Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 6, 2025, стр. 36 – 49.

РЕШЕНИЯ КЛАССА СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Ю. ФУ, С. ЦИ

Цзинаньский университет, Цзинань, Шаньдун, Китайская Народная Республика[1]
E-mails: *3024868071@qq.com; xiaoguang.202@163.com; xiaogqi@mail.sdu.edu.cn*

Аннотация. В данной статье мы обсуждаем существование мероморфных решений следующей системы разностных уравнений

$$\begin{cases} f(z+c) = e^P f - ae^P + a \\ f(z+c) = e^Q f - be^Q + b \end{cases}$$

где P и Q являются целыми функциями, a и b — различными комплексными числами. Кроме того, в данной работе разъясняется применение этих результатов, что позволяет улучшить результаты уникальности, связанные с мероморфными функциями $f(z)$ и их сдвигами $f(z+c)$.

MSC2020 numbers: 39B32; 30D35.

Ключевые слова: мероморфная функция; система разностных уравнений; совместно принимающие значения.

1. Введение

В данной статье мы предполагаем, что читатель знаком с элементарной теорией Неванлинны, см. [1]. Теория единственности мероморфных функций является классическим приложением теории распределения значений мероморфных функций. В 1929 году Неванлинна доказал знаменитые теоремы о пяти значениях и четырех значениях: если две непостоянные мероморфные функции f и g совместно принимают пять различных значений ИК (игнорируя кратности), то $f \equiv g$; если две непостоянные мероморфные функции совместно принимают четыре различных значения УК (с учетом кратностей), то $f \equiv T \circ g$, где T — преобразование Мёбиуса. Хорошо известно, что условие "4 УК" в теореме о четырех значениях не может быть улучшено до "4 ИК". Гундерсен [2] провел дальнейшие исследования и доказал, что "4 УК" может быть улучшено до "2 УК + 2 ИК."

---

[1]Работа была поддержана Национальным научным фондом провинции Шаньдун (ZR2022MA071) и Национальным фондом естественных наук Китая (No. 12061042).

Тем не менее, вопрос о том, можно ли его улучшить до “1 УК + 3 ИК”, остается открытым.

Когда функция g в ранее упомянутых теоремах задается как производная от f, полученные результаты приобретают более глубокое значение. В 1977 году Рубель и Ян [3] рассмотрели задачу о совместном принятии значений целой функцией и её производной. Они получили следующий результат: предположим, что f — непостоянная целая функция. Если f и f' совместно применяют две различные константы a и b УК, то $f \equiv f'$. После этого многие ученые стремились улучшить этот результат. Соответствующие выводы см. в [1, Глава 8].

С достижением результатов, связанных с разностным аналогом леммы о логарифмической производной [4, 5, 6], разностные аналоги теории Неванлинны достигли значительного прогресса. Соответствующие результаты можно найти в [7]. Благодаря этому начались дискуссии, касающиеся проблемы единственности функций f и их сдвигов $f(z+c)$. Первый результат в этой области:

Теорема А [8]. *Пусть f — мероморфная функция конечного порядка, пусть $c \in \mathbb{C}$, а $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{S}(f) \bigcup \{\infty\}$ — три различные периодические функции с периодом c. Если $f(z)$ и $f(z+c)$ совместно принимают значения a_1, a_2,a_3 с УК, то $f(z) = f(z+c)$ для всех $z \in \mathbb{C}$.*

Теорема А была уточнена путем ослабления условий совместности с «3 УК» до «2 УК+1 ИК» , как сообщается в [9]. В результате многие ученые предприняли попытки дальнейшего усовершенствования условий совместности для функций, соответствующие результаты приведены в [10, 11, 12]. Уникальные результаты, касающиеся функций f и их разностных операторов, а также сдвигов и производных функций, можно найти в [7, 13]. Однако вследствие ограничения на порядок роста функций, вытекающего из разностного аналога леммы о логарифмической производной, при изучении проблемы единственности f и ее сдвигов $f(z+c)$ всегда необходимо учитывать ограничения на порядок роста функций. Недавно, Фанг и др. [14] сняли ограничение на порядок роста функций, тем самым достигнув следующего результата:

Теорема Б. *Пусть f — непостоянная мероморфная функция, пусть $c \in \mathbb{C}$. Если $f(z)$ и $f(z+c)$ совместно принимают три различных значения a, b, ∞*

УК, то $f(z) = f(z+c)$. Если только f не имеет следующего вида

$$f = \frac{(b-a)e^{\varphi+\psi} - be^{\varphi} + ae^{\psi}}{e^{\psi} - e^{\varphi}},$$

где φ и ψ — две целые функции с $\varphi(z)+\varphi(z+c) = 2k\pi i$, и $\psi(z)+\psi(z+c) = 2m\pi i$ для некоторых $k, m \in \mathbb{Z}$. Действительно, в обоих случаях имеем $f(z) = f(z+2c)$.

