Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 6, 2025, стр. 3 – 14.

О ФРЕДГОЛЬМОВЫХ СВОЙСТВАХ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ОТРАЖЕНИЕМ

А. Г. КАМАЛЯН, Г. А. КАМАЛЯН

Институт Математики НАН Армении
Армянский государственный экономический университет
E-mails: *kamalyan_armen@yahoo.com; qamalyan.hayk@asue.am;*

Аннотация. В работе рассматривается матричный сингулярный интегральный оператор с отражением определённый на действительной оси и действующий в лебеговых пространствах с весом Макенхаупта. В случае кусочно-непрерывных коэффициентов получен критерий фредгольмовости.

MSC2020 number: 47B35; 45E05; 47B38.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор; оператор отражения; вес Макенхаупта.

1. Введение

Пусть $L_p(\Gamma, w)$, где Γ либо $\mathbb{R}$ либо $\mathbb{R}_\pm := \{\pm x > 0\,;\, x \in \mathbb{R}\}$ лебегово пространство с весом w с нормой

$$\|f\|_{p,w} := \left(\int\limits_{\Gamma} |f(t)|^p w(t)^p |dt| \right)^{1/p}.$$

Предполагается, что $w \in \mathcal{A}_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, т.е. w удовлетворяет условию Макенхаупта

$$\sigma(p, w) := \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int\limits_I w(x)^p dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|I|} \int\limits_I w(x)^{-q} dx \right)^{1/q} < \infty,$$

где $q = {}^{p}/_{(p-1)}$, I пробегает множество всех ограниченных интервалов Γ, а $|I|$ – длина интервала I.

Хорошо известно (см. [1]), что сингулярный интегральный оператор

$$(Sy)(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma \setminus (t-\varepsilon, t+\varepsilon)} \frac{y(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \qquad t \in \mathbb{R},$$

является линейным ограниченным оператором отображающим $L_p(\mathbb{R}, w)$ на себя. Оператор S является инволюцией и определяет проекторы $P^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$ (I –

тождественный оператор) и соответствующее разложение

$$L_p(\mathbb{R},w)=L_p^+(\mathbb{R},w)\oplus L_p^-(\mathbb{R},w),\quad \text{где}\ \ L_p^\pm(\mathbb{R},w):=P^\pm L_p(\mathbb{R},w).$$

Условимся о следующих обозначениях. Если X линейное пространство, то через X^n ($X^{n\times n}$) будем обозначать линейное пространство всех $n\times 1$ векторов ($n\times n$ матриц) с компонентами из X. Если X и Y банаховы пространства, а $A\colon X\to Y$ линейный оператор, то оператор $\operatorname{diag}(A,\dots,A):=X^n\to Y^n$ мы также будем обозначать через A, т.е. действие A на X^n понимается покомпонентно. Через $m(a)$ мы обозначаем оператор умножения на матриц-функцию $a\in(L_\infty(\mathbb{R}))^{n\times n}$, т.е. $m(a)\colon(L_p(\mathbb{R},w))^n\to(L_p(\mathbb{R},w))^n$ действует по формуле $(m(a)y)(x)=a(x)y(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Множество весов w из $\mathcal{A}_p(\mathbb{R})$ обладающих свойством симметрии $w(-x)=w(x)$, $x\in\mathbb{R}$, будем обозначать через $\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$. Поскольку весовая функция $w\in\mathcal{A}_p(\mathbb{R}_+)$ по симметрии может быть продолжена на $\mathbb{R}$, и это продолжение принадлежит $\mathcal{A}_p(\mathbb{R})$, то между $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$ существует взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем вес из $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}_+)$ и его симметрическое продолжение на $\mathbb{R}$ мы будем обозначать одной и той же буквой. Заметим, что (см., например, [2]) множество степенных весов, принадлежащих $\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$, имеет вид

$$w(\xi)=\gamma|\xi+i|^{\mu_\infty}|\xi|^{\mu_0}\prod_{j=1}^{m}|\xi^2-\beta^2|^{\mu_j},\quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где $\gamma,\beta_1,\dots,\beta_m>0$, $\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_m\in\left(-{}^1/_p,{}^1/_q\right)$ и $\mu:=\mu_\infty+\mu_0+2(\mu_1+\dots+\mu_m)\in\left(-{}^1/_p,{}^1/_q\right)$ Очевидно, что оператор отражения $J\colon L_p(\mathbb{R},w)\to L_p(\mathbb{R},w)$ действующий по формуле $(Jy)(x)=y(-x)$ в случае $w\in\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$ является ограниченным. Через $PC(\dot{\mathbb{R}})$ будем обозначать алгебру всех ограниченных кусочно-непрерывных функций на $\dot{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Другими словами $f\in PC(\dot{\mathbb{R}})$ тогда и только тогда, когда $f\in L_\infty(\mathbb{R})$ и в каждой точке $x_0\in\dot{\mathbb{R}}$ существуют односторонние пределы

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x),\qquad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)$$

В частности $f(\infty\pm0):=f(\mp\infty)=\lim\limits_{x\to\mp\infty}f(x)$. Условимся также вместо $f(0\pm0)$ пользоваться обозначением $f(\pm0)$.

