Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 6, 2025, стр. 15 – 27.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕПСТРА И КЕПСТРА МЕТОДОМ РЯДОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ ДЛЯ ЦЕЛЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Г. В. МИКАЕЛЯН, В. Г. МИКАЕЛЯН

Ереванский государственный университет
ООО Крисп
E-mails: *gagik.mikaelyan@ysu.am*; *mik.vazgen@gmail.com*

Аннотация. Вводятся обобщения понятий сепстра и кепстра в теории обработки сигналов. Предлагаются универсальные методы нахождения сепстра и кепстра, получены формулы их вычисления по предыдущим значениям.

MSC2020 number: 42A38; 30D30; 92C55.

Ключевые слова: обработка сигналов; сепстр; кепстр; ряды и преобразования Фурье.

1. Введение

В теории обработки сигналов часто используют понятия «сепстр» и «кепстр». Они применяются при обработке речевых сигналов, сейсмических сигналов, медикобиологических сигналов, старых звукозаписей, гидроакустических сигналов.

Слово «сепстр» (cepstrum), является анаграммой слова «спектр» (spectrum), впервые ввели Богерт, Хили и Тьюки [1] в 1963 г.. Шафер[2] в 1969 г. рассматривал «комплексный сепстр». Похожее слово «кепстр» (kepstrum) ввели Силвиа и Робинсон [3] в 1978 г. С другой стороны термин «кепстр» связывают с именем Колмогорова, которым был предложен специальный степенной ряд для обработки регулярных стационарных случайных процессов [4], первые буквы слова «kepstrum» могут быть расшифрованы как «Kolmogorov-equation power- series time response», хотя термин «кепстр» в работах Колмогорова не упоминается (см. [5]).

Системой называется преобразование, которое переводит входящий сигнал $x(n)$ в выходящий сигнал $y(n)$. Система называется инвариантной по времени n, если сигналу $x(n-k)$ соответствует сигнал $y(n-k)$, где k любое положительное или отрицательное целое число. Линейная, инвариантная по времени система

(LTI) называется BIBO (bounded input bounded output, ограниченный вход- ограниченный выход) стабильным, если из ограниченности последовательности $x(n)$ следует ограниченность последовательности $y(n)$ ([6], [7]).

z-преобразование дискретного сигнала $x(n)$ называется степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

где z – комплексное переменное.

LTI система является BIBO стабильной тогда и только тогда, когда область сходимости z-преобразования $f(z)$ содержит единичную окружность([7]).

Допустим, что $\log f(z)$ имеет сходящийся степенной ряд вида

$$\log f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(r, f) z^{-n}, \quad z=r e^{i \theta}, \quad r_1<|z|<r_2,$$

где

$$d_n(r, f)=\frac{1}{2 \pi} \int_0^{2 \pi} \log f\left(r e^{i \theta}\right) e^{-i n \theta} d \theta$$

Определение 1.1. *Последовательность* $d_n(r, f)$ $(r_1<r<r_2)$ *назовем обобщенным комплексным кепстром.*

Если область сходимости $r_1<|z|<r_2$ содержит единичную окружность, т.е. $r_1<1<r_2$, то последовательность $d_n(1, f)$ называется комплексным кепстром.

Обычно в применениях $\frac{1}{2 \pi} \int_0^{2 \pi} \arg f\left(r e^{i \theta}\right) e^{-i n \theta} d \theta$ игнорируется и рассматривается только последовательность

$$c_n(r, f)=\frac{1}{2 \pi} \int_0^{2 \pi} \log \left|f\left(r e^{i \theta}\right)\right| e^{-i n \theta} d \theta$$

Определение 1.2. *Последовательность* $c_n(r, f)(r_1<r<r_2)$ *назовем обобщенным реальным кепстром.*

Если область сходимости $r_1<|z|<r_2$ содержит единичную окружность, т.е. $r_1<1<r_2$, то последовательность $c_n(1, f)$ называется реальным кепстром. В случае, когда z-преобразование $f(z)$ дискретного сигнала $x(n)$ является рациональной функцией, Опенгеймом и Шафером [6], получены формулы для кепстра $f(z)$ и оценки для кепстральных коэффициентов. Комплексный сепстр определяется формулой $C_c=F^{-1}\{\log F\{f\}\}$ или формулой $C_c=F\{\log F\{f\}\}$, где F преобразование Фурье. Реальный сепстр определяется формулой $C_r=F^{-1}\{\log |F\{f\}|\}$ или формулой $C_r=F\{\log |F\{f\}|\}$.

