейна (см. [8]-[11]). В частности, в работах [8] и [9] найдены различные достаточные условия для полной непрерывности таких операторов в естественных банаховых пространствах. Сочетание указанных признаков полной непрерывности нелинейных интегральных операторов с известными принципами неподвижных точек для компактных операторов дали возможность получить теоремы существования и единственности решения указанных классов уравнений (см. [10], [11]). На западе аналогичные вопросы обсуждались научной школой Ф. Браудера, в основном не предполагая ограниченность тех множеств, где изучаются указанные классы уравнений (см. [8]-[14]). Однако следует отметить, что основным инструментом этих исследований служила известная теорема о неподвижной точке Браудера-Минти о сюрективности нелинейных коэрцетивных операторов, действующих в рефлексивных банаховых пространствах (см. например [15]).

Отметим, что случай, когда для одномерного оператора Урысона линейной минорантой в смысле М. А. Красноселького служат линейные интегральные операторы сверточного типа, одномерные аналоги уравнения (1.1) исследовались в работах [16]-[19].

Отличительными особенностями рассмотренных нами уравнений (1.1) являются отсутствие полной непрерывности многомерного интегрального оператора Урысона в пространстве ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций, свойство критичности (наличие нулевой неподвижной точки), нерефлексивность пространства, где рассматривается соответствующее уравнение, отсутствие условия гладкости на ядро Урысона, а также неограниченность области интегрирования в уравнении (1.1). Перечисленные свойства оператора Урысона не позволяют использовать выше указанные методы для построения нетривиального ограниченного решения уравнения (1.1). В настоящей работе, используя некоторые априорные оценки для вогнутых операторов, удается получить конструктивную теорему о существовании нетривиального положительного непрерывного и ограниченного на $\mathbb{R}^n$ решения уравнения (1.1). Более того, устанавливается равномерная сходимость соответствующих последовательных приближений со скоростью убывающей геометрической прогрессии. Кроме того, в определенном подклассе ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций доказывается единственность построенного решения. В конце работы приводятся наглядные примеры ядра Урысона, удовлетворяющие условиям доказанных теорем. Небезынтересно отметить, что часть приведенных примеров носит прикладной характер в вышеуказанных направлениях естествознания.

2. Существование ограниченного решения

Теорема 2.1. *При условиях* 1) − 3) *уравнение* (1.1) *обладает положительным ограниченным и непрерывным на* $\mathbb{R}^n$ *решением* $f(x_1,\ldots,x_n)$. *Более того существуют числа* $C>0$ *и* $k\in(0,1)$ *такие, что* $|f_m(x_1,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)|\le C\cdot k^m$, $m=1,2,\ldots$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, *где последовательность непрерывных на* $\mathbb{R}^n$ *функций* $\{f_m(x_1,\ldots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$ *определяется из следующих рекуррентных соотношений:*

$$\begin{gathered} f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)=\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,f_m(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n, \\ f_0(x_1,\ldots,x_n)\equiv\xi,\quad m=0,1,\ldots,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию на $\mathbb{R}^n$:

$$B(x_1,\ldots,x_n):=\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\xi)dt_1\ldots dt_n. \tag{2.2}$$

По предположению $B(x_1,\ldots,x_n)>0$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и $B\in C(\mathbb{R}^n)$ (см. условие 1)). С другой стороны, согласно условию 2), существует число $r>0$ такое, что при $|x|>r$ имеет место неравенство: $B(x_1,\ldots,x_n)\ge\frac{\lambda}{2}$. Согласно теореме Вейерштрасса существует точка $\mathring{x}\in\mathfrak{B}:=\Big\{x=(x_1,\ldots,x_n):|x|\le r\Big\}$ такая, что $\min\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathfrak{B}}B(x_1,\ldots,x_n)=B(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_n)>0$. Следовательно

$$\varepsilon:=\inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}B(x_1,\ldots,x_n)\ge\min\left\{B(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_n),\frac{\lambda}{2}\right\}>0. \tag{2.3}$$