Пусть X и Y банаховы пространства, $A\colon X\to Y$ линейный ограниченный оператор. Если образ $\operatorname{im}A$ замкнут в Y, а ядро $\ker A$ и коядро ${}^Y/_{\operatorname{im}A}$ конечномерны, то говорят что оператор A является оператором Фредгольма.

Сингулярный интегральный оператор

$$\mathcal{V}(a^\pm)=(m(a^+)P^++m(a^-)P^-)\colon(L_p(\mathbb{R},w))^n\to(L_p(\mathbb{R},w))^n$$

является ограниченным как только $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$, $a^\pm \in (L_\infty(\mathbb{R}))^{n\times n}$. Соответственно сингулярный интегральный оператор с отражением $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm) = \mathcal{V}(a^\pm) + \mathcal{V}(b^\pm)J : (L_p(\mathbb{R}, w))^n \to (L_p(\mathbb{R}, w))^n$ является ограниченным как только $w \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$, $a^\pm, b^\pm \in (L_\infty(\mathbb{R}))^{n\times n}$. Теория Фредгольма сингулярных интегральных операторов $\mathcal{V}(a^\pm)$ в случае кусочно непрерывных коэффициентов в пространствах Лебега со степенным весом достаточно полно изложена в работах [3]-[5]. Операторы $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ являются частным классом сингулярных интегральных операторов со сдвигом, теория которых изложена в работах [6]-[10].

Теория Фредгольма оператора $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ тесно связанна с теорией Фредгольма оператора без сдвига $\mathcal{V}(c_\pm)$, где

$$(1.2) \qquad c_+(x) = \begin{pmatrix} a^+(x) & b^+(x) \\ b^-(-x) & a^-(-x) \end{pmatrix}, \; c_-(x) = \begin{pmatrix} a^-(x) & b^-(x) \\ b^+(-x) & a^+(-x) \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R},$$

Действительно (см. [9]) справедливо тождество

$$(1.3) \qquad \begin{pmatrix} I & J \\ I & -J \end{pmatrix} \mathcal{V}(c_\pm) \begin{pmatrix} I & I \\ J & -J \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \mathcal{K}(a^\pm, b^\pm) & 0 \\ 0 & \mathcal{K}(a^\pm, -b^\pm) \end{pmatrix}$$

В силу этого тождества из фредгольмовости оператора $\mathcal{V}(c_\pm)$ следует фредгольмовость оператора $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$. В работе [9] приведён пример, когда обратное утверждение не имеет место. Тем не менее в случае $n = 1$, кусочно непрерывных на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и непрерывных в точках $x = 0$ и $x = \infty$ (т.е. в неподвижных точках сдвига) коэффициентов эти операторы либо фредгольмовы одновременно либо одновременно не фредгольмовы (см., например, [8]).

В работе [2], исследования оператора $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ сводится к исследованию некоторого теплицева оператора действующего в пространстве $(L_p^+(\mathbb{R}, w^*))^{4n}$, где вес $w^* \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$ определён по формуле

$$(1.4) \qquad w^*(x) = 2^{-1/p} \, |x|^{-1/2p} \, w(\sqrt{|x|}).$$

Теория Фредгольма теплицевых операторов в случае произвольного веса $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$ построена в работах [11]-[12]. На основе этой теории, в работе [2] получен критерий фредгольмовости оператора $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ в терминах весовой функции w^*, матриц-функций $c_\pm$ и

$$(1.5) \qquad c(x) = (c_-(x))^{-1} c_+(x).$$

В данной работе получен критерий фредгольмовости оператора $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ в терминах исходного веса $w \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$.

В работе [2] получены необходимые и достаточные условия фредгольмовости оператора $\mathcal{V}(c_\pm)$. В случае степенных весов вида (1.1), в [2] получены необходимые и достаточные условия при которых оператор $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ фредгольмов, а оператор $\mathcal{V}(c_\pm)$ нет. В данной статье эти результаты распространены на случай произвольных весов из $\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$.