Определение 1.3. *Если $\boldsymbol{f}$ спектр входного сигнала, то при $v<0$ интеграл*

$$H(x,v,f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}\log f(u+iv)du$$

назовем обобщенным комплексным сепстром. При $v=0$ интеграл называется комплексным сепстром.

Определение 1.4. *Если $\boldsymbol{f}$ спектр входного сигнала, то при $v<0$ интеграл*

$$H(x,v,f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}\log|f(u+iv)|du$$

назовем обобщенным реальным сепстром. При $v=0$ интеграл называется реальным сепстром.

В настоящей статье предлагаются универсальные методы нахождения обобщенного кепстра и сепстра (в частности кепстра и сепстра), формулы их вычисления по предыдущим значениям.

2. Кепстр

Так называемый «Метод рядов фурье для целых и мероморфных функций», основанный на использовании ряда Фурье для $\ln\left|f\left(re^{i\vartheta}\right)\right|$ как функции от ϑ систематически применяется, начиная с 60-х годов прошлого столетия Рубелем, Тейлором [8], а затем многими другими математиками. Метод основан на следующей лемме, полученной Неванлинной в 1923 году.

Лемма 2.1. *Пусть f мероморфная в круге $\{z:|z|<R\}$ функция. $f(0)=1,\{a_v\},\{b_\mu\}$ -последовательности нулей и полюсов функции f и*

$$\log f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k$$

разложение в некоторой окрестности точки $z=0$. Тогда для коэффициентов Фурье(обобщенного реального кепстра)
$c_k(r)\equiv c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(re^{i\vartheta}\right)\right|e^{-ik\vartheta}d\vartheta$
справедливы формулы

$$c_0(r)=\sum_{|a_v|\le r}\log\frac{r}{|a_v|}-\sum_{|b_\mu|\le r}\log\frac{r}{|b_\mu|},$$

(2.1)

$$c_k(r)=\frac{1}{2}\alpha_k r^k+\frac{1}{2k}\sum_{|a_v|\le r}\left(\left(\frac{r}{a_v}\right)^k-\left(\frac{\overline{a_v}}{r}\right)^k\right)-\frac{1}{2k}\sum_{|b_\mu|\le r}\left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k-\left(\frac{\overline{b_\mu}}{r}\right)^k\right)$$

при $k\ge 1$ и $c_k=\overline{c_{-k}}$ при $k\le -1$.

Пусть $\{a_v\}$-последовательность комплексных чисел, $0 < |a_v| \le |a_{v+1}| \to \infty$. Положим $\varphi_v = \arg a_v, 0 \le \varphi_v < 2\pi$. При целых k определим характеристики

$$n_k\left(r, \{a_v\}\right) = \sum_{|a_v| \le r} e^{-ik\varphi_\nu}, \quad N_k\left(r, \{a_v\}\right) = \int_0^r \frac{n_k\left(t, \{a_v\}\right)}{t} dt.$$

Одно из доказательств леммы основано на вычислении коэффициентов Фурье $d_k(r,f)$ функции $\log f\left(re^{i\theta}\right)$ (обобщенного комплексного кепстра)

$$d_k(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f\left(re^{i\theta}\right) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Доказывается, что при $k \ge 1$

(2.2)

$$d_k(r,f) = -\frac{1}{k}\left(n_0\left(r, \{a_\nu\}\right) - n_0\left(r, \{b_\mu\}\right)\right) + \alpha_k r^k + \frac{1}{k} \sum_{|a_\nu| < r} \left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k - \frac{1}{k} \sum_{|b_\mu| < r} \left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k$$

и при $k \le -1$

$$(2.3)\quad d_k(r,f) = -\frac{1}{k}\left(n_0\left(r, \{a_v\}\right) - n_0\left(r, \{b_\mu\}\right)\right) + \frac{1}{k} \sum_{|a_v| < r} \left(\frac{r}{a_v}\right)^k - \frac{1}{k} \sum_{|b_\mu| < r} \left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k$$

(см.[8], [9])). Из равенства

$$c_k(r,f) = \frac{d_k(r,f) + \overline{d_{-k}(r,f)}}{2}$$

получаются формулы (2.1).