Одновременно с развитием дифференциальных аналогов теории Неванлинны все большее значение приобретает исследование комплексных дифференциальных уравнений. В этой области анализ систем дифференциальных уравнений становится особенно интересной темой для исследования. Соответствующие результаты можно найти в работе [15, 16, 17]. Действительно, когда мы изучаем проблему единственности f и $f(z+c)$, мы всегда получаем соответствующие результаты, исследуя свойства решений следующего разностного уравнения

$$\frac{f(z+c)-\alpha}{f-\alpha} = e^{\gamma(z)}, \tag{1.1}$$

где α — константа, а $\gamma(z)$ — целая функция. Следовательно, основное внимание в данной статье уделяется исследованию существования и формы решений системы разностных уравнений, связанных с уравнением (1.1). В качестве приложения мы можем уточнить выражение f в Теореме Б. Действительно, мы имеем

Теорема 1.1. *Пусть P и Q — две трансцендентные целые функции, а a, b — два различных значения. Тогда решения следующей системы разностных уравнений*

$$\begin{cases} f(z+c) = e^{P}f - ae^{P} + a \\ f(z+c) = e^{Q}f - be^{Q} + b \end{cases} \tag{1.2}$$

удовлетворяют одному из следующих условий

(1) *$f = f(z+c)$.*

(2) *$f = f(z+2c)$. В частности, когда $P-Q$ является многочленом, следует, что $e^{P} = -e^{Q}$. Следовательно, в соответствии с этим условием, явное выражение для f можно получить так:*

$$f = \frac{(a+b)e^{P} - (a-b)}{2e^{P}},$$

где $P + P(z+c) = 2n\pi i$, n — целое число.

Теорема 1.2. *Пусть P и Q — два непостоянных многочлена, а a, b — два различных значения. Тогда следующая система разностных уравнений*

$$\begin{cases} f(z+c) = e^P f - ae^P + a \\ f(z+c) = e^Q f - be^Q + b \end{cases}$$

не имеет мероморфных решений, если только $f = f(z+c)$.

Примечание. (1). Доказательство Теоремы 1.2 следует подходу, аналогичному в Теореме 1.1. Примечательно, что в Теореме 1.2, поскольку P и Q являются многочленами, из того, что $e^{P+P(z+c)} = 1$, следует, что $e^{Q+Q(z+c)} = 1$. Следовательно, и P, и Q должны быть постоянными, что противоречит предположению. В случае, когда $e^{P+P(z+c)} \not\equiv 1$, мы используем стратегию доказательства Теоремы 1.1, с той модификацией, что считаем R, R_1, R_2, R_3 постоянными, а не многочленами. Это также приводит к противоречию. Поэтому мы опускаем подробное доказательство Теоремы 1.2.

(2). Для удобства использования в данной статье мы будем сокращенно обозначать $f(z+c)$ как $\overline{f}$.

2. Леммы

Лемма 2.1. [1, Теорема 1.51] *Предположим, что f_j $(j = 1, \ldots n)$ $(n \geq 2)$ являются мероморфными функциями, а g_j $(j = 1, \ldots, n)$ — целыми функциями, удовлетворяющими следующим условиям:*

(1) $\sum_{j=1}^{n} f_j e^{g_j} = 0$.

(2) $1 \leq j < k \leq n$, $g_j - g_k$ *не являются константами для* $1 \leq j < k \leq n$.

(3) *Для* $1 \leq j \leq n$, $1 \leq h < k \leq n$,

$$T(r, f_j) = o\{T(r, e^{g_h - g_k})\}, \quad r \to \infty, r \notin E,$$

где $E \subset (1, \infty)$ имеет конечную линейную меру.