2. Вспомогательная лемма

Пусть $1 < p < \infty$, $w \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$. Как известно (см. [12, теорема 16.17]) каждое из множеств

$$I_x(p,w) := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \colon \left|\frac{\xi - x}{\xi + i}\right|^\lambda w(\xi) \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}) \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$I_\infty(p,w) := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \colon |\xi + i|^{-\lambda} w(\xi) \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}) \right\}$$

является открытым интервалом длины не более чем 1 и содержащий $\lambda = 0$:

$$I_x(p,w) = (-\nu_x^-(p,w), 1 - \nu_x^+(p,w)), \quad (x \in \dot{\mathbb{R}}),$$

где $0 < \nu_x^-(p,w) \le \nu_x^+(p,w) < 1$.

Пусть весовая функция w^* определена по формуле (1.4). Заметим, что w^* принадлежит $\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$ (см. [2, Предложение 3.1]). Следующее утверждение играет важное значение при доказательстве основных результатов.

Лемма 2.1. *Пусть $w \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$. Тогда число $\lambda = 1/2$ принадлежит множеству $I_0(p,w^*)$, а число $\lambda = -1/2$ множеству $I_\infty(p,w^*)$.*

Доказательство. Поскольку функции

$$w_1(\xi) = \left|\frac{\xi}{\xi + i}\right|^{1/2} w^*(\xi), \quad w_2(\xi) = |\xi + i|^{1/2} w^*(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

являются четными ($w_i(-\xi) = w_i(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$), то достаточно убедиться, что $w_i \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}_+)$, $i = 1,2$. Пусть $0 \le \alpha < \beta < \infty$, $I = [\alpha, \beta]$, $I' = [\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}]$. Учитывая очевидные неравенства

$$\begin{aligned} &1 \le \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+1}} \le \sqrt{2}, && x \in \mathbb{R} \\ &\frac{x^s}{|x+i|^s} \le c_1(\beta), && |x+i|^s \le c_2(\beta),\ s > 1,\ 0 \le x \le \sqrt{\beta}, \end{aligned}$$

где

$$c_1(\beta) = \begin{cases} \beta^{s/2}, & 0 \le \beta < 1 \\ 1, & \beta \ge 1 \end{cases}, \qquad c_2(\beta) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \le \beta < 1 \\ (\beta+1)^{s/2}, & \beta \ge 1 \end{cases}$$

и сделав замену переменной $x = \sqrt{\xi}$, несложно убедиться, что

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{\xi^{p/2}}{|\xi+i|^{p/2}}\, w^*(\xi)^p\, d\xi\right)^{1/p} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/p}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{x^p}{|x+i|^p}\cdot\frac{|x+i|^p}{|x^2+i|^{p/2}}\, w(x)^p\, dx\right)^{1/p} \le$$

$$\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/p}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{x^p}{|x+i|^p}\, w(x)^p\, dx\right)^{1/p} \le$$

$$\frac{\sqrt{2}c_1(\beta)}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/p}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{I'} w(x)^p\, dx\right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

Аналогично

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{\xi^{-q/2}}{|\xi+i|^{-q/2}}\, w^*(\xi)^{-q}\, d\xi\right)^{1/q} =$$

$$\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\xi^{-q/2}}{|\xi+i|^{-q/2}}\cdot\frac{2^{q/p+1}\xi^{q/2p+1/2}w(\sqrt{\xi})^{-q}}{2\sqrt{\xi}}\, d\xi\right)^{1/q} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{x^{-q}}{|x+i|^{-q}}\cdot\frac{|x+i|^{-q}}{|x^2+i|^{-q/2}}\, 2^q\, x^q\, w^{-q}(\xi)\, d\xi\right)^{1/q} \le$$

$$\frac{2}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} (x+i)^q\, w(\xi)^{-q}\, d\xi\right)^{1/q} \le$$

$$\frac{2c_2(\beta)}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{I'} w(\xi)^{-q}\, d\xi\right)^{1/q}. \tag{2.2}$$

Поскольку $c_(\beta)c_2(\beta) \le \sqrt{2}\sqrt{\beta}$, из неравенств (2.1), (2.2) следует, что

$$\sigma(p, w_1) = \frac{4\sqrt{\beta}}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})}\,\sigma(p, w) \le 4\sigma(p, w),$$

т.е. $w_1 \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}_+)$.

Перейдем теперь к доказательству второго утверждения.