Введем следующие обозначения

$$\tilde{t}_1:=\min\left\{\frac{\varepsilon}{\xi},\frac{1}{2}\right\}\in\left(0,\frac{1}{2}\right], \tag{2.4}$$

$$\tilde{t}_2:=\max\left\{\frac{\lambda}{\xi},2\right\}\in[2,+\infty). \tag{2.5}$$

Тогда из (2.1), с учетом условия 2), (2.3), (2.4) и (2.5) имеем

$$\tilde{t}_1f_0(x_1,\ldots,x_n)\le f_1(x_1,\ldots,x_n)\le\tilde{t}_2f_0(x_1,\ldots,x_n),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Теперь индукцией по m докажем справедливость следующего двустороннего неравенства:

(2.7)

$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\tilde{t}_1))}_{m} f_m(x_1,\ldots,x_n)\le f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)\le \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\ldots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} f_m(x_1,\ldots,x_n),$$

$$m=1,2,\ldots,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

где числа $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$ определяются по формулам (2.4) и (2.5) соответственно. Сначала проверим оценки (2.7) для номера $m=1$. Действительно, принимая во внимание условия $1)-3)$ и при этом учитывая рекуррентные соотношения (2.1), из (2.6) будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{t}_1)f_1(x_1,\ldots,x_n)&\le\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tilde{t}_1 f_0(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,f_1(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n\\&=f_2(x_1,\ldots,x_n),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(x_1,\ldots,x_n)&=\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,f_1(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tilde{t}_2 f_0(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n\\&=\frac{\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tilde{t}_2 f_0(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n\\&\le\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,f_0(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n\\&=\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)}f_1(x_1,\ldots,x_n),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Предположим теперь, что цепочка неравенств (2.7) выполняется при некотором натуральном m. Тогда снова используя условия $1)-3)$ и индукционное предположение, из (2.1) получаем

$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\tilde{t}_1))}_{m+1} f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)\le$$

$$\le\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\tilde{t}_1))}_{m} f_m(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,f_{m+1}(t_1,\dots,t_n))dt_1\dots dt_n$$
$$= f_{m+2}(x_1,\dots,x_n), \quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$f_{m+2}(x_1,\dots,x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,f_{m+1}(t_1,\dots,t_n))dt_1\dots dt_n$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} U\left(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,\frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde t_2}\right)\right)}_{m}}f_m(t_1,\dots,t_n)\right)dt_1\dots dt_n$$
$$= \frac{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde t_2}\right)\right)}_{m+1}}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde t_2}\right)\right)}_{m+1}}\int_{\mathbb{R}^n} U\left(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,\frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde t_2}\right)\right)}_{m}}\times\right.$$
$$\left.\times f_m(t_1,\dots,t_n)\right)dt_1\dots dt_n$$
$$\leq \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde t_2}\right)\right)}_{m+1}}\int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,f_m(t_1,\dots,t_n))dt_1\dots dt_n$$
$$= \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde t_2}\right)\right)}_{m+1}}f_{m+1}(x_1,\dots,x_n), \quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Итак, двустороннее неравенство (2.7) для всех $m\in\mathbb{N}$ доказано. Из (2.7) сразу следует, что

$$0 \leq \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde t_2}\right)\right)}_{m}}f_m(x_1,\dots,x_n) - f_{m+1}(x_1,\dots,x_n)$$
$$\leq \left(\frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde t_2}\right)\right)}_{m}} - \varphi(\varphi\dots\varphi(\tilde t_1))\right)f_m(x_1,\dots,x_n), \tag{2.8}$$
$$m=1,2,\dots, \quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

С другой стороны из неравенства (3.16) (см. [20]) сразу следует, что

$$\underbrace{\varphi\left(\varphi\ldots\varphi\left(\frac{1}{\tilde t_2}\right)\right)}_{m}\ge k_2^m\cdot\frac{1}{\tilde t_2}+1-k_2^m,\quad m=1,2,\ldots,\tag{2.9}$$

$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\tilde t_1))}_{m}\ge k_1^m\tilde t_1+1-k_1^m,\quad m=1,2,\ldots,\tag{2.10}$$

где

$$k_1:=\frac{1-\varphi(\tilde t_1)}{1-\tilde t_1},\quad k_2:=\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{\tilde t_2}\right)}{1-\frac{1}{\tilde t_2}},\quad k_j\in(0,1),\quad j=1,2.\tag{2.11}$$

