

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Р. О. Амасян

Подбор оптимальных множителей подобия с учетом
 неоднородностей материалов модели и оригинала

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 7/XII 1966)

В практике моделирования задача подбора материала ставится в двух формах. В первом случае по заданным множителям подобия β и γ требуется проверить подобие между материалом оригинала и проверяемым материалом модели. Во втором случае имеются материалы как оригинала, так и модели. Задача подбора материала сводится к нахождению оптимальных значений множителей подобия β и γ .

Последняя задача легко разрешима в том случае, когда материалы моделируются только по их предельным прочностям. В общем случае, когда материал моделируется по деформативным свойствам, задача усложняется тем, что ординаты сопоставляемых функций $\sigma'(\varepsilon')$ и $\beta\sigma(\gamma\varepsilon)$ из-за существования множителя γ должны отвечать различным абсциссам, что вносит специфические затруднения в отыскании наилучшего приближения между функциями $\sigma'(\varepsilon')$ и $\beta\sigma(\gamma\varepsilon)$.

Задача подбора оптимальных множителей β и γ при детерминированных функциях $\sigma'(\varepsilon')$ и $\sigma(\varepsilon)$ решена академиком А. Г. Назаровым (¹). Мы же решаем эту же задачу с учетом неоднородностей материалов модели и оригинала, рассматривая $\sigma'(\varepsilon')$ и $\sigma(\varepsilon)$ как случайные, нестационарные функции. Для решения этой задачи мы воспользовались теорией оптимальных динамических систем (²).

Основная задача теории оптимальных систем, поставленная выше, как задача приближения (аппроксимации) одной случайной функции путем преобразования другой случайной функции, может быть сформулирована математически следующим образом.

Случайная функция $\sigma(\varepsilon)$ наблюдается в некоторой области D изменения аргумента ε . Требуется найти такой коэффициент β , чтобы случайная функция

$$\sigma_1(\varepsilon') = \beta\sigma(\varepsilon)$$

была насколько возможно более близкой к случайной функции $\sigma'(\varepsilon')$ в области D' изменения аргумента $\varepsilon' = \gamma\varepsilon$.

Для того чтобы эта задача приобрела точную количественную формулировку, необходимо установить, что следует понимать под

наилучшей аппроксимацией функции. Здесь, как при всякой аппроксимации одной функции другой, можно дать различные определения наилучшего приближения.

Можно, например, наилучшим приближением считать такое, при котором в области D изменения аргумента ε вероятность получения разности между аппроксимируемой и аппроксимирующей функцией, большей по абсолютной величине некоторого заданного значения, имела бы наименьшую величину. Вместо этого наилучшим приближением можно считать такое, при котором математическое ожидание абсолютной величины разности между ординатами заданных функций, было бы минимальным.

Наконец, можно потребовать, чтобы условию минимума удовлетворяло бы математическое ожидание квадрата этой разности.

Перечисленным выше трем условиям наилучшего приближения функции $\sigma'(\varepsilon')$ к функции $\sigma_1(\varepsilon')$ можно придать следующую математическую форму: для обеспечения минимальной вероятности отклонения, большого заданного ε_0 , необходимо, чтобы

$$P \{ |\sigma'(\varepsilon') - \sigma_1(\varepsilon')| > \varepsilon_0 \} = \min; \quad (1)$$

требование минимума математического ожидания абсолютной величины разности $\sigma'(\varepsilon')$ и $\sigma_1(\varepsilon')$ означает выполнение условия:

$$M \{ |\sigma'(\varepsilon') - \sigma_1(\varepsilon')| \} = \min. \quad (2)$$

Наконец, требование минимальной величины математического ожидания квадрата разности (требование минимума среднего квадратического отклонения) приводит к условию:

$$M \{ |\sigma'(\varepsilon') - \sigma_1(\varepsilon')|^2 \} = \min. \quad (3)$$

Несмотря на различную математическую формулировку оптимального приближения функции $\sigma'(\varepsilon')$ к функции $\sigma_1(\varepsilon')$ (можно было бы указать и другие возможные критерии наилучшей аппроксимации), физически все эти критерии близки между собой, так как их выполнение означает, что функция $\sigma'(\varepsilon')$, как правило, не сильно отклоняется от функции $\sigma_1(\varepsilon')$. Поэтому из большого числа возможных критериев необходимо выбрать наиболее простой; им является критерий минимума среднего квадратического отклонения. Кроме того, в том случае, когда функции $\sigma'(\varepsilon')$ и $\sigma_1(\varepsilon')$ являются нормальными и математическое ожидание разности $\sigma'(\varepsilon') - \sigma_1(\varepsilon')$ равно нулю, это требование гарантирует одновременное выполнение также и условия (1) и (2). Действительно, если разность

$$\delta(\varepsilon) = \sigma'(\varepsilon') - \sigma_1(\varepsilon') \quad (4)$$