Тогда $f_j(z) \equiv 0$.

Лемма 2.2. [1, Теорема 1.64] *Пусть f_j $(j = 1, \ldots n)$ — непостоянные мероморфные функции, и пусть f_j $(j = n+1, \ldots, n+m)$ — мероморфные функции, такие что*

$$f_j \not\equiv 0, \quad (j = n+1, \ldots, n+m)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n+m} f_j \equiv A,$$

где A *— ненулевая константа. Если существует подмножество* $I \subseteq R^+$ *удовлетворяющее* $mesI = \infty$ *такое, что*

$$\sum_{j=1}^{n+m} N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + (n+m-1)\overline{N}(r, f_j) < (\lambda + o(1))T(r, f_k), \quad r \to \infty, r \in I,$$

где $\lambda < 1$, $k = 1, 2, \ldots n$. *Тогда существует* $t_i \in \{0, 1\}(i = 1, 2, \ldots m)$ *такое, что*

$$\sum_{i=1}^{m} t_i f_{n+i} \equiv A.$$

Лемма 2.3. [1, Теорема 1.55] *Пусть* f_j $(j = 1, \ldots n)$ *— непостоянные мероморфные функции, удовлетворяющие* $\Theta(\infty, f_j) = 1$ *для* $j = 1, \ldots, p$, *и пусть* a_j $(j = 0, 1, \ldots n)$ *— ненулевые константы. Если*

$$\sum_{j=1}^{p} a_j f_j \equiv a_0.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{p} \delta(0, f_j) \leq p - 1,$$

где

$$\delta(0, f) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, \frac{1}{f})}{T(r, f)}, \quad \Theta(\infty, f) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overline{N}(r, f)}{T(r, f)}.$$

Лемма 2.4. [1, Лемма 2.1] *Пусть* f *и* g *— непостоянные рациональные функции. Если* f *и* g *совместно принимают значения* $0, \infty$ *УК, то существует ненулевая константа* K *такая, что* $f \equiv Kg$.

3. Доказательство Теоремы 1.1

Предположим, что f является непостоянным мероморфным решением уравнений (1.2). Если $e^P = e^Q$, то из этого следует, что $f = \overline{f}$. В последующем анализе мы рассмотрим случай, когда $e^P \not\equiv e^Q$.Из уравнений (1.2) получаем, что

$$f = \frac{ae^P - be^Q - (a-b)}{e^P - e^Q}. \tag{3.1}$$

Следовательно,

$$\overline{f} = \frac{ae^{\overline{P}} - be^{\overline{Q}} - (a-b)}{e^{\overline{P}} - e^{\overline{Q}}}. \tag{3.2}$$

Объединив уравнение (3.1) с первым уравнением (1.2), получаем

$$\overline{f} = \frac{ae^{2P} - be^{P+Q} - (a-b)e^{P}}{e^{P} - e^{Q}} - ae^{P} + a. \tag{3.3}$$

Кроме того, из уравнений (3.2) и (3.3)можно сделать вывод, что

$$e^{P} - e^{Q} - e^{P+\overline{P}} + e^{Q+\overline{Q}} + e^{P+Q+\overline{P}} - e^{P+Q+\overline{Q}} = 0. \tag{3.4}$$

Случай 1. Предположим, что $e^{P+\overline{P}} = 1$. Следовательно, из первого уравнения (1.2) мы делаем вывод, что

$$\frac{\overline{f} - a}{f - a} = e^{P}.$$

Кроме того,

$$\frac{\overline{\overline{f}} - a}{\overline{f} - a} = e^{\overline{P}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\overline{\overline{f}} - a}{f - a} = e^{P+\overline{P}} = 1,$$

что указывает на то, что $f = \overline{\overline{f}}$.