Рассмотрим теперь следующие характеристические уравнения:

$$\tau\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right)=\tilde t_2,\tag{2.12}$$

$$\varphi(\tau)=\frac{\tau}{\tilde t_1}.\tag{2.13}$$

Из свойств отображения φ легко следует, что уравнения (2.12) и (2.13) обладают единственными решениями $\tau_2>\tilde t_2$ и $\tau_1\in(0,\tilde t_1)$. Теперь индукцией по m докажем справедливость следующего двустороннего неравенства:

$$\tau_1\xi\le f_m(x_1,\ldots,x_n)\le\tau_2\xi,\quad m=0,1,2,\ldots,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.\tag{2.14}$$

В случае $m=0$ цепочка неравенств (2.14) сразу следует из определения нулевого приближения в итерациях (2.1) с учетом того, что $\tau_2>1$, $\tau_1\in(0,1)$. Пусть (2.14) выполняется при некотором $m\in\mathbb{N}$. Тогда учитывая (2.12), (2.13), (2.6) и принимая во внимание условия 1), 3) из (2.1) получим

$$\begin{aligned}f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)&\ge\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tau_1\xi)dt_1\ldots dt_n\\&\ge\varphi(\tau_1)\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\xi)dt_1\ldots dt_n\ge\varphi(\tau_1)\cdot\tilde t_1\xi=\tau_1\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)&\le\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tau_2\xi)dt_1\ldots dt_n\\&=\frac{\varphi\left(\frac{1}{\tau_2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{\tau_2}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tau_2\xi)dt_1\ldots dt_n\\&\le\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{\tau_2}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\xi)dt_1\ldots dt_n\\&\le\frac{\tilde t_2\xi}{\varphi\left(\frac{1}{\tau_2}\right)}=\tau_2\xi,\quad(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Используя (2.9), (2.10) и (2.14) из (2.8) получим

$$0 \leq \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi \dots \varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} f_m(x_1,\dots,x_n) - f_{m+1}(x_1,\dots,x_n)$$

$$\leq \left(\frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi \dots \varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} - 1 + 1 - \underbrace{\varphi(\varphi \dots \varphi(\tilde{t}_1))}_{m} \right) \cdot \tau_2 \cdot \xi \tag{2.15}$$

$$\leq \left(\tilde{t}_2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{t}_2}\right) \cdot k_2^m + (1 - \tilde{t}_1) k_1^m \right) \tau_2 \xi$$

$$\leq (\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1)\tau_2 \cdot \xi \cdot k^m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где $k = \max\{k_1, k_2\} \in (0,1)$. Следовательно, если учесть (2.15), (2.9) и (2.14) будем иметь

$$|f_m(x_1,\dots,x_n) - f_{m+1}(x_1,\dots,x_n)| \leq$$

$$\leq \left| f_m(x_1,\dots,x_n) - \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi \dots \varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} f_m(x_1,\dots,x_n) \right|$$

$$+ \left| \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi \dots \varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} f_m(x_1,\dots,x_n) - f_{m+1}(x_1,\dots,x_n) \right| \tag{2.16}$$

$$\leq \tilde{t}_2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{t}_2}\right) k_2^m \cdot \tau_2 \xi + (\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1)\tau_2 \xi \cdot k^m$$

$$\leq (2\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 - 1)k^m \cdot \tau_2 \xi, \ m = 1, 2, \dots, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Индукцией по m несложно проверить, что

$$f_m \in C(\mathbb{R}^n), \quad m = 0, 1, \dots. \tag{2.17}$$

Таким образом из (2.16) и (2.17) следует равномерная сходимость последовательности непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций $\{f_m(x_1,\dots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$:

$$f_m(x_1,\dots,x_n) \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} f(x_1,\dots,x_n), \quad (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

причем $f \in C(\mathbb{R}^n)$ и в силу непрерывности функции U и условий 1), 2) предельная функция удовлетворяет уравнению (1.1). В (2.14) переходя к пределу когда $m \to \infty$ получаем

$$0 < \tau_1\xi \le f(x_1, \ldots, x_n) \le \tau_2\xi, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.18}$$

