

МАТЕМАТИКА

Ф. С. Лисин

Некоторые достаточные условия замкнутости системы полиномов
 в областях Каратеодори

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 19/X 1966)

Пусть B — ограниченная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, $h(z) > 0$, $z \in B$ — весовая функция в B (¹); $A_q(B, h)$, $q > 0$, — класс функций $f(z)$, регулярных в B и таких, что

$$\iint_B h(z) |f(z)|^q d\sigma < \infty, \quad d\sigma = dx dy,$$

P — множество всех полиномов (обыкновенных) от z . Введем еще класс $A_\infty(B)$ функций, регулярных и ограниченных в B .

Пусть задана система $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$ функций класса $A_q(B, h)$, $q > 0$. Будем говорить, что система $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$ замкнута в классе $A_q(B, h)$, если для любой функции $f(z) \in A_q(B, h)$

$$\inf \iint_B h(z) |f(z) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(z)|^q d\sigma = 0,$$

где нижняя грань берется по всевозможным системам чисел $c_0, c_1, \dots, c_n$, $n = 0, 1, \dots$.

Систему $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$ назовем полной в классе $A_q(B, h)$, $q > 1$, если из равенств

$$\iint_B h(z) \frac{|f(z)|^q}{f(z)} \varphi_n(z) d\sigma = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

справедливых для некоторой функции $f(z) \in A_q(B, h)$, следует, что $f(z) = 0$, $z \in B$.

А. Л. Шагинян (²) показал, что в классе $A_q(B, 1)$, $q = 2, 4, 6, \dots$, понятия полноты и замкнутости эквивалентны. Тем же методом доказывается

Лемма 1. В классе $A_q(B, h)$, $q > 1$, $h(z)$ — вес в B , понятия полноты и замкнутости эквивалентны.

Пусть B — область Каратеодори; А. Л. Шагинян (^{1,4}) нашел ряд достаточных условий полноты системы полиномов P в классе $A_2(B, h)$.

где $h(z) = |D(z)|$, $D(z) \in A_1(B, 1)$, $D(z) \neq 0$, $z \in B$ (такой вес будем называть аналитическим). В частности, в этой работе показано, что если $D(z)$ полином, то система полиномов полна в классе $A_2(B, h)$.

Усиление этого результата и ряд других можно найти в монографии В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева (¹).

В настоящей заметке даются некоторые критерии полноты системы полиномов в классе $A_q(B, h)$, $q > 0$, B — область Каратеодори, $h(z)$ — аналитический вес. Из них, в частности, следуют критерии, указанные выше. Предварительно потребуются две леммы.

Лемма 2. Пусть B — любая ограниченная односвязная область, $h(z)$ — аналитический вес. Если система P замкнута в классе $A_q(B, h)$ для любого $q > 1$, то она замкнута в классе $A_1(B, h)$ для любого $\delta > 0$.

Лемма 3. Пусть B — область Каратеодори, $h(z)$ — любой вес, функция $g(z) \in A_\infty(B)$. Тогда для любого $q > 0$

$$\inf_{p(z) \in P} \int \int_B h(z) |g(z) - p(z)|^q d\bar{z} = 0.$$

Теорема 1. Пусть B — область Каратеодори, $h(z) = |D(z)|^q$, ($q > 0$) — аналитический вес. Система полиномов замкнута в классе $A_q(B, h)$, если существует функция $g(z) \in A_\infty(B)$, $g(z) \neq 0$, $z \in B$, такая, что для $D_1(z) = g(z)D(z) = e^{\varphi_1(z)}$ выполнены условия

$$a) \quad D_1(z) \in A_{qs}(B, 1)$$

для некоторого числа $s > 1$,

$$b) \quad \int \int_B e^{x \operatorname{Im} \varphi_1(z)} d\bar{z} < \infty$$

для некоторого вещественного числа $x \neq 0$.

