Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 6, 2025, стр. 28 – 35.

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ФРАКТАЛОВ В КОМПОЗИЦИЯХ АРМЯНСКОЙ АРХИТЕКТУРЫ

А. А. НАХАПЕТЯН

Университет Ла Сапиенца, Рим, Италия
E-mail: *ar.nahapetyan@gmail.com*

Аннотация. Приводится фрактальный анализ следующих объектов современной армянской архитектуры: Ереванский каскад, Правительственное здание №2 на Площади Республики, собор Святого Григория Просветителя и церковь Святой Троицы. На основе вычисления соответствующих фрактальных размерностей (метрика Хаусдорфа–Безиковича) получены объективные (количественные) оценки их эстетической привлекательности.

MSC2020 number: 28A80; 92C99.

Ключевые слова: фрактал; фрактальная размерность; архитектура.

1. Введение

Хорошо известно, что геометрическая наука фундаментальным образом влияет на архитектурное творчество, содействуя ему при выборе форм, размеров и структуры сооружений. Немаловажную роль играет геометрия и в вопросах эстетической привлекательности проектируемых объектов.

Говоря геометрия, мы не имеем в виду исключительно евклидову (классическую) геометрию, изучающую хорошо известные пространственные фигуры (тела) — многогранники, цилиндры, конусы, сферы и т.д. Эти тела евклидовой геометрии предполагаются идеальными как с точки зрения форм, так и с точки зрения свойств их поверхностей. Это означает, что поверхности тел в рамках классической геометрии мыслятся абсолютно гладкими без наличия каких-либо изъянов. Однако, при таких ограничениях классическая геометрия способна описать лишь весьма узкий класс природных структур и явлений. Ведь (подавляющее) большинство объектов природы не обладают правильными геометрическими формами и идеальной поверхностью. Возникает вопрос, как построить геометрию, описывающую сложнейшие по своей структуре физические объекты, например, такие как формы облаков и гор, кроны деревьев или система бронхов человека.

Этот вопрос интересовал ученых издавна, но только с появлением мощных вычислительных комплексов такая геометрия была создана. Ее автор, Бенуа Мандельброт [1] назвал свою теорию фрактальной геометрией. В основе этой теории лежит понятие фрактала — геометрической фигуры, сложной по форме, но простой по алгоритму построения.

Фрактальная геометрия предлагает различные способы описания и измерения природных объектов и явлений. Ее первоначальными понятиями являются масштаб измерения и дробная размерность пространства. Существует мнение, что фрактальная геометрия — это основная геометрия живой природы.

Начиная с последней декады прошлого столетия идеи фрактальной геометрии все больше используются в архитектурных композициях на основе компьютерных технологий. Идет поиск гармонии и красоты архитектурных форм с применением фрактальных мотивов. Сооружения с высокой фрактальностью характеризуются необычностью и уникальностью фасада, а также сильной эстетической привлекательностью.

Благодаря фрактальной геометрии, впервые в архитектуре были установлены объективные (количественные) критерии эстетической привлекательности архитектурных строений — высокий уровень фрактальности композиции говорит о ее несомненных художественных достоинствах (см., например, [2–8]).

Касательно армянской архитектуры, публикации по фрактальному анализу ее композиций практически отсутствуют. В недавно опубликованной работе [9], автором был проведен фрактальный анализ трех важнейших памятников средневековой Армении: храма Рипсиме (618 г.), храма Звартноц (середина VII в.) и Анийского кафедрального собора (IX–XI вв.).

Цель настоящей работы — провести фрактальный анализ для некоторых объектов армянской архитектуры последнего времени с очевидным наличием фрактальных мотивов. Будут рассмотрены Ереванский каскад, Правительственное здание №2 на Площади Республики, собор Святого Григория Просветителя и церковь Святой Троицы.

Фрактальный анализ осуществляется с использованием вычислительных программ. Это программный пакет FrakOut!, применяемый для расчета параметров архитектурных структур, в частности, для вычисления метрики Хаусдорфа–Безиковича рассматриваемых объектов. Применяется также программный пакет STATISTICA, позволяющий вычислять статистические оценки требуемых величин на основе имеющихся данных.