В [9] установлены в некотором смысле обратные формулы для коэффициентов Фурье $c_k(r,f)$. Справедлива следующая лемма:

Лемма 2.2. *Пусть f мероморфная в круге $\{z : |z| < R\}$ функция. $f(0) = 1, \{a_v\}, \{b_\mu\}$ -последовательности нулей и полюсов функции f. Тогда при $0 < r < R$ справедливо равенство*

$$c_k(r) = N_k(r) + k^2 \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{c_k(\tau)}{\tau} d\tau,$$

где $N_k(r) = N_k\left(r, \{a_v\}\right) - N_k\left(r, \{b_v\}\right)$.

При $\delta > 0$ справедливы оценки

$$|c_k(r)| \le \frac{|c_k((1+\delta)r)|}{(1+\delta)^{|k|}} + \frac{1}{|k|+1}(n((1+\delta)r, f) + n((1+\delta)r, 1/f))$$

$$|c_k(r)| \le \frac{1}{(1+\delta)^{|k|}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\ln|f\left((1+\delta)re^{i\vartheta}\right)||d\vartheta +$$
$$+ \frac{1}{|k|+1}(n((1+\delta)r, f) + n((1+\delta)r, 1/f))$$

где $n(r,f) \equiv n_0\left(r, \{b_\mu\}\right)$ и $n(r, 1/f) \equiv n_0\left(r, \{a_\nu\}\right)$.

Доказательство этих неравенств аналогичны случаю $\delta = 1$ в [9].

Последние оценки являются обобщениями оценок, используемых в теории цифровой обработки сигналов при $r = 1$ ([6]).

Следующая лемма также доказана в [9].

Лемма 2.3. *Пусть f мероморфная функция порядка $\rho, f(0) = 1, \{a_v\}, \{b_\mu\}$ последовательности нулей и полюсов функции f. Тогда при $k > \rho$ коэффициенты Фурье имеют вид*

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2k}\left(\sum_{|b_\mu|>r}\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \sum_{|a_\nu|>r}\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k + \sum_{|b_\mu|\le r}\left(\frac{\overline{b_\mu}}{r}\right) - \sum_{a_\nu\le r}\left(\frac{\overline{a_\nu}}{r}\right)\right) \tag{2.4}$$

Сделаем дополнение к этой лемме. По теореме Адамара для мероморфных функций, если f мероморфная функция порядка $\rho(\rho < \infty), [\rho] = \mathrm{q}, f(0) = 1$, с нулями и полюсами $\{a_\nu\}, \{b_\mu\}$, то

$$f(z) = \exp\left\{P_{\mathrm{q}}(z)\frac{\prod_{v=1}^{\infty} E\left(z/a_v, q\right)}{\prod_{v=1}^{\infty} E\left(z/b_\mu, \mathrm{q}\right)}\right\},$$

где $P_{\mathrm{q}}(z) = s_{\mathrm{q}}z^q + s_{\mathrm{q}-1}z^{q-1} + \dots + s_1 z$ многочлен, степень которой не превосходит q и

$$E(u,q) = (1-u)\exp\left\{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^q}{q}\right\}$$

первичный множитель Вейерштрасса.
Отсюда получаем, что в окрестности $z = 0$ имеет место разложение

$$\log f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k,$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} s_k, \quad k = 1, \dots, q \\ -\frac{1}{k}\sum_v a_v^{-k} + \frac{1}{k}\sum_v b_v^{-k}, \quad k = q+1, q+2, \dots \end{cases}$$

Следовательно, при $k = 1, \dots, q$ коэффициенты Фурье можно вычислить по формуле

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2}s_k r^k + \frac{1}{2k}\sum_{|a_v|\le r}\left(\left(\frac{r}{a_v}\right)^k - \left(\frac{\overline{a_v}}{r}\right)^k\right) - \frac{1}{2k}\sum_{|b_\mu|\le r}\left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \left(\frac{\overline{b_\mu}}{r}\right)^k\right).$$

В качестве примера рассмотрим гамма функцию Эйлера, которую можно представить в виде

$$\Gamma(z+1) = \frac{e^{-\gamma z}}{\prod_{v=1}^{\infty} E(-z/v, 1)}$$

где $\gamma-$ постоянная Эйлера. Для этой функции

$$\alpha_k = \begin{cases} -\gamma & \text{при } k=1 \\ \frac{(-1)^k}{k}\sum\limits_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v^k} & \text{при } k>1 \end{cases}$$