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\xi+i|^{p/2}\, w^*(\xi)^p\, d\xi\right)^{1/p} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/p}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} |x+i|^p\cdot\frac{|x^2+i|^{p/2}}{|x+i|^p}\, w(x)^p\, dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\frac{c_2(\beta)}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/p}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{I'} w(x)^p\, dx\right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

Кроме того

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\xi+i|^{-q/2}\, w^*(\xi)^{-q}\, d\xi\right)^{1/q} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{1}{|\xi+i|^{q/2}}\, 2^{q/p+1}\, \xi^{q/2p+1/2}\, w(\xi)^{-q}\, d\xi\right)^{1/q} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{x^q}{|x+i|^q}\cdot\frac{|x+i|^q}{|x^2+i|^{q/2}}\, w(x)^{-q}\, dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\frac{2\sqrt{2}c_1(\beta)}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})^{1/q}}\left(\frac{1}{|I'|}\int\limits_{I'} w(x)^{-q}\, dx\right)^{1/q}. \tag{2.4}$$

Из неравенств (2.3) и (2.4) следует, что

$$\sigma(p,w_2)\leq\frac{4\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}\,\sigma(p,w)\leq 4\sigma(p,w).$$

Лемма доказана. □

3. Фредгольмовость

Ниже мы предполагаем, что $w\in\mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$, $a^\pm, b^\pm\in(PC(\dot{\mathbb{R}}))^{n\times n}$, матрицы-функции $c_\pm$ и c определены равенствами (1.2), (1.5), а весовая функция w^* определена равенством (1.4). Будем пользоваться обозначениями: E_m – единичная матрица порядка m,

$$E'_{2n}=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ E_n & 0\end{pmatrix},\quad E''_{2n}=\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & -E_n\end{pmatrix},$$

$$c'_+(x) = \begin{pmatrix} a^+(x) & -b^+(x) \\ -b^-(-x) & a^-(-x) \end{pmatrix}, \quad c'_- = \begin{pmatrix} a^-(x) & -b^-(x) \\ -b^+(-x) & a^+(-x) \end{pmatrix},$$
$$c'(x) = (c'_-(x))^{-1} c'_+(x)$$

Заметим, что матрицы-функции $c'_\pm$, c' играют ту же роль для оператора $\mathcal{K}(a^\pm, -b^\pm)$, что $c_\pm$, c для оператора $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$.

Обозначим через $\lambda_j(x)$ $(\lambda'_j(x))$, $j = 1, \dots, 2n$, $x \in \mathbb{R}_+$ собственные значения матрицы $c^{-1}(x-0)c(x+0)$ $(c'^{\,-1}(x-0)c'(x+0))$; через $\lambda_j(0)$ $(\lambda'_j(0))$, $j = 1, \dots, 2n$, собственные значения матрицы $c(+0)E'_{2n}$ $(c'(+0)E'_{2n})$, а через $\lambda_j(\infty)$ $(\lambda'_j(\infty))$, $j = 1, \dots, 2n$, собственные значения матрицы $c(+\infty)E'_{2n}$ $(c'(+\infty)E'_{2n})$. Матрицы-функции $c_\pm$, c, $c'_\pm$, c' связаны соотношениями

$$c'_\pm(x) = E''_{2n} c_\pm(x) E''_{2n}, \quad c'(x) = E''_{2n} c(x) E''_{2n}, \qquad x \in \{0, \infty\} \cup \mathbb{R}_+ \tag{3.1}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\lambda'_j(x) = \lambda_j(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \; j = 1, \dots, 2n. \tag{3.2}$$

Кроме того

$$c'(x)E'_{2n} = E''_{2n} c(x) E''_{2n} E'_{2n} = E''_{2n}(-c(x)E'_{2n})E''_{2n}$$

и потому

$$\lambda'_j(0) = -\lambda_j(0), \quad \lambda'_j(+\infty) = -\lambda_j(+\infty) \qquad j = 1, \dots, 2n. \tag{3.3}$$

Сформулируем ряд условий играющие важную роль в исследовании фредгольмовости операторов $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$, $\mathcal{K}(a^\pm, -b^\pm)$, $\mathcal{V}(c^\pm)$.

