Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 6, 2025, стр. 50 – 62.

О КОНСТРУКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УРЫСОНА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Х. А. ХАЧАТРЯН, Р. С. АМБАРЦУМЯН

Ереванский государственный университет [1]
E-mails: *khachatur.khachatryan@ysu.am; ruben.hambardzumyan2@edu.ysu.am*

Аннотация. Исследуется класс нелинейных многомерных интегральных уравнений Урысоновского типа в n-мерном евклидовом пространстве в критическом случае. При различных представлениях ядра Урысона, указанное уравнение возникает в теории p-адических струн и в математической теории распространения эпидемических заболеваний. Доказывается конструктивная теорема существования нетривиального положительного непрерывного и ограниченного решения. При этом показывается, что соответствующие последовательные приближения равномерно со скоростью убывающей геометрической прогрессии сходятся к решению уравнения. Более того, в определенном классе ограниченных функций доказывается теорема единственности построенного решения. В конце для иллюстрации важности полученных результатов приводятся конкретные примеры указанных уравнений.

MSC2020 number: 45G05.

Ключевые слова: ядро Урысона; вогнутая нелинейность; итерации; ограниченное решение; монотонность.

1. Введение

Рассмотрим следующий класс нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$:

(1.1)
$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n, f(t_1, \dots, t_n))dt_1 \dots dt_n, \ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

относительно искомой неотрицательной и ограниченной на $\mathbb{R}^n$ функции f. В уравнении (1.1) ядро Урысона $U(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n, z)$ удовлетворяет следующим условиям:

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 23RL-1A027.

1) **(условия критичности и монотонности)**
$U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,0)\equiv 0$, $U\in C(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$ и при каждом фиксированном $(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ функция $U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,z)$ монотонно возрастает по z на $\mathbb{R}^+$,
2) **(условие равномерной ограниченности интеграла ядра Урысона)**
существует число $\xi>0$ такое, что
$$\sup_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,\xi)dt_1\dots dt_n=:\lambda<+\infty,$$
причем
$$\lim_{|x|\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,\xi)dt_1\dots dt_n=\lambda,$$
3) **(условие φ-вогнутости)**
существует непрерывное монотонно возрастающее и строго вогнутое отображение $\varphi:[0,1]\to[0,1]$, со свойствами $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, $\varphi'(+0)=+\infty$ такое, что
$$U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,\sigma z)\geq\varphi(\sigma)U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,z),$$
$$(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad (t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n,\quad z\in\mathbb{R}^+,\quad \sigma\in[0,1].$$

Отметим, что уравнение (1.1), при различных конкретных представлениях функции U, имеет приложения во многих отраслях естествознания. В частности, уравнение (1.1) возникает в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в математической теории географического распространения эпидемических заболеваний в рамках обычных и модифицированных моделей Аткинсона-Ройтера и Дикмана-Капера (см. [1]-[5]).

Исторически первые результаты, касающиеся вопросов существования и единственности решения нелинейных интегральных уравнений Урысоновского типа начались в начале прошлого века с пионерских работ П. Урысона и А. Гаммерштейна (см. [6] и [7]). В указанных работах рассматривались одномерные нелинейные интегральные уравнения на ограниченных числовых множествах. В работе [6], при достаточно сильных ограничениях на ядро Урысона (таких как гладкость, существование линейной миноранты, компактность соответствующего нелинейного интегрального оператора в пространстве непрерывных на отрезке функций и т.д.), получены теоремы существования и единственности непрерывных нетривиальных решений. В дальнейшем в работе [7] при помощи вариационных методов исследованы аналогичные вопросы для нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейновского типа.

Начиная с 1950 года научной школой М. А. Красносельского начались систематические исследования одномерных нелинейных интегральных операторов Урысона и Гаммерштейна (см. [8]-[11]). В частности, в работах [8] и [9] найдены различные достаточные условия для полной непрерывности таких операторов в естественных банаховых пространствах. Сочетание указанных признаков полной непрерывности нелинейных интегральных операторов с известными принципами неподвижных точек для компактных операторов дали возможность получить теоремы существования и единственности решения указанных классов уравнений (см. [10], [11]). На западе аналогичные вопросы обсуждались научной школой Ф. Браудера, в основном не предполагая ограниченность тех множеств, где изучаются указанные классы уравнений (см. [8]-[14]). Однако следует отметить, что основным инструментом этих исследований служила известная теорема о неподвижной точке Браудера-Минти о сюрективности нелинейных коэрцетивных операторов, действующих в рефлексивных банаховых пространствах (см. например [15]).