Наметим доказательство. В силу леммы 2 достаточно ограничиться случаем $q > 1$. При этом в силу леммы 1 достаточно показать, что из равенств (1), где $f(z) \in A_q(B, h)$, $\varphi_n(z) = z^n$, $n = 0, 1, \dots$, следует, что $f(z) \equiv 0$, $z \in B$. И, наконец, в силу условий, наложенных на $D_1(z)$, равенства (1) можно заменить равенствами

$$\int \int_B D_1(z) \frac{|f(z)|^q}{f(z)} z^n d\bar{z} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где $f(z) \in A_q(B, 1)$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить, что из равенств (2) следует $f(z) \equiv 0$, $z \in B$.

Фиксируем любое $n = 0, 1, \dots$ и введем функцию

$$F_n(w) = \int \int_B \frac{|f(z)|^q}{f(z)} e^{w \varphi_1(z)} z^n d\bar{z}, \quad (3)$$

где $w \in \bar{G}$, $\bar{G}$ — замкнутый прямоугольник, не содержащий точку $z = \infty$, ограниченный осями координат и прямыми $\operatorname{Re} w = 1 + \beta$, $\operatorname{Im} w = -\beta \operatorname{sgn} \alpha$, $\beta > 0$.

В силу условия а) теоремы число $\beta > 0$ можно подобрать так, что для некоторого $p > 1$ и для всех $w \in \bar{G}$ будет выполнено условие

$$\iint_B |e^{w\Phi(z)}|^{pq} d\sigma < \text{const} < \infty. \quad (4)$$

При этом, как легко видеть, функция $F_n(w)$ определена в $\bar{G}$ и регулярна в G . Ниже считаем такое $\beta > 0$ фиксированным.

Из теоремы Фаррела — А. И. Маркушевича следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $F_n(0) = 0$. А это будет установлено, если покажем, что 1) $F_n(w) \rightarrow F_n(0)$ при $w \rightarrow 0$, $w \in G$, и 2) $F_n(w) \equiv 0$, $w \in G$. Справедливость утверждения 1) следует почти непосредственно из (4) и известной теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (3).

Покажем, что верно утверждение 2). Рассмотрим множество T точек области G вида $1 + i\eta$, где $0 < |\eta| < \delta$, а δ выбрано так, что для всех точек $1 + i\eta \in T$ будет выполнено условие $e^{i\eta\Phi(z)} \in A_t(B, 1)$, где $t = \frac{qs}{s-1}$. Возможность такого выбора числа δ следует из условия б) теоремы.

Фиксируем любую точку $w = 1 + i\eta \in T$. Так как $z^n e^{i\eta\Phi(z)} \in A_t(B, 1)$, то с помощью теоремы Фаррела — А. И. Маркушевича и известного свойства сходящейся в среднем последовательности полиномов получим представление

$$z^n e^{i\eta\Phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z), \quad (5)$$

где $p_k(z)$ — некоторый полином степени k , причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_B \left| \sum_{k=m}^{\infty} p_k(z) \right|^t d\sigma = 0. \quad (6)$$

Учитывая, что по допущению для $f(z)$ выполнено условие (2) и принимая во внимание представление функции $z^n e^{i\eta\Phi(z)}$ в виде ряда (5), можем написать для любого $m = 0, 1, \dots$

$$F_n(w) = \iint_B \frac{|f(z)|_1^q}{f(z)} D_1(z) \cdot \left(\sum_{k=m}^{\infty} p_k(z) \right) d\sigma.$$

Отсюда с помощью неравенства Гельдера получаем

$$|F_n(w)| \leq \text{const} \left(\iint_B \left| \sum_{k=m}^{\infty} p_k(z) \right|^t d\sigma \right)^{\frac{1}{t}}. \quad (7)$$

А из (7) и (6) следует, что $F_n(w) \equiv 0$, $w \in T$. И так как $F_n(w)$ регулярна в G , то $F_n(w) \equiv 0$, $w \in G$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть функция $w = \varphi(z)$ однолистно и конформно отображает некоторую ограниченную односвязную область B на круг $|w| < 1$. Известно (см. (1), стр. 266), что для полноты системы поли-