В частности, когда $P - Q$ является многочленом, мы можем вывести выражение для f. Разделив обе части уравнения (3.4) на e^{Q}, получаем

$$-e^{\overline{P}+\Phi} + e^{\overline{Q}} - e^{P+\overline{Q}} = -e^{\Phi}, \tag{3.5}$$

где $\Phi = P - Q$. Применив Лемму 2.2 к (3.5), получаем $e^{P+\overline{Q}} = e^{\Phi}$, что означает $e^{Q+\overline{Q}} = 1$. Следовательно,

$$\frac{e^{P+\overline{P}}}{e^{Q+\overline{Q}}} = e^{\Phi+\overline{\Phi}} = 1.$$

Учитывая предположение, что Φ является многочленом, получаем, что Φ должно быть константой. Итак, $e^{2\Phi} = 1$. Учитывая предположение, что $e^{P} \not\equiv e^{Q}$, мы делаем вывод, что $e^{\Phi} = -1$. В результате можно сделать вывод, что $e^{P} = -e^{Q}$. Кроме того, из уравнения (3.1) имеем

$$f = \frac{(a+b)e^{P} - (a-b)}{2e^{P}}.$$

Случай 2. Предположим, что $e^{P+\overline{P}} \not\equiv 1$. Разделив обе части (3.4) на e^{Q}, получаем

$$e^{R} - e^{R+\overline{P}} + e^{\overline{Q}} + e^{P+\overline{P}} - e^{P+\overline{Q}} = 1, \tag{3.6}$$

где $R = P - Q$.

Случай 2.1. Если R является многочленом, то уравнение (3.6) переписываем следующим образом:

$$-e^{R+\overline{P}} + e^{\overline{Q}} + e^{P+\overline{P}} - e^{P+\overline{Q}} = 1 - e^R. \tag{3.7}$$

Если $1 - e^R \not\equiv 0$, то по Лемме 2.2 существуют $t_i \in \{0, 1\}, (1 = 1, 2)$, удовлетворяющие

$$t_1 e^{P+\overline{P}} - t_2 e^{P+\overline{Q}} = 1 - e^R.$$

Если $t_1 = 0$, то имеем

$$-e^{P+\overline{Q}} = 1 - e^R. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.7), получаем

$$-e^{R+\overline{P}} + e^{\overline{Q}} + e^{P+\overline{P}} = 0.$$

Разделив обе части вышеуказанной формулы на $e^{\overline{P}}$, получаем

$$-e^R + e^{-\overline{R}} + e^P = 0$$

что невозможно, если R является многочленом. Аналогично, противоречие можно получить и при $t_2 = 0$.

Если $t_1 = 1, t_2 = 1$, то получаем

$$e^{P+\overline{P}} - e^{P+\overline{Q}} = 1 - e^R. \tag{3.9}$$

Из (3.7) и (3.9), следует, что

$$e^{R+\overline{R}} = 1.$$

Исходя из предположения, что R является многочленом, мы делаем вывод, что R должен быть константой. Пусть $e^R = A(\neq 0, 1)$, тогда

$$e^P = Ae^Q, \quad e^{P+\overline{P}} = A^2 e^{Q+\overline{Q}}, \quad e^{P+Q+\overline{P}} = A^2 e^{2Q+\overline{Q}}, \quad e^{P+Q+\overline{Q}} = Ae^{2Q+\overline{Q}}.$$

Подставляя вышеуказанные уравнения в (3.4), получаем

$$1 - (1 + A)e^{\overline{Q}} + Ae^{Q+\overline{Q}} = 0. \tag{3.10}$$

Если $A = -1$, то $e^{Q+\overline{Q}} = 1$. Следовательно, $e^{P+\overline{P}} = (-1)^2 \cdot 1 = 1$ что противоречит предположению, что $e^{P+\overline{P}} \not\equiv 1$. Следовательно, $A \neq -1$.

Если $Q + \overline{Q}$ является многочленом, то из (3.10) следует, что Q является многочленом, что приводит к противоречию. Если $Q + \overline{Q}$ является трансцендентной целой функцией, то, применив Лемму 2.1 к (3.10) и учитывая, что $A \neq -1$, мы также приходим к противоречию.

Таким образом, мы получаем $1-e^R=0$, что означает $e^P=e^Q$, что противоречит предположению, что $e^P \not\equiv e^Q$. Следовательно, R является трансцендентной целой функцией.