Записывая теперь неравенство (2.16) для номеров $m+1, \ldots, m+p$, затем используя неравенство треугольника имеем

(2.19)

$$|f_m(x_1, \ldots, x_n) - f_{m+p+1}(x_1, \ldots, x_n)| \le |f_m(x_1, \ldots, x_n) - f_{m+1}(x_1, \ldots, x_n)|$$

$$+|f_{m+1}(x_1, \ldots, x_n) - f_{m+2}(x_1, \ldots, x_n)| + \cdots + |f_{m+p}(x_1, \ldots, x_n) - f_{m+p+1}(x_1, \ldots, x_n)|$$

$$\le (2\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 - 1)\tau_2\xi(k^m + k^{m+1} + \cdots + k^{m+p})$$

$$\le \frac{(2\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 - 1)\tau_2\xi \cdot k^m}{1-k}, \quad m, p = 1, 2, \ldots, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

В (2.19) устремляя $p \to \infty$ получаем

$$|f_m(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| \le C \cdot k^m, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$C := \frac{(2\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 - 1)\tau_2\xi}{1-k}.$$

Таким образом теорема полностью доказана. $\square$

3. Единственность решения, примеры

Перейдем теперь к вопросу единственности построенного решения уравнения (1.1) в определенном классе функций. Справедлива следующая

Теорема 3.1. *При условиях* 1)−3) *уравнение* (1.1) *в следующем классе функций:*

$$\mathfrak{M} = \left\{ f(x_1, \ldots, x_n) : f \in M(\mathbb{R}^n), \inf_{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) > 0 \right\}$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Во-первых заметим, что из (2.18) сразу следует включение $f \in \mathfrak{M}$, где f решение уравнения (1.1) построенное при помощи последовательных приближений (2.1). Предположим теперь, что уравнение (1.1), кроме $f \in \mathfrak{M}$, обладает другим решением $f^* \in \mathfrak{M}$. Тогда если обозначить через

$$r_1 := \min \left\{ \frac{\inf\limits_{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f^*(x_1, \ldots, x_n)}{\tau_2\xi}, \frac{1}{2} \right\} \in \left(0, \frac{1}{2}\right],$$

$$r_2 := \max\left\{\frac{\sup\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f^*(x_1,\ldots,x_n)}{\tau_1\xi}, 2\right\} \in [2,+\infty)$$

и учитывать (2.18), то получаем, что

$$r_1 f(x_1,\ldots,x_n) \le f^*(x_1,\ldots,x_n) \le r_2 f(x_1,\ldots,x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Принимая во внимание (3.1), условия 1), 3) и совершая аналогичные рассуждения как при доказательстве неравенства (2.7), индукцией по m несложно проверить достоверность следующей двусторонней оценки:

$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(r_1))}_{m} f(x_1,\ldots,x_n) \le f^*(x_1,\ldots,x_n) \le \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\ldots\varphi\left(\frac{1}{r_2}\right)\right)}_{m}} f(x_1,\ldots,x_n),$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \quad m=1,2,\ldots. \tag{3.2}$$

Теперь снова используя неравенство (3.16) из работы [20], с учетом (3.2) приходим к следующей цепочке неравенств:

$$(\tilde{k}_1^m r_1 + 1 - \tilde{k}_1^m) f(x_1,\ldots,x_n) \le \underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(r_1))}_{m} f(x_1,\ldots,x_n) \le f^*(x_1,\ldots,x_n)$$
$$\le \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\ldots\varphi\left(\frac{1}{r_2}\right)\right)}_{m}} f(x_1,\ldots,x_n) \le \frac{1}{\tilde{k}_2^m\cdot\frac{1}{r_2} + 1 - \tilde{k}_2^m} f(x_1,\ldots,x_n),$$
$$m=1,2,\ldots, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

где

$$\tilde{k}_1 := \frac{1-\varphi(r_1)}{1-r_1} \in (0,1), \quad \tilde{k}_2 := \frac{1-\varphi\left(\frac{1}{r_2}\right)}{1-\frac{1}{r_2}} \in (0,1). \tag{3.3}$$