Отметим, что случай, когда для одномерного оператора Урысона линейной минорантой в смысле М. А. Красноселького служат линейные интегральные операторы сверточного типа, одномерные аналоги уравнения (1.1) исследовались в работах [16]-[19].

Отличительными особенностями рассмотренных нами уравнений (1.1) являются отсутствие полной непрерывности многомерного интегрального оператора Урысона в пространстве ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций, свойство критичности (наличие нулевой неподвижной точки), нерефлексивность пространства, где рассматривается соответствующее уравнение, отсутствие условия гладкости на ядро Урысона, а также неограниченность области интегрирования в уравнении (1.1). Перечисленные свойства оператора Урысона не позволяют использовать выше указанные методы для построения нетривиального ограниченного решения уравнения (1.1). В настоящей работе, используя некоторые априорные оценки для вогнутых операторов, удается получить конструктивную теорему о существовании нетривиального положительного непрерывного и ограниченного на $\mathbb{R}^n$ решения уравнения (1.1). Более того, устанавливается равномерная сходимость соответствующих последовательных приближений со скоростью убывающей геометрической прогрессии. Кроме того, в определенном подклассе ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций доказывается единственность построенного решения. В конце работы приводятся наглядные примеры ядра Урысона, удовлетворяющие условиям доказанных теорем. Небезынтересно отметить, что часть приведенных примеров носит прикладной характер в вышеуказанных направлениях естествознания.

2. Существование ограниченного решения

Теорема 2.1. *При условиях* $1) - 3)$ *уравнение* (1.1) *обладает положительным ограниченным и непрерывным на* $\mathbb{R}^n$ *решением* $f(x_1, \ldots, x_n)$. *Более того существуют числа* $C > 0$ *и* $k \in (0,1)$ *такие, что* $|f_m(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| \leq C \cdot k^m$, $m = 1, 2, \ldots$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *где последовательность непрерывных на* $\mathbb{R}^n$ *функций* $\{f_m(x_1, \ldots, x_n)\}_{m=0}^{\infty}$ *определяется из следующих рекуррентных соотношений:*

$$\begin{gathered} f_{m+1}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n, f_m(t_1, \ldots, t_n)) dt_1 \ldots dt_n, \\ f_0(x_1, \ldots, x_n) \equiv \xi, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию на $\mathbb{R}^n$:

$$B(x_1, \ldots, x_n) := \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n, \xi) dt_1 \ldots dt_n. \tag{2.2}$$

По предположению $B(x_1, \ldots, x_n) > 0$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $B \in C(\mathbb{R}^n)$ (см. условие 1)). С другой стороны, согласно условию 2), существует число $r > 0$ такое, что при $|x| > r$ имеет место неравенство: $B(x_1, \ldots, x_n) \geq \frac{\lambda}{2}$. Согласно теореме Вейерштрасса существует точка $\mathring{x} \in \mathfrak{B} := \Big\{x = (x_1, \ldots, x_n) : |x| \leq r\Big\}$ такая, что $\min\limits_{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{B}} B(x_1, \ldots, x_n) = B(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n) > 0$. Следовательно

$$\varepsilon := \inf_{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n} B(x_1, \ldots, x_n) \geq \min\left\{B(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n), \frac{\lambda}{2}\right\} > 0. \tag{2.3}$$

Введем следующие обозначения

$$\tilde{t}_1 := \min\left\{\frac{\varepsilon}{\xi}, \frac{1}{2}\right\} \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \tag{2.4}$$

$$\tilde{t}_2 := \max\left\{\frac{\lambda}{\xi}, 2\right\} \in [2, +\infty). \tag{2.5}$$