Случай 2.2. Если $R+\overline{P}$ является многочленом, то мы задаем $R+\overline{P}=R_1$. Следовательно, (3.6) можно переписать в виде

$$e^{R_1}e^{-\overline{P}}+e^{\overline{Q}}+e^{R_1}e^{Q}-e^{R_1}e^{Q-\overline{R}}=1+e^{R_1}. \tag{3.11}$$

Если $1+e^{R_1}\not\equiv 0$, то, применив Лемму 2.2 к (3.11), имеем

$$-e^{R_1}e^{Q-\overline{R}}=1+e^{R_1}. \tag{3.12}$$

Отсюда следует, что

$$N\left(r,\frac{1}{1+e^{R_1}}\right)=0,$$

что указывает на то, что R_1 является константой. Кроме того, очевидно, что $Q-\overline{R}$ также является константой. Таким образом, $Q-\overline{R}+R_1=P+\overline{Q}$ также является константой. Пусть $e^{R_1}=B(\neq 0,-1)$, тогда из (3.11) и (3.12) следует, что

$$Be^{-\overline{P}}+e^{\overline{Q}}+Be^{Q}=0.$$

Разделив обе части вышеуказанной формулы на $e^{\overline{Q}}$, получаем

$$-Be^{-\overline{P}-\overline{Q}}=Be^{Q-\overline{Q}}+1,$$

что означает

$$N\left(r,\frac{1}{Be^{Q-\overline{Q}}+1}\right)=0.$$

Следовательно, $Q-\overline{Q}$ является константой. Одновременно мы наблюдаем, что $\overline{P}+\overline{Q}$ является константой, а значит, $P+Q$ также является константой. Более того, $\overline{P}+Q=\overline{P}+\overline{Q}+Q-\overline{Q}$ является константой. Следовательно, $P-\overline{P}=P+\overline{Q}-(\overline{P}+Q)-(\overline{Q}-Q)$ является константой. Пусть

$$e^{\overline{P}-P}=D(\neq 0),\quad e^{\overline{Q}-Q}=E(\neq 0),\quad e^{P+Q}=F(\neq 0).$$

Подставляя вышеуказанные уравнения в (3.4), получаем

$$(1+DF)e^P-(1+EF)e^Q-De^{2P}+Ee^{2Q}=0.$$

Если $(1+DF)(1+EF)\neq 0$. Поскольку P, Q, $R=P-Q$, $P-2Q=P+Q-3Q$, $Q-2P=P+Q-3P$ являются трансцендентными целыми функциями, из Леммы 2.1 можно вывести $D=E=0$, что приводит к противоречию.

Если $(1+DF)(1+EF)=0$, что приводит к противоречию $D=E=0$ из Леммы 2.1, что невозможно.

Таким образом, $1+e^{R_1}=0$. Следовательно, уравнение (3.11) можно переписать в виде

$$e^{-\overline{P}}-e^{\overline{Q}}+e^{Q}-e^{Q-\overline{R}}=0.$$

Разделив обе части вышеуказанного уравнения на e^{Q}, получаем

$$e^{-\overline{P}-Q}-e^{\overline{Q}-Q}-e^{-\overline{R}}=-1. \tag{3.13}$$

Применив Лемму 2.3 к уравнению (3.13), мы приходим к выводу, что по крайней мере одно из $-\overline{P}-Q$ и $\overline{Q}-Q$ должно быть константой.

Предположим, что $-\overline{P}-Q$ является константой, тогда зададим $e^{-\overline{P}-Q}=G(\neq 0)$. Следовательно, (3.13) можно переписать как

$$e^{\overline{Q}-Q}+e^{-\overline{R}}=1+G. \tag{3.14}$$

Если $1+G\neq 0$, то по Лемме 2.2, получаем $e^{\overline{Q}-Q}=1+G$, что означает, что $e^{-\overline{R}}=0$, что приводит к противоречию. С другой стороны, если $1+G=0$, то из (3.14) следует, что $e^{\overline{Q}+\overline{R}-Q}=e^{\overline{P}-Q}=-1$, что указывает на то, что $\overline{P}-Q$ является константой. Предполагая, что $-\overline{P}-Q$ является константой, мы получаем, что Q является константой, что противоречит нашим изначальным предположениям.