По лемме 2.1 будем иметь

$$c_0(r,\Gamma) = -\sum_{v\le r}\log\frac{r}{v},$$

$$c_1(r,\Gamma) = -\frac{1}{2}\gamma r + \frac{1}{2}\sum_{v\le r}\left(\frac{r}{v}-\frac{v}{r}\right),$$

$$c_k(r,\Gamma) = \frac{(-1)^k}{2k}\left(\sum_{v>r}\left(\frac{r}{v}\right)^k - \sum_{v\le r}\left(\frac{v}{r}\right)^k\right) \quad \text{при } k>1.$$

Полагая в последних формулах $r=1$, получим следующие формулы для кепстра

$$c_0(1,\Gamma)=0, \quad c_1(1,\Gamma) = -\frac{1}{2}\gamma$$

$$c_k(1,\Gamma) = \frac{(-1)^k}{2k}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v^k} = \frac{(-1)^k}{2k}\zeta(k) \quad \text{при } k>1,$$

где ζ - дзета функция Римана.

В теории цифровой обработки сигналов очень часто встречаются последовательности $x(n)$, z-преобразование которых является рациональной функцией вида (например, если $x(n)$-сумма комплексных экспоненциальных последовательностей)

$$H(z) = Bz^p\frac{\prod_{v=1}^{N}(z-a_v)}{\prod_{\mu=1}^{M}(z-b_\mu)}$$

где B-положительное постоянное, p-целое число, a_ν и b_μ-комплексные числа.

Вычислим коэффициенты Фурье функций $\log f, \log|f|$ и как следствие получим формулы для кепстральных коэффициентов.

Рассмотрим функцию

$$H_1(z) = \frac{H(z)}{Bz^p}\frac{\prod_{\mu=1}^{M}(-b_\mu)}{\prod_{v=1}^{N}(-a_v)}.$$

Имеем

$$H_1(z) = \frac{\prod_{v=1}^{N}(1-z/a_v)}{\prod_{\mu=1}^{M}(1-z/b_\mu)}$$

и в окрестности нуля

$$\ln H_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{\mu=1}^{M}b_\mu^{-k} - \sum_{v=1}^{N}a_v^{-k}\right)z^k.$$

Поскольку

$$d_k(r,H) = d_k\left(r,H_1\right) - \frac{|p|}{k}$$

следовательно, по формулам (2.2), (2.3) будем иметь: при $k \geq 1$

$$d_k(r,H) = -\frac{|p|}{k} - \frac{1}{k}\left(n_0\left(r,\{a_v\}\right) - n_0\left(r,\{b_\mu\}\right)\right) + \frac{r^k}{k}\left(\sum_{\mu=1}^{M} b_\mu^{-k} - \sum_{v=1}^{N} a_v^{-k}\right)$$
$$+\frac{1}{k}\sum_{|a_v|<r}\left(\frac{r}{a_v}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{|b_\mu|<r}\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k$$

при $k \leq -1$

$$d_k(r,H) = -\frac{|p|}{k} - \frac{1}{k}\left(n_0\left(r,\{a_v\}\right) - n_0\left(r,\{b_\mu\}\right)\right) + \frac{1}{k}\sum_{|a_v|<r}\left(\frac{r}{a_v}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{|b_\mu|<r}\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k.$$

В частном случае $r = 1$ из последних формул получаются формулы Опенгейма и Шафера [6].

Так как $c_k(r,H) = c_k\left(r,H_1\right)$ при $k \neq 0$, то применяя формулы (2.1), получим

$$c_0(r,H) = c_0\left(r,H_1\right) + \ln B + \sum_{v=1}^{N}\ln|a_v| - \sum_{\mu=1}^{M}\ln|b_\mu| + p\ln r$$

$$c_0(r,H) = \sum_{|a_v|\leqslant r}\log\frac{r}{|a_v|} - \sum_{|b_\mu|\leqslant r}\log\frac{r}{|b_\mu|} + \ln B + \sum_{k=1}^{N}\ln|a_k| - \sum_{k=1}^{M}\ln|b_k| + p\log r$$

при $k \neq 0$

$$c_k(r,H) = \frac{1}{2k}r^k\left(\sum_{\mu=1}^{M} b_\mu^{-k} - \sum_{v=1}^{N} a_v^{-k}\right)$$
$$+\frac{1}{2k}\sum_{|a_v|\leq r}\left(\left(\frac{r}{a_v}\right)^k - \left(\frac{\overline{a_v}}{r}\right)^k\right) - \frac{1}{2k}\sum_{|b_\mu|\leq r}\left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \left(\frac{\overline{b_\mu}}{r}\right)^k\right).$$

При $k \neq 0$ для вычисления коэффициентов $c_k(r,H)$ можно было применить лемму 2.3 и представить их в виде формулы (2.4).