2. Геометрия фракталов и размерность Хаусдорфа–Безиковича

По Мандельброту [1] фрактал — это структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Объект называется самоподобным, когда увеличенные части объекта похожи на сам объект или друг на друга. Самоподобие одно из основных свойств фрактала. В окружающей среде фракталы встречаются почти всюду. Это, например, береговые линии островов, снежинки, кристаллы, кочан брокколи и т.д. Фракталы хорошо изучены и имеют многочисленные применения (см., например, [3, 10–12]).

С математических позиций фрактал — совокупность точек Евклидова пространства, которая самоподобна и размерность Хаусдорфа–Безиковича которой либо дробная, либо превышает её топологическую размерность.

Размерность Хаусдорфа–Безиковича (фрактальная размерность) для конечного множества G в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется следующим образом. Пусть $\mathbb{Z}^n(\Delta)$ — кубическая решётка в R^n с длиной ребра куба (ячейки) равной Δ. Пусть $N(\Delta)$ — минимальное число кубов решетки, необходимых для покрытия множества G. Тогда фрактальная размерность D множества G определяется следующим образом

$$D = -\lim_{\Delta\to 0} \frac{\ln N(\Delta)}{\ln \Delta}.$$

Эта размерность допускает и дробные значения. Отметим, что размерность Хаусдорфа–Безиковича может быть определена эквивалентным образом на основе следующего требования

$$\lim_{\Delta\to 0} N(\Delta)\Delta^d = \begin{cases} 0, & \text{если } d > D, \\ \infty, & \text{если } d < D. \end{cases}$$

Таким образом, размерность D множества G по сути является той границей, которая показывает, что если $d < D$, то количество кубов $N(\Delta)$ недостаточно для покрытия множества G, а если $d > D$, то количество кубов избыточно для покрытия.

Размерность Хаусдорфа–Безиковича растет в зависимости от степени извилистости объекта. Для прямой она равна единице, для слегка извилистой линии 1,03, для более извилистой 1,16, а для сильно извилистой 1,57 и т.д.

Общепринято, что успехи фрактальной геометрии обязаны именно метрике Хаусдорфа–Безиковича, которая оказалась весьма удобной количественной мерой для объектов с четко выраженными изъянами — шероховатостью, изломанностью, трещинами и т.д.

Помимо природных фракталов существуют и искусственные. Первые примеры таких фракталов были построены в конце девятнадцатого века в связи с сугубо математическими задачами. Это пример Вейерштрасса нигде не дифференцируемой и непрерывной функции, сингулярное множество Кантора, снежинка Коха, броуновская кривая на плоскости и т.д. Для некоторых из них вычисленны фрактальные размерности — канторово множество имеет фрактальную размерность $D = \ln 2/\ln 3$, а для броуновской кривой на плоскости эта размерность равна 2, что больше ее топологической размерности.

3. Фрактальная размерность как объективная оценка художественной привлекательности архитектурных композиций

Много работ посвящено вопросам психологии восприятия фракталов. Первые работы в этом направлении осуществлялись группой профессора Дж. Спротта [7]. Сходные исследования проводил Р. Тейлор [8], который показал, что подавляющее большинство участников эксперимента предпочитают фрактальные модели другим. Спротт установил, что привлекательность фрактальных объектов коррелирует с фрактальной размерностью. Результаты экспериментов показали, что для испытуемых предпочтительней были объекты с фрактальной размерностью от 1,1 до 1,5.

Работы по психологии восприятия фракталов ведутся и в настоящее время (см., например, [2–6]). В этих исследованиях подтвердилась гипотеза, что эстетическая привлекательность архитектурных композиций во многом определяется значением ее фрактальной размерности.

4. Фрактальный анализ современной армянской архитектуры

При применении фрактальных принципов в архитектуре важную роль играют практические методы расчета фрактальной размерности рассматриваемых конструкций. Одним из самых востребованных является метод подсчёта клеток (ячеек), имеющих непустое пересечение с исследуемым изображением (the box-counting dimension method). По-видимому, В. Лоренц [13] и К. Бовилл [14] были первыми кто наиболее полно изучали и использовали данный метод.