Итак мы приходим к следующей двусторонней оценке:

$$(\tilde{k}_1^m r_1 + 1 - \tilde{k}_1^m) f(x_1,\ldots,x_n) \le f^*(x_1,\ldots,x_n) \le \frac{1}{\tilde{k}_2^m\cdot\frac{1}{r_2} + 1 - \tilde{k}_2^m} f(x_1,\ldots,x_n),$$
$$m=1,2,\ldots, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

В (3.4) зафиксируя $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и устремляя $m\to\infty$ с учетом (3.3) получаем, что $f(x_1,\ldots,x_n) = f^*(x_1,\ldots,x_n)$. Теорема доказана. □

Замечание 3.1. *Возникает естественный вопрос: Является ли единственным решение уравнения* (1.1) *в следующем более широком по сравнению с* $\mathfrak{M}$ *классе* *функций:*

$$\mathfrak{M}^* = \{f(x_1,\dots,x_n) : f(x_1,\dots,x_n) \geq 0, f(x_1,\dots,x_n) \not\equiv 0, f \in M(\mathbb{R}^n)\}?$$

Ответ на этот вопрос остается открытой проблемой даже в одномерном $(n = 1)$ *случае. Известно лишь когда* $n = 1$, *а* $U(x,t,z) = K(x,t)G(z)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^+$, *где* $K(x,t) = K(-x,-t) = K(t,x) > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $K \in C(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq \gamma(x) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dt \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $\sup\limits_{r\geq 0} \int_0^r \int_r^{\infty} K(x,t)dtdx < +\infty$, $\int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} K(x,t)dtdx < +\infty$, *а* $G \in C(\mathbb{R}^+)$, *монотонно возрастает на* $\mathbb{R}^+$, $G(0) = 0$, G *- вогнута на* $\mathbb{R}^+$ *и* $G(\xi) = \xi$, *то уравнение* (1.1) *имеет единственное решение в классе* $\mathfrak{M}^*$.

В конце приведем несколько примеров ядра U, удовлетворяющее условиям $1) - 3)$:

Пример 3.1. Допустим, что в уравнении (1.1) ядро $U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,z)$ имеет вид

$$U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,z) = K(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)G(z),$$
$$(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad z \in \mathbb{R}^+,$$

где $K \in C(\mathbb{R}^{2n})$, $K(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) > 0$, $(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\sup_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n =: \Delta < +\infty$$

причем

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n = \Delta,$$

а $G \in C(\mathbb{R}^+)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}^+$, $G(0) = 0$ и существует непрерывное монотонно возрастающее и строго вогнутое отображение $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ со свойствами $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(+0) = +\infty$ такое, что

$$G(\sigma z) \geq \varphi(\sigma)G(z), \quad z \in \mathbb{R}^+, \quad \sigma \in [0,1].$$

В качестве функции G можно рассматривать следующие примеры:

a) $G(z) = z^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $z \in \mathbb{R}^+$,

b) $G(z) = \gamma(1 - e^{-z^{\alpha}})$, $\alpha \in (0,1)$, $\gamma > 0$, $z \in \mathbb{R}^+$.

Пример 3.2. Рассмотрим теперь следующий пример ядра $U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,z)$:

$$U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,z) = K_1(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)G_1(z)$$
$$+K_2(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)G_2(z), \ (x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad z \in \mathbb{R}^+,$$

где $K_j \in C(\mathbb{R}^{2n})$, $K_j(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) > 0$, $(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\sup_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n =: \Delta_j < +\infty$$

причем

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n = \Delta_j, \quad j=1,2,$$

а $G_1, G_2 \in C(\mathbb{R}^+)$ монотонно возрастают на $\mathbb{R}^+$, $G_1(0) = G_2(0) = 0$ и G_1, G_2 удовлетворяют следующим неравенствам

$$G_j(\sigma z) \geq \varphi(\sigma) G_j(z), \quad z \in \mathbb{R}^+, \quad \sigma \in [0,1], \quad j=1,2,$$

где отображение $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ обладает свойствами из примера 3.1.