Если все нули и полюсы функции H находятся в единичном круге для кепстральных коэффициентов, получаем формулы

$$c_k(1,H) = \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{M}\bar{b}_i^k - \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{N}\bar{a}_i^k, \quad k \neq 0$$
$$c_0(1,H) = \ln B$$

z-преобразованием дискретного сигнала $x(n) = a^n\cos\left(\omega_0 n\right)$ является функция

$$H(z) = \frac{z^2 - az\cos\omega_0}{z^2 + a^2 - 2az\cos\omega_0}, \quad |z| > |a|.$$

Замечая, что

$$H(z) = \frac{z\,(z - a\cos\omega_0)}{(z - ae^{i\omega_0})\,(z - ae^{-i\omega_0})},$$

из предыдущих формул получаем при $|a| < 1$

$$c_k(1, H) = \frac{1}{k}\bar{a}^k \cos k\omega_0 - \frac{1}{2k}\bar{a}^k \cos^k \omega_0, \quad k \neq 0,$$

$$c_0(1, H) = 0.$$

3. Сепстр

Справедливы следующие теоремы (см.[10], [11]).

Теорема 3.1. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в нижней полуплоскости $G = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty) = 1$. Пусть*

$$\frac{e^{xv_0}}{i\sqrt{2\pi}x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{f'\,(u + iv_0)}{f\,(u + iv_0)} du = h(x), \quad v_0 < \min_k v_k, v_0 < \min_k q_k, x \neq 0$$

Тогда $h(x)$ не зависит от v_0, равен нулю при $x > 0$ и при любом $v < 0$ справедливы следующие формулы для обобщенного реального и комплексного сепстра

$$\Omega(x, v, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log|f(u + iv)| du = \frac{1}{2}\left(e^{-xv}h(x) + e^{xv}\overline{h(-x)}\right) -$$

$$- \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{v_k < v} e^{-ixu_k} \operatorname{sh}\left(x\,(v_k - v)\right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{q_k < v} e^{-ixp_k} \operatorname{sh}\left(x\,(q_k - v)\right) \tag{3.1}$$

$$H(x, v, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log f(u + iv) du =$$

$$= e^{-xv}\left\{-\frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{v_k < v} e^{-ixw_k} + \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{q_k < v} e^{-ixr_k} + h(x),\right\},$$

где $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} = \{u_k + iv_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность нулей а $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} = \{p_k + iq_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность полюсов функции f.

Теорема 3.2. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в области G, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty) = 1$. Тогда при $v \to 0$ справедлива формула*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log|f(u + iv)| du = \sum_{v_k < v} (v - v_k) + \sum_{q_k < v} (v - q_k) + O(1), v < 0$$

где v_k и q_k мнимые части соответственно нулей и полюсов функции f (интеграл следует понимать в смысле главного значения).

Пусть последовательности нулей и полюсов функции f удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_k| < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|q_k| < +\infty. \tag{3.2}$$

Следствие 3.1. *Если последовательности нулей и полюсов функции f удовлетворяют условиям (3.2), то*

$$\lim_{v\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}\log|f(u+iv)|du = \frac{1}{2}(h(x)+\overline{h(-x)})-$$
$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{v_k<0}e^{-ixu_k}\,\mathrm{sh}\,(xv_k)+\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{q_k<0}e^{-ixp_k}\,\mathrm{sh}\,(xq_k) \tag{3.3}$$

Доказательство. Обозначим через $n(v)$ количество нулей функции f в полуплоскости $\{w : \mathrm{Im}\, w < v\}$.

Из условий (3.2) следует, что $\lim\limits_{v\to 0} vn(v) = 0$. Переходя к пределу при $v \to 0$ в равенстве

$$\sum_{v_k<v}e^{-ixu_k}\,\mathrm{sh}\,(x\,(v_k-v)) = \mathrm{ch}(xv)\sum_{v_k<v}e^{-ixu_k}\,\mathrm{sh}\,(xv_k)-\mathrm{sh}(xv)\sum_{v_k<v}e^{-ixu_k}\,\mathrm{ch}\,(xv_k)$$

и в аналогичном равенстве для полюсов, получаем формулу (3.3).