(A) $\operatorname*{essinf}_{x \in \mathbb{R}_+} |\det c_-(x)| > 0$;

(B) требования

$$\det c(x \pm 0) \neq 0 \;\text{ и }\; {}^1\!/_{2\pi} \arg \lambda_j(x) + \nu \notin \mathbb{Z} \tag{3.4}$$
$$\text{при всех } x \in \mathbb{R}_+ \text{ и всех } j = 1, \dots, 2n$$

справедливы для каждого $\nu \in [\nu_x^-(p,w), \nu_x^+(p,w)]$;

(B$_*$) требования (3.4) справедливо для каждого $\nu \in \left[\nu_{x^2}^-(p,w^*), \nu_{x^2}^+(p,w^*)\right]$;

(C) требования

$$\det c(+0) \neq 0 \;\text{ и }\; {}^1\!/_{2\pi} \arg \lambda_j(0) + \nu - {}^1\!/_2 \notin \mathbb{Z} \;\text{ при всех }\; j = 1, \dots, 2n \tag{3.5}$$

справедливы для каждого $\nu \in \left[{}^1\!/_2\, \nu_0^-(p,w), {}^1\!/_2\, \nu_0^+(p,w)\right]$;

(C$_*$) требования (3.5) справедливы для каждого $\nu \in \left[\nu_0^-(p,w^*), \nu_0^+(p,w^*)\right]$;

(C′) требования

(3.6) $$\det c(+0) \neq 0 \ \text{ и } \ {}^1\!/_{2\pi}\, \lambda_j(0) + \nu \notin \mathbb{Z} \ \text{ при всех } \ j = 1, \ldots, 2n$$

справедливы для каждого $\nu \in \left[{}^1\!/_2\, \nu_0^-(p,w), {}^1\!/_2\, \nu_0^+(p,w)\right]$;

(C'_*) требования (3.6) справедливы для каждого $\nu \in \left[\nu_0^-(p,w^*), \nu_0^+(p,w^*)\right]$;

(D) требования

(3.7) $$\det c(+\infty) \neq 0 \ \text{ и } \ {}^1\!/_{2\pi}\, \arg \lambda_j(+\infty) - \nu - {}^1\!/_2 \notin \mathbb{Z} \quad \text{при всех } \ j = 1, \ldots, 2n$$

справедливы для каждого $\nu \in \left[{}^1\!/_2\, \nu_\infty^-(p,w), {}^1\!/_2\, \nu_\infty^+(p,w)\right]$;

(D_*) требования (3.7) справедливы для каждого $\nu \in [\nu_\infty^-(p,w^*), \nu_\infty^+(p,w^*)]$;

(D′) требования

(3.8) $$\det c(+\infty) \neq 0 \ \text{ и } \ {}^1\!/_{2\pi}\, \arg \lambda_j(+\infty) - \nu \notin \mathbb{Z} \ \text{ при всех } \ j = 1, \ldots, 2n$$

справедливы для каждого $\nu \in \left[{}^1\!/_2\, \nu_\infty^-(p,w), {}^1\!/_2\, \nu_\infty^+(p,w)\right]$;

(D'_*) требования (3.8) справедливы для каждого $\nu \in [\nu_\infty^- 0(p,w^*), \nu_\infty^+(p,w^*)]$;

В работе [2] (Теоремы 4.3 и 4.5]) доказаны следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Оператор* $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)\colon (L_p(\mathbb{R}, w))^n \to (L_p(\mathbb{R}, w))^n$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (A), (B_*), (C_*), (D_*).

Теорема 3.2. *Оператор* $\mathcal{V}(c^\pm)\colon (L_p(\mathbb{R}, w))^{2n} \to (L_p(\mathbb{R}, w))^{2n}$ *фредгольмов тогда и только тогда когда одновременно выполнены условия* (A), (B), (C), (C′), (D), (D′).

Применяя теорему 3.2 к оператору $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$, из равенств (3.1)-(3.3) получим

Следствие 3.1. *Оператор* $\mathcal{K}(a^\pm, -b^\pm)\colon (L_p(\mathbb{R}, w))^n \to (L_p(\mathbb{R}, w))^n$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (A), (B_*), (C'_*), (D'_*).

Основная цель этой работы получить критерий фредгольмовости оператора $\mathcal{K}(a^\pm, b^\pm)$ в терминах начальной весовой функции w. Убедимся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3.3. *Числа* $\nu_x^\pm(p,w)$ *и* $\nu_x^\pm(p,w^*)$, $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0, \infty\}$ *связаны следующими соотношениями*

(3.9) $$\nu_{x^2}^\pm(p,w^*) = \nu_x^\pm(p,w), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

$$\nu_0^{\pm}(p,w^*) = \frac{1}{2}\nu_0^{\pm}(p,w), \tag{3.10}$$

$$\nu_\infty^{\pm}(p,w^*) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\nu_0^{\pm}(p,w). \tag{3.11}$$

Доказательство. Из тождества (1.3) следует, что фредгольмовость оператора $\mathcal{V}(c_\pm)$ эквивалентно одновременной фредгольмовости операторов $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)$ и $\mathcal{K}(a^\pm,-b^\pm)$.