В общих чертах алгоритм применения этого метода заключается в следующем. На исследуемое изображение накладывается квадратная (кубическая) решётка с длиной ребра ячейки (масштаб) равной Δ, и пусть $N(\Delta)$ — число всех кубов, имеющих непустое пересечение с рассматриваемым изображением. Далее, рассматривается отношение $-\log N(\Delta)/\log\Delta$, и исследуется его поведение при пошаговом изменении масштаба Δ. Масштаб на каждом шаге уменьшается в два раза. Этот процесс может продолжаться бесконечно, но в практических применениях он останавливается в зависимости от требования поставленной задачи. Наклон графика величины $\log N(\Delta)$ от $-\log\Delta$ и даёт приближённое значение фрактальной размерности изображения.

Далее будет приведен фрактальный анализ трех объектов современной армянской архитектуры: Ереванский каскад, собор Святого Григория Просветителя и церковь Святой Троицы. Полученные результаты показывают, что рассматриваемые объекты имеют высокую архитектурную привлекательность.

Ереванский каскад. Ереванский каскад представляет собой архитектурно-монументальный комплекс в виде многоуровневой лестничной структуры с террасами, фонтанами, скульптурами и выставочными залами. Его строительство началось в 1980 г., однако в конце 1980-х было приостановлено в связи со Спитакским землетрясением, распадом СССР и Первой карабахской войной. Архитектура сочетает элементы советского модернизма с традиционными мотивами армянского каменного зодчества.

Результаты вычислений фрактальной размерности каскада приведены в Таблице 1. Из полученных данных видно, что Ереванский каскад имеет среднюю фрактальную размерность 1.455. Расчеты также показывают, что среднеквадратическое отклонение этих данных от среднего 0.058. На Рисунке 1 а) приводится график зависимости $\log N(\Delta)$ от $-\log\Delta$, представляющий собой линейную регрессию, построенную по полученным значениям фрактальной размерности.

Правительственное здание №2 на Площади Республики. Площадь Республики — центральная площадь города Ереван Правительственное здание №2 на этой площади было построено к 1955 году по проекту Самвела Сафаряна,

Расчет фрактальной размерности между:		фрактальная размерность			
большой размер сетки	маленький размер сетки	Каскад	Прави-тельствен-ное здание	собор Св. Григория Просветителя	церковь Св. Троицы
128	64	1.51	1.56	1.66	1.63
64	32	1.49	1.51	1.60	1.63
32	16	1.44	1.52	1.52	1.59
16	8	1.38	1.49	1.46	1.52
средняя фрактальная размерность		1.455	1.52	1.56	1.593

Таблица 1. Результаты вычислений фрактальной размерности

Рафаеля Исраеляна и Вараздата Аревшатяна. С 1996 по 2016 год здание принадлежало Министерству иностранных дел РА.

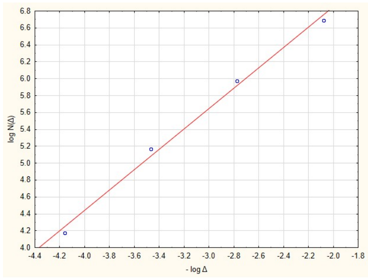
Результаты вычислений фрактальной размерности фасада Правительственного здания сведены в Таблицу 1. Из полученных данных видно, что Правительственное здание №2 имеет среднюю фрактальную размерность 1.52. Расчеты также показывают, что среднеквадратическое отклонение этих данных от среднего 0.029. На Рисунке 1 б) приводится график зависимости $\log N(\Delta)$ от $-\log\Delta$.

Собор Святого Григория Просветителя. Собор Святого Григория Просветителя является самым большим собором, построенным в Ереване. Он построен в память 1700-летия принятия Арменией христианства как государственной религии. Строительство собора началось в 1997 г. и длилось около четырех лет. Архитектором храма является Степан Кюркчян.

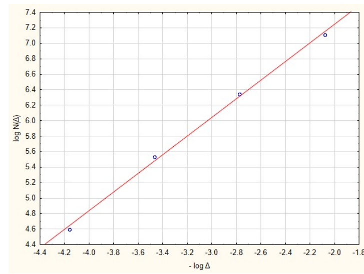
Результаты вычислений фрактальной размерности фасада собора приведены в Таблице 1. Из полученных данных видно, что собор Св. Григория Просветителя имеет среднюю фрактальную размерность 1.56. Расчеты также показывают, что среднеквадратическое отклонение этих данных от среднего 0.088. На Рисунке 1 в) приводится график зависимости $\log N(\Delta)$ от $-\log\Delta$ для фасада собора.