Тогда из (2.1), с учетом условия 2), (2.3), (2.4) и (2.5) имеем

$$\tilde{t}_1 f_0(x_1, \ldots, x_n) \leq f_1(x_1, \ldots, x_n) \leq \tilde{t}_2 f_0(x_1, \ldots, x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Теперь индукцией по m докажем справедливость следующего двустороннего неравенства:

(2.7)
$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\tilde{t}_1))}_{m} f_m(x_1,\ldots,x_n) \le f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n) \le \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\ldots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} f_m(x_1,\ldots,x_n),$$
$$m = 1, 2, \ldots, \quad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где числа $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$ определяются по формулам (2.4) и (2.5) соответственно. Сначала проверим оценки (2.7) для номера $m = 1$. Действительно, принимая во внимание условия $1) - 3)$ и при этом учитывая рекуррентные соотношения (2.1), из (2.6) будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{t}_1) f_1(x_1,\ldots,x_n) &\le \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tilde{t}_1 f_0(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,f_1(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n \\ &= f_2(x_1,\ldots,x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(x_1,\ldots,x_n) &= \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,f_1(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tilde{t}_2 f_0(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n \\ &= \frac{\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tilde{t}_2 f_0(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n \\ &\le \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,f_0(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n \\ &= \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)} f_1(x_1,\ldots,x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Предположим теперь, что цепочка неравенств (2.7) выполняется при некотором натуральном m. Тогда снова используя условия $1) - 3)$ и индукционное предположение, из (2.1) получаем

$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\tilde{t}_1))}_{m+1} f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n) \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\tilde{t}_1))}_{m} f_m(t_1,\ldots,t_n))dt_1\ldots dt_n$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,f_{m+1}(t_1,\dots,t_n))dt_1\dots dt_n$$
$$= f_{m+2}(x_1,\dots,x_n), \quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$f_{m+2}(x_1,\dots,x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,f_{m+1}(t_1,\dots,t_n))dt_1\dots dt_n$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} U\Bigg(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,\frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}}f_m(t_1,\dots,t_n)\Bigg)dt_1\dots dt_n$$
$$= \frac{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m+1}}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m+1}}\int_{\mathbb{R}^n} U\Bigg(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,\frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}}\times$$
$$\times f_m(t_1,\dots,t_n)\Bigg)dt_1\dots dt_n$$
$$\leq \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m+1}}\int_{\mathbb{R}^n} U(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n,f_m(t_1,\dots,t_n))dt_1\dots dt_n$$
$$= \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m+1}}f_{m+1}(x_1,\dots,x_n), \quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Итак, двустороннее неравенство (2.7) для всех $m\in\mathbb{N}$ доказано. Из (2.7) сразу следует, что

$$0 \leq \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}}f_m(x_1,\dots,x_n) - f_{m+1}(x_1,\dots,x_n)$$
$$\leq \left(\frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} - \varphi(\varphi\dots\varphi(\tilde{t}_1))\right)f_m(x_1,\dots,x_n), \tag{2.8}$$
$$m=1,2,\dots, \quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

С другой стороны из неравенства (3.16) (см. [20]) сразу следует, что

$$\underbrace{\varphi\left(\varphi\ldots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m} \geq k_2^m\cdot\frac{1}{\tilde{t}_2}+1-k_2^m,\quad m=1,2,\ldots, \tag{2.9}$$

$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\tilde{t}_1))}_{m} \geq k_1^m\tilde{t}_1+1-k_1^m,\quad m=1,2,\ldots, \tag{2.10}$$

где

$$k_1:=\frac{1-\varphi(\tilde{t}_1)}{1-\tilde{t}_1},\quad k_2:=\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)}{1-\frac{1}{\tilde{t}_2}},\quad k_j\in(0,1),\quad j=1,2. \tag{2.11}$$