Из условия $f(\infty) = 1$ следует, что в окрестности бесконечно удаленной точки справедливо разложение

$$f(w) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{w^k}$$

Отсюда следует,что

$$\log f(w) = \frac{\varphi(w)}{w},\ \text{где } \varphi(w) = O(1) \text{ при } w\to\infty.$$

Следствие 3.2. *Если функция f мероморфна в полуплоскости $G = \{w : \mathrm{Im}\, w \leq 0\}$ и в окрестности бесконечно удаленной точки $f(w) = 1+\frac{\varphi(w)}{w^k}, k > 1$, то*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}\log|f(u)|du = \frac{1}{2}(h(x)+\overline{h(-x)})-$$
$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{v_k<0}e^{-ixu_k}\,\mathrm{sh}\,(xv_k)+\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{q_k<0}e^{-ixp_k}\,\mathrm{sh}\,(xq_k)\,.$$

Доказательство. Справедлива оценка

$$|f(u+iv)| \leq \frac{c}{|u|^k} \quad \text{при} \quad |u| > \delta(\delta > 0), k > 1,$$

где c - постоянная.

Далее, если u_0 действительный корень функции f порядка $k \geq 1$, то

$$f(w) = (w-u_0)^k \psi(w),$$
$$\log|f(w)| = k \log|w-u_0| + \log|\psi(w)|,$$

где $\Psi(u_0) \neq 0$.

Обозначая через $\gamma(\varepsilon)$ полуокружность $\left\{w : w-u_0 = \varepsilon e^{i\vartheta}, \operatorname{Im} w < 0\right\}$ будем иметь

$$\int_{\gamma(\varepsilon)} e^{-ixw} \log|f(w)| dw \leq O(1)\varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon}$$

Рассмотрим функцию $f(w) = 1 + \frac{A}{w}$, где A - постоянная. Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log\left|1+\frac{A}{u+iv}\right| du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log\frac{(u+A)^2+v^2}{u^2+v^2} du =$$

$$= 2\frac{1-e^{ixA}}{ix}\int_0^{+\infty}\frac{u\sin(ux)}{u^2+v^2}du, x>0$$

то вычисляя последний интеграл при $v<0$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log\left|1+\frac{A}{u+iv}\right| du = 2\pi i\frac{1-e^{ixA}}{x}e^{-|xv|}, x \neq 0.$$

Таким образом, в данном случае реальный сепстр не существует , а обобщенный сепстр существует.

Пусть $\{w_k\}_1^\infty = \{u_k+iv_k\}_1^\infty$-последовательность комплексных чисел, $0<|v_{k+1}| \leq |v_k| \to 0$. Положим

$$n_x(v, \{w_k\}) = \sum_{v_k<v} e^{-ixu_k}, \quad N_x(v, \{w_k\}) = \int_{-\infty}^{v} n_x(t, \{w_k\})\, dt$$

Пусть теперь $\{w_k\}_{k=1}^\infty = \{u_k+iv_k\}_{k=1}^\infty$ последовательность нулей а $\{r_k\}_{k=1}^\infty = \{p_k+iq_k\}_{k=1}^\infty$ последовательность полюсов функции f. Обозначим

$$N_x(v) = N_x(v, \{w_k\}) - N_x(v, \{r_k\}).$$

Справедлива следующая теорема представления преобразования $\Omega(x,v,f)$.

Теорема 3.3. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в нижней полуплоскости $G = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty) = 1$. Тогда справедливо представление*

$$\Omega(x,v,f) = x^2\int_{-\infty}^{v} dt \int_{-\infty}^{t} \Omega(x,\tau)d\tau - \sqrt{2\pi}N_x(v). \tag{3.4}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{v_k<v} e^{-ixu_k} \operatorname{sh}\left(x\left(v_k-v\right)\right)=\int_{-\infty}^{v} \operatorname{sh} x(t-v) d n_x\left(t,\left\{w_k\right\}\right)=$$

$$=-x \int_{-\infty}^{v} \operatorname{ch} x(t-v) n_x\left(t,\left\{w_k\right\}\right) d t=-x \int_{-\infty}^{v} \operatorname{ch} x(t-v) d N_x\left(t,\left\{w_k\right\}\right)=$$

$$=-x N_x\left(v,\left\{w_k\right\}\right)+x^2 \int_{-\infty}^{v} \operatorname{sh} x(t-v) N_x\left(t,\left\{w_k\right\}\right) d t$$

Следовательно, из формулы (3.1) вытекает представление

$\Omega(x,v,f)=\sqrt{2\pi}N_x(v)-x\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{v}N_x(t)\operatorname{sh}x(t-v)dt+\frac{1}{2}\left(e^{-xv}h(x)+e^{xv}\overline{h(-x)}\right)$.