В тех точках $x\in\mathbb{R}_+$ где матрица-функция $c(x)$ обратима и непрерывна имеем $\lambda_j(x)=1$ при всех $j=1,\dots,2n$. Поэтому требования ${}^1/_{2\pi}\arg\lambda_j(x)+\nu\notin\mathbb{Z}$ автоматически выполнено при всех $\nu\in(0,1)$.

Пусть матрица-функция c обратима и непрерывна в нуле. Из равенства $c^{-1}(0)=E'_{2n}c(0)E'_{2n}$ (см. [2, формула (4.17)]) следует, что $(c(0)E'_{2n})^2=E_{2n}$ и потому $\{\lambda_1(0),\dots,\lambda_{2n}(0)\}\subset\{-1;1\}$. Следовательно число ${}^1/_{2\pi}\arg\lambda_j(0)+\nu-{}^1/_2$ является целым лишь в случае $\lambda_j(0)=1$ и $\nu={}^1/_2$. Но из предложения 4.2 из [2] следует, что ${}^1/_2\notin\left[\nu_0^-(p,w^*),\nu_0^+(p,w^*)\right]\cup[\nu_\infty^-(p,w^*),\nu_\infty^+(p,w^*)]$. По этой причине условие (C_*) выполняется автоматически.

В случае когда $\nu\in\left[{}^1/_2\,\nu_0^-(p,w);{}^1/_2\,\nu_0^+(p,w)\right]$ имеем $0<\nu<{}^1/_2$ и потому условия (C) и (C$'$) также выполняются автоматически.

Пусть теперь матрица-функция c обратима и непрерывна в $x=\infty$ (т.е. $c(-\infty)=c(+\infty)$). Пользуясь формулой (4.18) аналогично как и в [2] получаем, что $\{\lambda_1(+\infty),\dots,\lambda_{2n}(+\infty)\}\subset\{-1;1\}$. Повторяя рассуждения сделанные при $x=0$ получаем, что условия (D_*), (D), (D$'$) выполняются автоматически.

Пусть $x_0\in\mathbb{R}_+$. Рассмотрим частный случай когда $n=1$, $b^\pm=0$, $a^-=1$ и

$$a^+(x)=\begin{cases}1 & \text{при } \ x\in[-x_0,x_0],\\ \lambda_0 & \text{при } \ x\in\mathbb{R}\setminus[-x_0,x_0],\quad \lambda_0\neq 0.\end{cases}$$

В этом случае $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)=\mathcal{K}(a^\pm,-b^\pm)$ и поэтому $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)$ и $\mathcal{V}(c^\pm)$ фредгольмовы лишь одновременно. Несложно убедиться, что $c(x)=E_2$ при $x\in[-x_0,x_0]$ и

$$c(x)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad \text{при } \ x\in\mathbb{R}\setminus[-x_0,x_0].$$

Собственные значения матрицы $c^{-1}(x_0-0)c(x_0+0)=c(x_0+0)$ совпадают с $\lambda_1(x_0)=\lambda_0$ и $\lambda_2(x_0)=1$. Поскольку $c(x)$ непрерывна в $x=0$, $x=+\infty$ и на $\mathbb{R}_+\setminus\{x_0\}$, то оператор $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда ${}^1/_{2\pi}\arg\lambda_0(x)+\nu\notin\mathbb{Z}$ при $\nu\in\left[\nu^-_{x_0^2}(p,w^*),\nu^+_{x_0^2}(p,w^*)\right]$, а оператор $\mathcal{V}(c^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда ${}^1/_{2\pi}\arg\lambda_0(x)+\nu\notin\mathbb{Z}$ при $\nu\in\left[\nu^-_{x_0}(p,w),\nu^+_{x_0}(p,w)\right]$.

Если отрезки $\left[\nu^-_{x_0^2}(p,w^*),\nu^+_{x_0^2}(p,w^*)\right]$ и $\left[\nu^-_{x_0}(p,w),\nu^+_{x_0}(p,w)\right]$ не совпадают, то существует ν_0 которая принадлежит одному из этих множеств и не принадлежит другому. Выбрав λ_0 так, чтобы $\arg\lambda_0 = 2\pi - 2\pi\nu_0$ мы получим, что один из операторов $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)$ и $\mathcal{V}(c^\pm)$ фредгольмов, а второй нет. Полученное противоречие доказывает равенство (3.9).