Рассмотрим теперь следующие характеристические уравнения:

$$\tau\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right)=\tilde{t}_2, \tag{2.12}$$

$$\varphi(\tau)=\frac{\tau}{\tilde{t}_1}. \tag{2.13}$$

Из свойств отображения φ легко следует, что уравнения (2.12) и (2.13) обладают единственными решениями $\tau_2>\tilde{t}_2$ и $\tau_1\in(0,\tilde{t}_1)$. Теперь индукцией по m докажем справедливость следующего двустороннего неравенства:

$$\tau_1\xi\leq f_m(x_1,\ldots,x_n)\leq\tau_2\xi,\quad m=0,1,2,\ldots,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{2.14}$$

В случае $m=0$ цепочка неравенств (2.14) сразу следует из определения нулевого приближения в итерациях (2.1) с учетом того, что $\tau_2>1$, $\tau_1\in(0,1)$. Пусть (2.14) выполняется при некотором $m\in\mathbb{N}$. Тогда учитывая (2.12), (2.13), (2.6) и принимая во внимание условия 1), 3) из (2.1) получим

$$\begin{aligned}f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)&\geq\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tau_1\xi)dt_1\ldots dt_n\\ &\geq\varphi(\tau_1)\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\xi)dt_1\ldots dt_n\geq\varphi(\tau_1)\cdot\tilde{t}_1\xi=\tau_1\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)&\leq\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tau_2\xi)dt_1\ldots dt_n\\ &=\frac{\varphi\left(\frac{1}{\tau_2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{\tau_2}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\tau_2\xi)dt_1\ldots dt_n\\ &\leq\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{\tau_2}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,\xi)dt_1\ldots dt_n\\ &\leq\frac{\tilde{t}_2\xi}{\varphi\left(\frac{1}{\tau_2}\right)}=\tau_2\xi,\quad(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Используя (2.9), (2.10) и (2.14) из (2.8) получим

$$0 \le \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\ldots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} f_m(x_1,\ldots,x_n) - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\le \left(\frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\ldots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} - 1 + 1 - \underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(\tilde{t}_1))}_{m}\right)\cdot\tau_2\cdot\xi \tag{2.15}$$

$$\le \left(\tilde{t}_2\left(1-\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\cdot k_2^m + (1-\tilde{t}_1)k_1^m\right)\tau_2\xi$$

$$\le (\tilde{t}_2-\tilde{t}_1)\tau_2\cdot\xi\cdot k^m, \quad m=1,2,\ldots, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

где $k = \max\{k_1,k_2\} \in (0,1)$. Следовательно, если учесть (2.15), (2.9) и (2.14) будем иметь

$$|f_m(x_1,\ldots,x_n) - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)| \le$$

$$\le \left| f_m(x_1,\ldots,x_n) - \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\ldots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} f_m(x_1,\ldots,x_n)\right|$$

$$+\left|\frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\ldots\varphi\left(\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)\right)}_{m}} f_m(x_1,\ldots,x_n) - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)\right| \tag{2.16}$$

$$\le \tilde{t}_2\left(1-\frac{1}{\tilde{t}_2}\right)k_2^m\cdot\tau_2\xi + (\tilde{t}_2-\tilde{t}_1)\tau_2\xi\cdot k^m$$

$$\le (2\tilde{t}_2-\tilde{t}_1-1)k^m\cdot\tau_2\xi,\ m=1,2,\ldots, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Индукцией по m несложно проверить, что

$$f_m \in C(\mathbb{R}^n), \quad m=0,1,\ldots. \tag{2.17}$$

Таким образом из (2.16) и (2.17) следует равномерная сходимость последовательности непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций $\{f_m(x_1,\ldots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$:

$$f_m(x_1,\ldots,x_n) \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} f(x_1,\ldots,x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

причем $f \in C(\mathbb{R}^n)$ и в силу непрерывности функции U и условий 1), 2) предельная функция удовлетворяет уравнению (1.1). В (2.14) переходя к пределу когда $m \to \infty$ получаем

$$0 < \tau_1\xi \le f(x_1, \dots, x_n) \le \tau_2\xi, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.18}$$

Записывая теперь неравенство (2.16) для номеров $m+1, \dots, m+p$, затем используя неравенство треугольника имеем