Предположим, что $\overline{Q}-Q$ является константой, тогда зададим $e^{\overline{Q}-Q}=H(\neq 0)$. Уравнение (3.13) можно переписать как

$$e^{-\overline{P}-Q}-e^{-\overline{R}}=H-1. \tag{3.15}$$

Если $H-1\neq 0$,то, применив Лемму 2.2 к (3.15), получаем $e^{-\overline{P}-Q}=H-1$, что означает $e^{-\overline{R}}=0$, что невозможно. В противном случае, если $H-1=0$, то из (3.15) следует, что $e^{-\overline{P}-Q+\overline{R}}=e^{-Q-\overline{Q}}=1$, предполагая, что $-Q-\overline{Q}$ является константой. Учитывая, что $\overline{Q}-Q$, получаем, что Q является константой, что снова противоречит нашим предположениям. Следовательно, $R+\overline{P}$ является трансцендентной целой функцией.

Случай 2.3. Если $P+\overline{P}$ является многочленом, то зададим $P+\overline{P}=R_2$. Следовательно, уравнение (3.6) можно переписать в виде

$$e^{R}-e^{R_2}e^{-Q}+e^{\overline{Q}}-e^{R_2}e^{-\overline{R}}=1-e^{R_2}. \tag{3.16}$$

При предположении, что $e^{P+P} \not\equiv 1$, следует, что $1 - e^{R_2} \not\equiv 0$. Применив Лемму 2.3 к (3.16), получаем противоречие. Следовательно, $P + \overline{P}$ является трансцендентной целой функцией.

Случай 2.4. Если $P + \overline{Q}$ является многочленом, то мы задаем $P + \overline{Q} = R_3$. Следовательно, мы переписываем (3.6) следующим образом

$$e^{R} - e^{R_3} e^{\overline{R}-Q} + e^{\overline{Q}} + e^{R_3} e^{\overline{R}} = 1 + e^{R_3}. \tag{3.17}$$

Если $1 + e^{R_3} \not\equiv 0$, то, применяя Лемму 2.2, получаем $-e^{R_3} e^{\overline{R}-Q} = 1 + e^{R_3}$. Это означает, что

$$N\left(r, \frac{1}{1+e^{R_3}}\right) = 0.$$

Кроме того, из этого следует, что e^{R_3} и $e^{\overline{R}-Q}$ являются константами. Пусть $e^{R_3} = M(\neq 0, -1)$, тогда (3.17) можно переписать в виде

$$e^{R} - M e^{\overline{R}-Q} + e^{\overline{Q}} + M e^{\overline{R}} = 1 + M. \tag{3.18}$$

Применив Лемму 2.2 к (3.18), получаем $-M e^{\overline{R}-Q} = 1 + M$. Следовательно, из уравнения (3.18), получаем

$$e^{R} + e^{\overline{Q}} + M e^{\overline{R}} = 0.$$

Разделив обе части вышеуказанной формулы на $e^{\overline{Q}}$, получаем

$$e^{R-\overline{Q}} + M e^{\overline{R}-\overline{Q}} = -1.$$

Применив Лемму 2.3 к вышеуказанному уравнению, получаем, что $R - \overline{Q}$ и $\overline{R} - \overline{Q} = \overline{P} - 2\overline{Q}$ должны быть константами. Таким образом, $P - 2Q$ является константой. Кроме того, мы видим, что $R - \overline{Q} + R_3 = 2P - Q$ является константой. Следовательно, мы получаем, что $P - 2Q + 2P - Q = 3R$ является константой, что приводит к противоречию.

Если $1 + e^{R_3} = 0$, то R_3 является константой. Мы можем переписать (3.17) как

$$e^{R} + e^{\overline{R}-Q} + e^{\overline{Q}} - e^{\overline{R}} = 0.$$

Разделив обе части вышеуказанной формулы на $e^{\overline{R}}$, получаем

$$e^{R-\overline{R}} + e^{-Q} + e^{2\overline{Q}-\overline{P}} = 1. \tag{3.19}$$

Применив Лемму 2.3 к вышеуказанному уравнению, мы делаем вывод, что по крайней мере одно из $R - \overline{R}$ и $2\overline{Q} - \overline{P}$ должен быть константой.