Обозначим

$\Phi_x(v)=x\int_{-\infty}^{v}N_x(t)\operatorname{sh}x(t-v)dt$.

Тогда для производных этой функции справедливы равенства

$\Phi_x'(v)=-x^2\int_{-\infty}^{v}N_x(t)\operatorname{ch}x(t-v)dt$,

$\Phi''{}_x(v)=-x^2N_x(v)+x^3\int_{-\infty}^{v}N_x(t)\operatorname{sh}x(t-v)dt$,

$\Phi''{}_x(v)=-x^2N_x(v)+x^2\Phi_x(v)$.

Таким образом

$$\Phi_x(v)=N_x(v)+\frac{1}{x^2}\Phi''{}_x(v) \tag{3.5}$$

и

$$\Omega(x,v,f)=\sqrt{2\pi}N_x(v)-\sqrt{2\pi}\Phi_x(v)+H_x(v), \tag{3.6}$$

где $H_x(v)=\frac{1}{2}\left(e^{-xv}h(x)+e^{xv}\overline{h(-x)}\right)$.

Из (3.5) и (3.6) имеем

$\Omega(x,v,f)=-\frac{1}{x^2}\sqrt{2\pi}\phi''_x(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{H}_x(\boldsymbol{v})$

или

$$\sqrt{2\pi}\Phi''_x(v)=x^2H_x(v)-x^2\Omega(x,v,f).$$

Отсюда получаем равенство

$$\sqrt{2\pi}\phi'_x(\boldsymbol{v})=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}e^{xv}\overline{h(-x)}-x^2\int_{-\infty}^{v}\Omega(x,t,f)dt$$

Интегрируя еще раз, при $x>0$ будем иметь

$$\sqrt{2\pi}\phi_x(\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}e^{xv}\overline{h(-x)}-x^2\int_{-\infty}^{v}\int_{-\infty}^{t}\Omega(x,t,f)dt. \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) получается представление (3.4).

Рассмотрим теперь следующий важный для применений пример. Пусть $f(w)=\frac{p(w)}{q(w)}$ рациональная функция, где p и q полиномы, $f(\infty)=1$. Имеем $\frac{f'(w)}{f(w)}=\frac{p'(w)}{p(w)}-\frac{q'(w)}{q(w)}$.

Пусть $a_1, \dots, a_n$ нули полинома p порядков $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ а $b_1, \dots, b_m$ нули полинома q порядков $\beta_1, \dots, \beta_m$. Тогда

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \frac{\alpha_1}{w-a_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{w-a_n}$$

$\frac{q'(w)}{q(w)} = \frac{\beta_1}{w-b_1} + \dots + \frac{\beta_m}{w-b_m}$. При $x<0, v_0 < \min \alpha_k$ вычисляя интеграл

$$\frac{e^{xv_0}}{i\sqrt{2\pi}x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{u+iv_0-a_k} du = \frac{e^{xv_0}}{i\sqrt{2\pi}x} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-ix \operatorname{Re} a_k} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{\alpha_k}{u + i\left(v_0 - \operatorname{Ima} a_k\right)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-ixa_k}$$

при $x<0$ получим

$$h(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-ixa_k} - \sum_{k=1}^{m} \beta_k e^{-ixb_k} \right). \tag{3.8}$$

По формуле (3.1) теоремы 3.1 в силу (3.8) при $x<0$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega(x,v,f) = &\frac{\sqrt{2\pi}}{2x} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-ixa_k} - \sum_{k=1}^{m} \beta_k e^{-ixb_k} \right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{v_k<v} e^{-ixu_k} \operatorname{sh}\left(x\left(v_k - v\right)\right) \\ &+ \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{q_k<v} e^{-ixp_k} \operatorname{sh}\left(x\left(q_k - v\right)\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $a_k = u_k + iv_k, b_k = p_k + iq_k$ соответственно нули полиномов p и q, и в последних двух суммах участвуют те из них, которые лежат в нижней полуплоскости.
В силу (3.3) при $x<0$ имеем также

$$\begin{aligned} \lim_{\text{v}\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log|f(u+iv)| du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2x} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-ixa_k} - \sum_{k=1}^{m} \beta_k e^{-ixb_k} \right) \\ -\frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{v_k<0} e^{-ixu_k} \operatorname{sh}\left(xv_k\right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{q_k<0} e^{-ixp_k} \operatorname{sh}\left(xq_k\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