(2.19)

$$|f_m(x_1, \dots, x_n) - f_{m+p+1}(x_1, \dots, x_n)| \le |f_m(x_1, \dots, x_n) - f_{m+1}(x_1, \dots, x_n)|$$
$$+|f_{m+1}(x_1, \dots, x_n) - f_{m+2}(x_1, \dots, x_n)| + \dots + |f_{m+p}(x_1, \dots, x_n) - f_{m+p+1}(x_1, \dots, x_n)|$$
$$\le (2\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 - 1)\tau_2\xi(k^m + k^{m+1} + \dots + k^{m+p})$$
$$\le \frac{(2\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 - 1)\tau_2\xi \cdot k^m}{1-k}, \quad m, p = 1, 2, \dots, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

В (2.19) устремляя $p \to \infty$ получаем

$$|f_m(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)| \le C \cdot k^m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$C := \frac{(2\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 - 1)\tau_2\xi}{1-k}.$$

Таким образом теорема полностью доказана. □

3. Единственность решения, примеры

Перейдем теперь к вопросу единственности построенного решения уравнения (1.1) в определенном классе функций. Справедлива следующая

Теорема 3.1. *При условиях* 1)−3) *уравнение* (1.1) *в следующем классе функций:*

$$\mathfrak{M} = \left\{ f(x_1, \dots, x_n) : f \in M(\mathbb{R}^n), \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) > 0 \right\}$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Во-первых заметим, что из (2.18) сразу следует включение $f \in \mathfrak{M}$, где f решение уравнения (1.1) построенное при помощи последовательных приближений (2.1). Предположим теперь, что уравнение (1.1), кроме $f \in \mathfrak{M}$, обладает другим решением $f^* \in \mathfrak{M}$. Тогда если обозначить через

$$r_1 := \min \left\{ \frac{\inf\limits_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f^*(x_1, \dots, x_n)}{\tau_2\xi}, \frac{1}{2} \right\} \in \left(0, \frac{1}{2}\right],$$

$$r_2 := \max\left\{\frac{\sup\limits_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f^*(x_1,\dots,x_n)}{\tau_1\xi}, 2\right\} \in [2,+\infty)$$

и учитывать (2.18), то получаем, что

$$r_1 f(x_1,\dots,x_n) \le f^*(x_1,\dots,x_n) \le r_2 f(x_1,\dots,x_n), \quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Принимая во внимание (3.1), условия 1), 3) и совершая аналогичные рассуждения как при доказательстве неравенства (2.7), индукцией по m несложно проверить достоверность следующей двусторонней оценки:

$$\underbrace{\varphi(\varphi\dots\varphi(r_1))}_{m} f(x_1,\dots,x_n) \le f^*(x_1,\dots,x_n) \le \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{r_2}\right)\right)}_{m}} f(x_1,\dots,x_n),$$
$$(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \quad m=1,2,\dots. \tag{3.2}$$

Теперь снова используя неравенство (3.16) из работы [20], с учетом (3.2) приходим к следующей цепочке неравенств:

$$(\tilde{k}_1^m r_1 + 1 - \tilde{k}_1^m) f(x_1,\dots,x_n) \le \underbrace{\varphi(\varphi\dots\varphi(r_1))}_{m} f(x_1,\dots,x_n) \le f^*(x_1,\dots,x_n)$$
$$\le \frac{1}{\underbrace{\varphi\left(\varphi\dots\varphi\left(\frac{1}{r_2}\right)\right)}_{m}} f(x_1,\dots,x_n) \le \frac{1}{\tilde{k}_2^m\cdot\frac{1}{r_2} + 1 - \tilde{k}_2^m} f(x_1,\dots,x_n),$$
$$m=1,2,\dots, \quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

где

$$\tilde{k}_1 := \frac{1-\varphi(r_1)}{1-r_1}\in(0,1), \quad \tilde{k}_2 := \frac{1-\varphi\left(\frac{1}{r_2}\right)}{1-\frac{1}{r_2}}\in(0,1). \tag{3.3}$$

Итак мы приходим к следующей двусторонней оценке:

$$(\tilde{k}_1^m r_1 + 1 - \tilde{k}_1^m) f(x_1,\dots,x_n) \le f^*(x_1,\dots,x_n) \le \frac{1}{\tilde{k}_2^m\cdot\frac{1}{r_2} + 1 - \tilde{k}_2^m} f(x_1,\dots,x_n),$$
$$m=1,2,\dots, \quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