Предположим, что $R-\overline{R}$ является константой, тогда зададим $e^{R-\overline{R}}=N$, и уравнение (3.19) можно переписать в виде

$$e^{-Q}+e^{2\overline{Q}-\overline{P}}=1-N. \tag{3.20}$$

Если $1-N\neq 0$, то из Леммы 2.3, следует, что $2\overline{Q}-\overline{P}$ должно быть константой, что означает, что Q является константой, что является противоречием. Если $1-N=0$, то из (3.20) следует, что

$$e^{2\overline{Q}-\overline{P}+Q}=-1,$$

что означает, что $2\overline{Q}-\overline{P}+Q$ является константой. Учитывая, что $R-\overline{R}$ и $R_3=P+\overline{Q}$ являются константами, мы делаем вывод, что $P+\overline{Q}-R+\overline{R}=Q+\overline{P}$ является константой. Следовательно, $2\overline{Q}-\overline{P}+Q-Q-\overline{P}=-2\overline{R}$ является константой, что является противоречием.

Предположим, что $2\overline{Q}-\overline{P}$ является константой, тогда зададим $e^{2\overline{Q}-\overline{P}}=T$, и перепишем (3.19) как

$$e^{R-\overline{R}}+e^{-Q}=1-T. \tag{3.21}$$

Если $1-T\neq 0$, то из Леммы 2.3 следует, что $R-\overline{R}$ является константой, что предполагает, что Q является константой, что является противоречием. Если $1-T=0$, то из (3.21), получаем, что $e^{P-\overline{R}}=-1$, что означает, что $P-\overline{R}$ является константой. Следовательно $P-\overline{R}-(2\overline{Q}-\overline{P})=P-\overline{Q}$ является константой. Отмечая, что $R_3=P+\overline{Q}$ является константой, получаем $P+\overline{Q}+P-\overline{Q}=2P$ является константой, что является противоречием. Следовательно, $P+\overline{Q}$ является трансцендентной целой функцией.

Таким образом, мы утверждаем, что $R, R+\overline{P}, \overline{Q}, P+\overline{P}, P+\overline{Q}$ являются трансцендентными целыми функциями. Следовательно, при применении Леммы 2.3 к (3.6), возникает противоречие.

4. Применение Теоремы 1.1

В качестве применения Теоремы 1.1 мы усовершенствовали результаты теоремы Б и получили следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть f — непостоянная мероморфная функция, пусть $c\in\mathbb{C}$. Если $f(z)$ и $f(z+c)$ совместно принимают три различных значения a, b, ∞ УК, то верно следующее заключение:*

(1) $f = f(z+c)$.

(2) $f = \frac{(b-a)e^{P+Q} - be^{P} + ae^{Q}}{e^{Q} - e^{P}}$, *по крайней мере одно из* P *и* Q *является трансцендентной целой функцией и удовлетворяет* $P + \overline{P} = 2k\pi i$, *а* $Q + \overline{Q} = 2m\pi i$ *для некоторых* $k, m \in \mathbb{Z}$.

Доказательство Теоремы 4.1. Если f является непостоянной рациональной функцией, то в сочетании с условием общего значения из Леммы 2.4 следует, что $f = \overline{f}$.

Далее мы рассмотрим случай, когда f является трансцендентной мероморфной функцией. Учитывая, что $\overline{f}$ и f совместно принимают значения a, b и ∞ УК, имеем

$$\frac{\overline{f} - a}{f - a} = e^{P}, \quad \frac{\overline{f} - b}{f - b} = e^{Q},$$

где P и Q — две целые функции.

Если P и Q являются многочленами, то по Теореме Б мы приходим к выводу, что либо $f = \overline{f}$, либо

$$f = \frac{(b-a)e^{P+Q} - be^{P} + ae^{Q}}{e^{Q} - e^{P}}, \tag{4.1}$$

где $P + \overline{P} = 2k\pi i$ и $Q + \overline{Q} = 2m\pi i$, k и m — целые числа. Примечательно, что и P , и Q являются многочленами, что означает, что P и Q являются константами. Следовательно, согласно уравнению (4.1), f также должна быть константой. Это противоречит нашему предположению, что f является трансцендентной мероморфной функцией. Поэтому, если P, Q являются многочленами, то из этого обязательно следует, что $f = \overline{f}$.

Если по крайней мере одно из P и Q является трансцендентной целой функцией, то по Теореме Б мы приходим к выводу, что либо $f = \overline{f}$, либо

$$f = \frac{(b-a)e^{P+Q} - be^{P} + ae^{Q}}{e^{Q} - e^{P}},$$

где $P + \overline{P} = 2k\pi i$ и $Q + \overline{Q} = 2m\pi i$, k и m — целые числа.