Пусть теперь $n=1$, $b^\pm=0$, $a^-=1$, a^+ – отличная от нуля непрерывная на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функция и имеющая конечные пределы $\lim\limits_{x\to-0}a^+(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+0}a^+(x)=\lambda_0^2$, где $\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Для определённости будем считать, что значение $\arg\lambda_0$ в интервале $(0,2\pi)$, равно $2\pi\xi_0$, где $0\le\xi_0<{}^1/_2$.

Матрица

$$c(+0)E_2' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1(0)=\lambda_0$, $\lambda_2(0)=-\lambda_0$. В силу теоремы 3.2 оператор $\mathcal{V}(c^\pm)$ фредгольмов когда числа $\xi_0+\nu$, $\xi_0+\nu-{}^1/_2$, $\xi_0+\nu+{}^1/_2$ не являются целыми при всех $\nu\in\left[{}^1/_2\ \nu_0^-(p,w),{}^1/_2\ \nu_0^+(p,w)\right]$. Заметим, что достаточно требовать эти условия только для первых двух чисел. Заметим также, что условие $\xi_0+\nu-{}^1/_2\in\mathbb{Z}$ эквивалентно тому, что $\nu={}^1/_2-\xi_0$, а условие $\xi_0+\nu\in\mathbb{Z}$ эквивалентно тому, что $\nu=1-\xi_0$, но $1-\xi_0>{}^1/_2$, поэтому $1-\xi_0\notin\left[{}^1/_2\ \nu_0^-(p,w);{}^1/_2\ \nu_0^+(p,w)\right]$. Таким образом, оператор $\mathcal{V}(c^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда

$$ {}^1/_2-\xi_0\notin\left[{}^1/_2\ \nu_0^-(p,w);{}^1/_2\ \nu_0^+(p,w)\right]. \tag{3.12}$$

В силу теоремы 3.1 оператор $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда при $\nu\in\left[\nu_0^-(p,w^*),\nu_0^+(p,w^*)\right]$ числа $\xi_0+\nu-{}^1/_2$ и $\xi_0+\nu$ не являются целыми. Очевидно, что эти числа одновременно не могут быть целыми. Из неравенства $-{}^1/_2<\xi_0+\nu-{}^1/_2<\nu<1$ следует, что условие $\xi_0+\nu-{}^1/_2\in\mathbb{Z}$ эквивалентно $\nu={}^1/_2-\xi_0$. Из неравенства $0<\xi_0+\nu<{}^3/_2$ следует, что если $\xi_0+\nu\in\mathbb{Z}$, то $\nu=1-\xi_0$. Таким образом, оператор $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда либо ${}^1/_2-\xi_0\notin\left[\nu_0^-(p,w^*),\nu_0^+(p,w^*)\right]$, либо

$$ {}^1/_2-\xi_0\notin\left[-{}^1/_2+\nu_0^-(p,w^*),-{}^1/_2+\nu_0^+(p,w^*)\right].$$

Учитывая, что оператор $\mathcal{K}(a^\pm,b^\pm)=\mathcal{K}(a^\pm,-b^\pm)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $\mathcal{V}(c^\pm)$, нетрудно понять, что либо имеет место равенство (3.10) либо $\nu_0^\pm(p,w^*)={}^1/_2+{}^1/_2\ \nu_0^\pm(p,w)$. Но во втором случае имеет место

$$1-\nu_0^+(p,w^*)={}^1/_2-{}^1/_2\ \nu_0^+(p,w)<{}^1/_2$$

что противоречит утверждению Леммы 2.1. Таким образом справедивы равенства (3.10).

Рассмотрим теперь случай, когда $n = 1$, $b^{\pm} = 0$, $a^{-} = 1$, a^{+} – отличная от нуля непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, имеющая конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} a^{+}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{+}(x) = \lambda_0^2$, где $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Вновь будем считать, что значение $\arg\lambda_0$ в интервале $[0, 2\pi)$ равно $2\pi\xi_0$, где $0 \le \xi_0 < 1/2$. Из теоремы 3.2 следует, что оператор $\mathcal{V}(c^{\pm})$ фредгольмов тогда и только тогда, когда

$$\xi_0 \notin \left[1/2\ \nu_\infty^{-}(p,w); 1/2\ \nu_\infty^{+}(p,w)\right]. \tag{3.13}$$

Повторяя рассуждения, проведенные при $x = 0$, несложно понять, что в силу теоремы 3.1 оператор $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ фредгольмов тогда и только тогда, когда либо

$$\xi_0 \notin \left[\nu_\infty^{-}(p,w^*), \nu_\infty^{+}(p,w^*)\right]$$

либо

$$\xi_0 \notin \left[-1/2 + \nu_\infty^{-}(p,w^*), -1/2 + \nu_\infty^{+}(p,w^*)\right].$$