В (3.4) зафиксируя $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и устремляя $m\to\infty$ с учетом (3.3) получаем, что $f(x_1,\dots,x_n) = f^*(x_1,\dots,x_n)$. Теорема доказана. □

Замечание 3.1. *Возникает естественный вопрос: Является ли единственным решение уравнения* (1.1) *в следующем более широком по сравнению с* $\mathfrak{M}$ *классе* *функций:*

$$\mathfrak{M}^* = \{f(x_1,\ldots,x_n) : f(x_1,\ldots,x_n) \geq 0, f(x_1,\ldots,x_n) \not\equiv 0, f \in M(\mathbb{R}^n)\}?$$

Ответ на этот вопрос остается открытой проблемой даже в одномерном ($n = 1$) *случае. Известно лишь когда* $n = 1$, *а* $U(x,t,z) = K(x,t)G(z)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^+$, *где* $K(x,t) = K(-x,-t) = K(t,x) > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $K \in C(\mathbb{R}^2) \cap M(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq \gamma(x) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dt \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $\sup\limits_{r\geq 0} \int_0^r \int_r^\infty K(x,t)dtdx < +\infty$, $\int_{-\infty}^0 \int_0^\infty K(x,t)dtdx < +\infty$, *а* $G \in C(\mathbb{R}^+)$, *монотонно возрастает на* $\mathbb{R}^+$, $G(0) = 0$, G *- вогнута на* $\mathbb{R}^+$ *и* $G(\xi) = \xi$, *то уравнение* (1.1) *имеет единственное решение в классе* $\mathfrak{M}^*$.

В конце приведем несколько примеров ядра U, удовлетворяющее условиям $1) - 3)$:

Пример 3.1. Допустим, что в уравнении (1.1) ядро $U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,z)$ имеет вид

$$U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,z) = K(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G(z),$$
$$(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad z \in \mathbb{R}^+,$$

где $K \in C(\mathbb{R}^{2n})$, $K(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) > 0$, $(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n =: \Delta < +\infty$$

причем

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n = \Delta,$$

а $G \in C(\mathbb{R}^+)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}^+$, $G(0) = 0$ и существует непрерывное монотонно возрастающее и строго вогнутое отображение $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ со свойствами $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(+0) = +\infty$ такое, что

$$G(\sigma z) \geq \varphi(\sigma)G(z), \quad z \in \mathbb{R}^+, \quad \sigma \in [0,1].$$

В качестве функции G можно рассматривать следующие примеры:

a) $G(z) = z^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, $z \in \mathbb{R}^+$,

b) $G(z) = \gamma(1 - e^{-z^\alpha})$, $\alpha \in (0,1)$, $\gamma > 0$, $z \in \mathbb{R}^+$.

Пример 3.2. Рассмотрим теперь следующий пример ядра $U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,z)$:

$$U(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n,z) = K_1(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_1(z)$$
$$+K_2(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)G_2(z),\ (x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad z \in \mathbb{R}^+,$$

где $K_j \in C(\mathbb{R}^{2n})$, $K_j(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) > 0$, $(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n =: \Delta_j < +\infty$$

причем

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n = \Delta_j, \quad j=1,2,$$

а $G_1, G_2 \in C(\mathbb{R}^+)$ монотонно возрастают на $\mathbb{R}^+$, $G_1(0) = G_2(0) = 0$ и G_1, G_2 удовлетворяют следующим неравенствам

$$G_j(\sigma z) \geq \varphi(\sigma) G_j(z), \quad z \in \mathbb{R}^+, \quad \sigma \in [0,1], \quad j=1,2,$$

где отображение $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ обладает свойствами из примера 3.1.