Дальнейшее обсуждение. Действительно, при определенных условиях вид функции f в заключении (2) Теоремы 4.1 можно еще больше упростить.

Если P — трансцендентная целая функция, а Q — многочлен, то из этого следует, что $Q = m\pi i$. Если m — четное число, то уравнение (4.1) сводится к $f = a$, что является противоречием. Если m является нечетным числом, то

уравнение (4.1) дает
$$f = \frac{(2b-a)e^P + a}{e^P + 1},$$
где $P + \overline{P} = 2k\pi i$, k — целое число.

И наоборот, если Q является трансцендентной целой функцией, а P — многочленом, то аналогичное рассуждение, как и выше, приводит к следующему результату:
$$f = \frac{(2a-b)e^Q + b}{e^Q + 1},$$
где $Q + \overline{Q} = 2m\pi i$, m — целое число.

Когда P и Q являются трансцендентными целыми функциями, тот факт, что f удовлетворяет заключению 2 Теоремы 4.1 означает, что $f \neq \overline{f}$. Следовательно, из Теоремы 1.1, мы делаем вывод, что если $P - Q$ является многочленом, то
$$f = \frac{(a+b)e^P - (a-b)}{2e^P},$$
где $P + \overline{P} = 2n\pi i$, n — целое число.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные предложения и комментарии.

Список литературы

[1] C. C. Yang and H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2003).

[2] G. G. Gundersen, “Meromorphic functions that share four values”, Trans. Amer. Math. Soc., **277**, 545 – 567 (1983).

[3] L. A. Rubel and C. C. Yang, “Values shared by an entire function and its derivative”, Lecture Notes in Math., **599**, Springer, Berlin, 101 – 103 (1977).

[4] Y. M. Chiang and S. J. Feng, “On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane”, Ramanujan J., **16**, 105 – 129 (2008).

[5] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, “Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations”, J. Math. Anal. Appl., **314**, 477 – 487 (2006).

[6] R. G. Halburd and R. J. Korhonen and K. Tohge, “Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages”, Trans. Amer. Math. Soc. **366**, 4267 – 4298 (2014).

[7] Z. X. Chen, Complex Differences and Difference Equations, Mathematics Monograph Series 29, Science Press, Beijing (2014).

[8] J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine and J. Rieppo, “Uniqueness of meromorphic functions sharing values with their shifts”, Complex Var. Elliptic Equ. **56**, 81 – 92 (2011).

[9] J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo and J. L. Zhang, “Value sharing results for shifts of meromorphic functions, and sufficient conditions for periodicity”, J. Math. Anal. Appl., **355**, 352 – 363 (2009).

[10] K. S. Charak, R. J. Korhonen and G. Kumar, “A note on partial sharing of values of meromorphic functions with their shifts”, J. Math. Anal. Appl., **435**, 1241 – 1248 (2016).

[11] X. M. Li, X. Yang and H. X. Yi, “Entire functions sharing an entire function of smaller order with their shifts”, Proc. Japan Acad. Ser. A., **89**, 34 – 39 (2013).

[12] X. G. Qi, “Value distribution and uniqueness of difference polynomials and entire solutions of difference equations”, Ann. Polon. Math., **102**, 129 – 142 (2011).
[13] K. Liu, I. Laine and L. Z. Yang, Complex Delay-Differential Equations, De Gruyter, Boston (2021).
[14] L. M. Fang, H. Li, W. Q. Chen and X. Yao, “A difference version of the Rubel-Yang-Mues-Steinmetz-Gundersen Theorem”, Comput. Methods Funct. Theory, **24**, 811 – 832 (2024).
[15] Y. H. Guo and K. Liu, “Meromorphic solutions of Fermat type differential and difference equations of certain types”, Ann. Polon. Math. **131**, 1 – 19 (2023).
[16] Y. X. Li and K. Liu, “Meromorphic solutions of nonlinear systems of Fermat type”, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **46**, 196 (2023).
[17] H. Y. Xu, S. Y. Liu and Q. P. Li, “Entire solutions for several systems of nonlinear difference and partial differential-difference equations of Fermat-type”, J. Math. Anal. Appl., **483**, 123641 (2020).

Поступила 19 декабря 2024

После доработки 21 февраля 2025

Принята к публикации 01 марта 2025