Поскольку $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm}) = \mathcal{K}(a^{\pm}, -b^{\pm})$, то операторы $\mathcal{V}(c^{\pm})$ и $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ одновременно фредгольмовы поэтому сравнивая последние два условия с (3.13) получим, что либо $\nu_\infty^{\pm}(p,w^*) = 1/2 + \nu_\infty^{\pm}(p,w)$, либо имеет место равенство (3.11). Но в первом случае

$$-\nu_\infty^{-}(p,w^*) = -1/2 - \ \nu_\infty^{-}(p,w) > -1/2$$

что противоречит утверждению Леммы 2.1. Теорема доказана. □

Заметим, что при справедливости формул (3.11) условие (D$_*$) принимает вид (D′), а условие (D′$_*$) принимает вид (D). Таким образом, из теоремы 3.1 и теоремы 3.3 следует следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Оператор $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ является оператором Фредгольма тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (A), (B), (C) *и* (D′).

Следствие 3.2. *Оператор $\mathcal{K}(a^{\pm}, -b^{\pm})$ является оператором Фредгольма тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* (A), (B), (C′) *и* (D).

Теорема 3.5. *Чтобы оператор $\mathcal{K}(a^{\pm}, b^{\pm})$ был фредгольмовым и одновременно оператор $\mathcal{V}(c^{\pm})$ не был фредгольмовым необходимо и достаточно чтобы были выполнены условия* (A), (B), (C) *и* (D′), *а также*

(E) *либо существуют* $j \in \{1, \ldots, 2n\}$ *и* $\nu \in \left[{}^1\!/_2\ \nu_0^-(p,w); {}^1\!/_2\ \nu_0^+(p,w)\right]$ *такие, что число* ${}^1\!/_{2\pi} \arg \lambda_j(0) + \nu$ *является целым, либо существуют* $j' \in \{1, \ldots, 2n\}$ *и* $\nu' \in \left[{}^1\!/_2\ \nu_0^-(p,w); {}^1\!/_2\ \nu_0^+(p,w)\right]$ *такие, что число* ${}^1\!/_{2\pi} \arg \lambda_{j'}(+\infty) - \nu' - {}^1\!/_2$ *является целым.*

Эта теорема обобщает теорему 4.2 из [2], где рассмотрен случай степенных весов вида (1.1), на случай произвольной весовой функции $w \in \mathcal{A}_{p,s}(\mathbb{R})$.

Список литературы

[1] A. Böttcher, Y. I. Karlovich, Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators, al Progress in Mathematics, Birkhäuser, Basel, **154** (1997).

[2] A. G. Kamalyan, “On singular integral operators with reflection”, Advances in Operator Theory, **10**:26 (2025).

[3] I. Gohberg, N. Krupnik, Dimensional Linear Singular Integral Equations, Basel, Birkhäuser, **1, 2** (1992).

[4] K. F. Clancy, I. Gohberg, N. Krupnik, Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators, Basel and Boston, Birkhäuser (1981).

[5] N. Krupnik, Banach Algebras with Symbol and Singular Integral Operators, Basel, Birkhäuser (1987).

[6] Г. С. Литвинчук, Краевые Задачи и Сингулярные Интегральные Уравнения со Сдвигом, Москва, Наука (1977).

[7] V. G. Kravchenko, G. S. Litvinchuk, Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift, Dordrecht a.o. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994).

[8] N. Karapetiants, S. Samko, Equations with Involutive Operators, Boston, Birkhäuser (2001), (Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, Уравнения с инволютивными операторами и их приложения, Ростовский ун-т, Ростов на Дону (1988)).

[9] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, “Об одномерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом”, Известия АН Арм. ССР, **8**: 1, 3 – 12 (1973); English translation in Convolution equations and singular integral operators, Operator Theory: Advances and Applications, **206**, 201 – 211 (2010).

[10] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, “Об алгебрах сингулярных интегральных операторов со сдвигом”, Матем. исследования, Кишинев, **8**:2 (28), 170 – 175 (1973). English translation in Convolution equations and singular integral operators, Operator Theory: Advances and Applications, **206**, 213–217 (2010).

[11] I. M. Spitkovsky, “Singular integral operators with PC symbols on the spaces with general weights”, Journal of Functional Analysis, **105**, 129 – 143 (1992).

[12] A. Böttcher, Y. I. Karlovich and I. M. Spitkovsky, Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions, Birkhäuser, Basel (2002).

Поступила 12 июня 2025

После доработки 12 июня 2025

Принята к публикации 25 августа 2025