Для полноты изложения приведем также примеры функций $K_j, j = 1,2$ и φ:

$$K_j(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) = \frac{\Delta_j}{(2\pi)^{n/2}}\left(1-\varepsilon_j e^{-|x|^2}\right)\cdot\prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i-t_i)^2}{2}},$$

$$(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \varepsilon_j \in (0,1), \quad j=1,2,$$

$$K_j(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) = \Delta_j\left(1-\delta_j e^{-|x|}\sin|x|\right)\cdot\prod_{i=1}^n \int_a^b e^{-|x_i-t_i|s} L_i(s)ds,$$

$$(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \delta_j \in (0,1), \quad j=1,2,$$

где $\quad L_i \in C[a,b), \quad L_i(s) > 0, \quad s \in [a,b), \quad 0 < a < b \leq +\infty, \quad i = 1,2\ldots,n$

$$\text{и} \quad 2^n \cdot \prod_{i=1}^n \int_a^b \frac{L_i(s)}{s}ds = 1,$$

$$\varphi(\sigma) = \sigma^\alpha, \quad \varphi(\sigma) = \frac{2\sigma^\alpha}{\sigma^\alpha+1}, \quad \alpha \in (0,1), \quad \sigma \in [0,1].$$

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезное замечание.

Список литературы

[1] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, “О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны”, ТМФ, **138**, no. 3, 355 – 368 (2004).

[2] C. Atkinson, G. E. H. Reuter, “Deterministic epidemic waves”, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **80**, no. 2, 315 – 330 (1976).

[3] O. Diekmann, “Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection”, J. Math. Biol., **6**, no. 2, 109 – 130 (1978).

[4] O. Diekmann, H. G. Kaper, “On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation”, Nonlinear Anal., **2**, no. 6, 721 – 737 (1978).

[5] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, “О разрешимости некоторых нелинейных интегральных уравнений в задачах распространения эпидемии”, Математическая физика и приложения, Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Труды МИАН, **306**, МИАН, М., 287 – 303 (2019).

[6] П. С. Урысон, “Об одном типе нелинейных интегральных уравнений”, Матем. сб., **31**, no. 2, 236 – 255 (1923).

[7] A. Hammerstein, “Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen”, Acta Math., **54**, no. 1, 117 – 176 (1930).
[8] М. А. Красносельский, Положительные Решения Операторных Уравнений, Физматгиз, М., 394с (1962).
[9] П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, “О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p”, УМН, **19**, no. 2 (116), 204 – 205 (1964).
[10] М. А. Красносельский, “Неподвижные точки операторов, сжимающих или растягивающих конус”, Докл. АН СССР, **135**, no. 3, 527 – 530 (1960).
[11] П. П. Забрейко, А. И. Поволоцкий, “Квазилинейные операторы и уравнение Гаммерштейна”, Матем. заметки, **12**, no. 4, 453 – 464 (1972).
[12] F. E. Browder, “Nonlinear operators in Banach spaces”, Math. Ann., **162**, 280 – 283 (1965/1966).
[13] F. E. Browder, C. P. Gupta, “Monotone operators and nonlinear integral equations of Hammerstein type”, Bull. Amer. Math. Soc., **75**, 1347 – 1353 (1969).
[14] F. E. Browder, “Fixed point theorems for nonlinear semicontractive mappings in Banach spaces”, Arch. Ration. Mech. Anal., **21**, 259 – 269 (1966).
[15] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, “Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике”, УРСС, М., 480с (2011).
[16] Х. А. Хачатрян, “Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактными операторами”, Изв. НАН Армении. Матем., **46**, no. 2, 71 – 86 (2011).
[17] Х. А. Хачатрян, “Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью”, Изв. РАН. Сер. матем., **76**, no. 1, 173 – 200 (2012).
[18] Х. А. Хачатрян, “Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси”, Докл. РАН, **425**, no. 4, 462 – 465 (2009).
[19] Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan, “On the solvability of a class of nonlinear Urysohn integral equations on the positive half-line”, Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics **36**, 57 – 68 (2021).
[20] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, “Вопросы существования, отсутствия и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой с оператором типа Гаммерштейна — Стилтьеса”, Тр. ИММ УрО РАН, **30**, no. 1, 249 – 269 (2024).

Поступила 09 июня 2025

После доработки 25 июня 2025

Принята к публикации 31 августа 2025