Для полноты изложения приведем также примеры функций $K_j, j=1,2$ и φ:

$$K_j(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) = \frac{\Delta_j}{(2\pi)^{n/2}} \left(1 - \varepsilon_j e^{-|x|^2}\right) \cdot \prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i-t_i)^2}{2}},$$

$$(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \varepsilon_j \in (0,1), \quad j=1,2,$$

$$K_j(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) = \Delta_j \left(1 - \delta_j e^{-|x|} \sin|x|\right) \cdot \prod_{i=1}^n \int_a^b e^{-|x_i-t_i|s} L_i(s)ds,$$

$$(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \delta_j \in (0,1), \quad j=1,2,$$

где $\quad L_i \in C[a,b), \quad L_i(s) > 0, \quad s \in [a,b), \quad 0 < a < b \leq +\infty, \quad i = 1,2\dots,n$

$$\text{и} \quad 2^n \cdot \prod_{i=1}^n \int_a^b \frac{L_i(s)}{s} ds = 1,$$

$$\varphi(\sigma) = \sigma^\alpha, \quad \varphi(\sigma) = \frac{2\sigma^\alpha}{\sigma^\alpha + 1}, \quad \alpha \in (0,1), \quad \sigma \in [0,1].$$

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезное замечание.

Список литературы

[1] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, “О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны”, ТМФ, **138**, no. 3, 355 – 368 (2004).

[2] C. Atkinson, G. E. H. Reuter, “Deterministic epidemic waves”, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **80**, no. 2, 315 – 330 (1976).

[3] O. Diekmann, “Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection”, J. Math. Biol., **6**, no. 2, 109 – 130 (1978).

[4] O. Diekmann, H. G. Kaper, “On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation”, Nonlinear Anal., **2**, no. 6, 721 – 737 (1978).

[5] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, “О разрешимости некоторых нелинейных интегральных уравнений в задачах распространения эпидемии”, Математическая физика и приложения, Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Труды МИАН, **306**, МИАН, М., 287 – 303 (2019).

[6] П. С. Урысон, “Об одном типе нелинейных интегральных уравнений”, Матем. сб., **31**, no. 2, 236 – 255 (1923).

[7] A. Hammerstein, “Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen”, Acta Math., **54**, no. 1, 117 – 176 (1930).
[8] М. А. Красносельский, Положительные Решения Операторных Уравнений, Физматгиз, М., 394с (1962).
[9] П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, “О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p”, УМН, **19**, no. 2 (116), 204 – 205 (1964).
[10] М. А. Красносельский, “Неподвижные точки операторов, сжимающих или растягивающих конус”, Докл. АН СССР, **135**, no. 3, 527 – 530 (1960).
[11] П. П. Забрейко, А. И. Поволоцкий, “Квазилинейные операторы и уравнение Гаммерштейна”, Матем. заметки, **12**, no. 4, 453 – 464 (1972).
[12] F. E. Browder, “Nonlinear operators in Banach spaces”, Math. Ann., **162**, 280 – 283 (1965/1966).
[13] F. E. Browder, C. P. Gupta, “Monotone operators and nonlinear integral equations of Hammerstein type”, Bull. Amer. Math. Soc., **75**, 1347 – 1353 (1969).
[14] F. E. Browder, “Fixed point theorems for nonlinear semicontractive mappings in Banach spaces”, Arch. Ration. Mech. Anal., **21**, 259 – 269 (1966).
[15] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, “Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике”, УРСС, М., 480с (2011).
[16] Х. А. Хачатрян, “Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактными операторами”, Изв. НАН Армении. Матем., **46**, no. 2, 71 – 86 (2011).
[17] Х. А. Хачатрян, “Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью”, Изв. РАН. Сер. матем., **76**, no. 1, 173 – 200 (2012).
[18] Х. А. Хачатрян, “Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси”, Докл. РАН, **425**, no. 4, 462 – 465 (2009).
[19] Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan, “On the solvability of a class of nonlinear Urysohn integral equations on the positive half-line”, Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics **36**, 57 – 68 (2021).
[20] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, “Вопросы существования, отсутствия и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой с оператором типа Гаммерштейна — Стилтьеса”, Тр. ИММ УрО РАН, **30**, no. 1, 249 – 269 (2024).

Поступила 09 июня 2025

После доработки 25 июня 2025

Принята к публикации 31 августа 2025

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 60, номер 6, 2025

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 60, No. 6, 2025

Contents