является нормальной величиной, обладающей нулевым математическим ожиданием, то вероятность (1) выражается через σ_δ формулой:

$$P \{ |\sigma'(\varepsilon') - \sigma_1(\varepsilon')| > \varepsilon_0 \} = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon_0}{\sigma_\delta}\right),$$

где $\Phi(x)$ — интегральная функция Лапласа, а математическое ожидание (2) отличается от σ_0 только постоянным множителем:

$$M \{ |\sigma'(\varepsilon') - \sigma_1(\varepsilon')| \} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_0.$$

Оба эти выражения монотонно возрастают с ростом σ_0 и поэтому их минимум достигается одновременно с обращением в минимум σ_0 . Следовательно, нам необходимо определить множители β и γ таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$D [\hat{\sigma}(\varepsilon)] = M \{ |\sigma'(\gamma\varepsilon) - \beta\sigma(\varepsilon)|^2 \} = \min. \quad (5)$$

Для нахождения оптимальных значений множителей β и γ необходимо приравнять к нулю частные производные $\frac{\partial D[\hat{\sigma}(\varepsilon)]}{\partial \beta}$ и $\frac{\partial D[\hat{\sigma}(\varepsilon)]}{\partial \gamma}$.

Выполнив дифференцирование и учитывая, что математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от ее математического ожидания, получим:

$$\frac{\partial D[\hat{\sigma}(\varepsilon)]}{\partial \beta} = 2M \{ -\sigma'(\gamma\varepsilon)\sigma(\varepsilon) + \beta\sigma^2(\varepsilon) \} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial D[\hat{\sigma}(\varepsilon)]}{\partial \gamma} = 2M \left\{ [\sigma'(\gamma\varepsilon) - \beta\sigma(\varepsilon)] \frac{\partial \sigma'(\gamma\varepsilon)}{\partial \gamma} \right\} = 0. \quad (7)$$

Из этих уравнений невозможно получить β и γ в явном виде, поэтому для каждого конкретного случая установление условий минимума должно быть проведено особо. Однако имеется и упрощенный метод определения оптимальных множителей β и γ .

Исходная идея этого метода заключается в следующем. Фиксируются ориентировочные значения множителя $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Тогда соответствующие значения $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ получим из равенства (6)

$$\beta_i = \frac{M [\sigma'(\gamma_i\varepsilon)\sigma(\varepsilon)]}{M [\sigma^2(\varepsilon)]}$$

или, учитывая, что

$$M [\sigma'(\gamma\varepsilon)\sigma(\varepsilon)] = M [\sigma'(\gamma\varepsilon)] M [\sigma(\varepsilon)] + K_{\sigma\sigma'}(\varepsilon, \varepsilon'),$$

где $K_{\sigma\sigma'}(\varepsilon, \varepsilon')$ — корреляционная функция связи

$$K_{\sigma\sigma'}(\varepsilon, \varepsilon') = M \{ |\sigma'(\gamma\varepsilon) - \sigma'(\gamma\varepsilon')| |\sigma(\varepsilon) - \sigma(\varepsilon')| \}$$

окончательно получим:

$$\beta_i = \frac{M [\sigma'(\gamma_i\varepsilon)] M [\sigma(\varepsilon)] + K_{\sigma\sigma'}(\varepsilon, \varepsilon')}{M [\sigma^2(\varepsilon)]}.$$

Подстановка каждой пары $\beta_i \gamma_i$ в равенстве (5) дает нам дисперсию ошибки приближения одной случайной функции к другой. Поэтому из них мы принимаем ту пару значений $\beta_k \gamma_k$, при которой $D[\hat{\sigma}(\varepsilon)]$ принимает наименьшее значение.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии Академии наук Армянской ССР

Օպտիմալ նմանության գործակիցների բնութագրումը մոդելի և օրիգինալի նյութերի անհամասեռության հաշվառումով

Հոդվածում դիտարկվում է նյութերի նմանության ապահովման պայմանները՝ հիմնված նմանության ստատիստիկական տեսության վրա: Ցույց է տրված, որ մոդելի և օրիգինալի նյութերի մոտավոր մոդելացման խնդիրը, այդ նյութերի անհամասեռության հաշվառումով, բերվում է հետևյալ մաթեմատիկական տեսքին: Օրիգինալի և մոդելի նյութերի համար $\varepsilon(\varepsilon)$ և $\varepsilon'(\varepsilon')$ ինդիկատորային կորերը տրված են որպես պատահական, ոչ ստացիոնար ֆունկցիաներ: Պետք է գտնել լարվածության և դեֆորմացիայի համար երկու այնպիսի բաղադրատեղիներ β և γ , որպեսզի ինդիկատորային կորերից մեկը մյուսին աֆինային փոխակերպման դեպքում, նրանց տարբերության դիսպերսիան հասնի մինիմումի: Այդ նպատակով սղտագործված է ամենափոքր քառակուսային եղանակը: Վերջում տրված է նրա լուծման պրակտիկ եղանակը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Г. Назиров, О механическом подобии твердых деформируемых тел. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1965. ² В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Гостехиздат, М., 1957.