По формулам (3.9) и (3.10) для функции

$$H(z) = \frac{z^2 - az\cos\omega_0}{z^2 + a^2 - 2az\cos\omega_0} \equiv \frac{z\left(z - a\cos\omega_0\right)}{\left(z - ae^{i\omega_0}\right)\left(z - ae^{-i\omega_0}\right)}$$

можно вычислить $\Omega(x,v,H)$ и $\lim_{v\to 0} \Omega(x,v,H)$ при всех ω_0 и a.
В частности, при $0<\omega_0<\pi, a>0$

$$\lim_{v\to 0} \Omega(x,v,H) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2x} \left(1 + e^{-ixa\cos\omega_0}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{x} e^{-ixae^{i\omega_0}}$$

при $\omega_0 = 0$ и $\operatorname{Im}\alpha < 0$

$$\lim_{v\to 0} \Omega(x,v,H) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2x} \left(1 - e^{-ix\bar{a}}\right)$$

при $\omega_0 = 0$ и $\mathrm{Im}\alpha \geq 0$

$$\lim_{v\to 0} \Omega(x, v, H) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2x}\left(1 - e^{-ixa}\right).$$

Замечание. Из условия $f(\infty) = 1$ следует, что в окрестности бесконечно удаленной точки справедливо разложение

$f(w) = 1 + \frac{\varphi(w)}{w^k}, k \geq 1, \varphi(\infty) = \varphi_\infty \neq 0.$

Тогда

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = \frac{\Phi(w)}{w^{k+1}}, \Phi(\infty) = -k\varphi_\infty$$

и при $x < 0$ справедлива оценка

$$|h(x)| \leq \frac{e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi|x|}} \max_{-\infty<u<+\infty} |\Phi(u + iv_0)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{|u + iv_0|^{k+1}} =$$

$$= \frac{e^{xv_0}}{\sqrt{2\pi}|x|\,|v_0|^k} \max_{-\infty<u<+\infty} |\Phi(u + iv_0)| \frac{2^{k-1}\Gamma^2(k/2)}{(k-1)!}$$

где Г-гамма функция Эйлера.

Список литературы

[1] B. P. Bogert, M. J. R. Healy, and J. W. Tukey, The Quefrency Alanysis of Time series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-Autocovariance, Cross-Cepstrum, and Saphe Cracking, in Proc. of the Symp. on Time Series Analysis, by M. Rosenblatt (Ed.),. Wiley, NY, 209 – 243 (1963).

[2] R. W. Schafer, “Echo removal by discrete generalized linear filtering”, Res. Lab. Electron. MIT, Tech. Rep., 466 (1969).

[3] M.T. Silvia, E.A. Robinson, “Use of the kepstrum in signal analysis”, Geoexploration **16**, 55 – 73 (1978).

[4] А. Н. Колмогоров, “Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве”, Бюллетень МГУ, Математика, **2**, no. 6, 3 – 40 (1941).

[5] R. B. Randall, “A history of cepstrum analysis and its application to mechanical problems”, Mechanical Systems and Signal Processing, **97**, 3 – 19 (2017).

[6] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, Digital Signal Processing, Prentice-Hall (2010).

[7] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, Digital Signal Processing, Prentice-Hall (2007).

[8] L. A. Rubel, B. A, Taylor, “A Fourier series method for meromorphic and entire functions”, Bulletin de la Société Mathématique de France **96**, 53 – 96 (1968).

[9] А. А. Кондратюк, Ряды Фурье и Мероморфные Функции, Львов, Изд. Вища школа (1988).

[10] Г. В. Микаелян, “Преобразование Фурье, ассоциированное с функциями, мероморфными в полуплоскости”, Изв АН Арм ССР, Сер. Матем., **XIX**, no. 5, 361 – 376 (1984).

[11] Г. В. Микаелян, “О росте функций, мероморфных в полуплоскости”, Известия вузов, **4**, 79 – 82 (1988).

Поступила 17 июня 2025

После доработки 17 июня 2025

Принята к публикации 25 августа 2025