Церковь Святой Троицы. Церковь Св. Троицы построена в 2003 г. в Ереване в районе Малатия-Себастия. Автор проекта — заслуженный архитектор Багдасар Арзуманян. Церковь создана по образцу храма Звартноц.

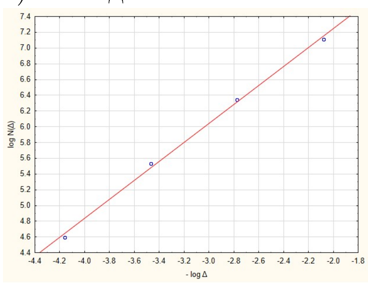
Результаты вычислений фрактальной размерности восточного фасада церкви Св. Троицы сведены в Таблицу 1. Из полученных данных видно, что церковь



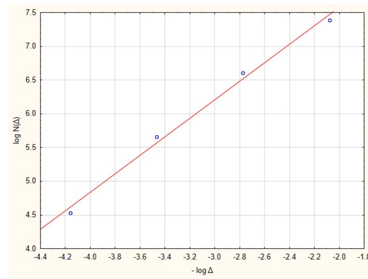
а) Каскад



б) Правительственное здание



в) Собор Св. Гр. Просветителя



г) Церковь Св. Троицы

Рис. 1. График зависимости $\log N(\Delta)$ от $-\log \Delta$.

Св. Троицы имеет среднюю фрактальную размерность 1.593. Расчеты также показывают, что среднеквадратическое отклонение этих данных от среднего 0.052. На Рисунке 1 г) приводится график зависимости $\log N(\Delta)$ от $-\log \Delta$.

5. Заключение

Фрактальный анализ рассмотренных объектов современной армянской архитектуры показал высокую согласованность субъективных и объективных оценок их эстетической привлекательности.

Список литературы

[1] B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco (1982).

[2] C. M. Hagerhall, T. Purcell, R. Taylor, "Fractal dimension of landscape silhouette outlines as a predictor of landscape preference", Journal of Environmental Psychology, **24** (2), 247 – 255 (2004). https://doi.org/10.1016/j.jenvp.2003.12.004

[3] Ф. И. Маврикиди, "Фрактальная математика и природа перемен", Дельфис, **54** (2) (2008).

[4] С. Д. Пьянкова, "Фрактально-аналитические исследования в психологии: особенности восприятия самоподобных объектов", Психологические исследования, **9** (46), 16 стр. (2016). https://doi.org/10.54359/ps.v9i46.484

[5] С. Д. Пьянкова, "Субъективные оценки визуальной сложности и эстетической привлекательности фрактальных изображений: индивидуальные различия и генетические влияния", Психологические исследования, **12** (63), 16 стр. (2019). https://doi.org/10.54359/ps.v12i63.238

[6] N. A. Salingaros, “Fractal Art and Architecture Reduce Physiological Stress”, Computers and Graphics, **27** (5), 813 – 820 (2003).
[7] J. C. Sprott, Strange Attractors: Creating Patterns in Chaos, New York, M&T Books (1993).
[8] R. P. Taylor, Reduction of Physiological Stress Using Fractal Art and Architecture, Leonardo, **39** (3) (2006).
[9] A. A. Nahapetyan, “Fractal geometry and quantitative evaluation of the aesthetic appeal of ancient Armenian architecture monuments”, Mathematical Problems of Computer Science, **63**, 42 – 53 (2025). https://doi.org/10.51408/1963-0130
[10] R. M. Crownover, Introduction to Fractals and Chaos, Jones and Bartlett Publishers (1995).
[11] J. Feder, Fractals, Publisher New York: Plenum Press (1988).
[12] N. A. Salingaros, Architecture, Patterns, and Mathematics, Nexus Network Journal, **1** (1), 75 – 86 (1999). https://doi.org/10.1007/s00004-998-0006-0
[13] W. E. Lorenz, Fractals and Fractal Architecture, Department of computer sided planning and architecture: site Vienna University of Technology Vienn (2003). www.fractalatinitest.com
[14] C. Bovill, Fractal Geometry in Architecture and Design, Birkhäuser, 73 – 92 (1996).

Поступила 05 августа 2025

После доработки 05 октября 2025

Принята к публикации 16 октября 2025