номов в классе $A_2(B, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $m = 1, 2, \dots$

$$\inf_{p(z) \in P} \int_B \int |\varphi'(z) \varphi^m(z) - p(z)|^2 d\bar{z} = 0.$$

Из теоремы 1 следует, что это условие можно ослабить. А именно, верно следующее утверждение. Для замкнутости системы полиномов в классе $A_q(B, 1)$, $q > 0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $m = 0, 1, \dots$

$$\inf_{p(z) \in P} \int_B \int |\varphi^m(z) - p(z)|^q d\bar{z} = 0.$$

Отметим, что в основе доказательства теоремы 1 лежит метод интегральных преобразований М. М. Джрбашяна (см. (6)). Методами, близкими к указанному доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть B — область Каратеодори, $D(z) \in A_q(B, 1)$, $q > 0$, $D(z) \neq 0$, $z \in B$ и существуют число α , $0 < \alpha \leq 1$ и функция $g(z) \in A_-(B)$, $g(z) \neq 0$, $z \in B$ такие, что $[g(z) D(z)]^\alpha$ не принимает значений, принадлежащих некоторой замкнутой области $\bar{G}$ такой, что $w = 0 \in \bar{G}$. Пусть существуют число β , $0 < \beta \leq 1$ и последовательность точек $\{w_n\}_1^\infty \in \bar{G}$, сходящаяся к нулю, такие, что

$$\int_B \int \left| \frac{D_1(z)}{(D_1^2(z) - w_n)^\beta} \right|^q d\bar{z} < C < \infty,$$

где $D_1(z) = g(z) D(z)$ и постоянная C от n не зависит. Тогда система полиномов замкнута в классе $A_q(B, h)$, где $h(z) = |D(z)|^q$.

Теорема 3. Пусть B — область Каратеодори, $D(z) \in A_q(B, 1)$, $q > 0$ и $D(z)$ может быть представлена в виде $D(z) = \frac{D_1(z)}{D_2(z)}$, где $D_1(z) \in A_{qs}(B, 1)$, $s > 1$, а $D_2(z) \in A_-(B)$. Если выполнено условие $D_1^\alpha(z) \in A_q(B, 1)$, $-1 \leq \alpha < 0$ или условия $D_1^\alpha(z) \in A_q(B, 1)$, $\operatorname{Re} D_2(z) > 0$, то система полиномов замкнута в классе $A_q(B, h)$, где $h(z) = |D(z)|^q$.

Благодарю Н. А. Лебедева за постановку задачи, а также за внимание к настоящей работе.

Ֆ. Ո. ԼԻՍԻՆ.

Կարաբեղորու տիրույթներում բազմանդամների սխառեմի
փակուրյան որոշ բավարար պայմաններ

Աշխատանքում բերված են կոմպլեքս հարթության B սահմանափակ տիրույթում (z) սեպուլյար ֆունկցիաների $A_q(B, h)$ $q > 0$ դասում բազմանդամների սխառեմի լրիվ բյուրեղային հայտանիշներ, որտեղ B -ն Կարաբեղորու տիրույթ է, $h(z)$ -ը՝ անալիտիկ կշիռ:

Ստացված արդյունքը կարելի է ձևակերպել հետևյալ թեորեմայով: Բազմաճյուղի
 սխեմաներ կլինի փակ $A_q(B, h)$ դասում, եթե B տիրույթում ունի լայն և սահմանափակ
 ֆունկցիաների $A_-(B)$ դասում գոյություն ունի $q(z) \neq 0$ ֆունկցիա այնպիսին, որ $D_1(z) =$
 $= q(z)D(z) = e^{i\psi(z)}$ ֆունկցիան բաժարարում է հետևյալ պայմաններին
 ա) $D_1(z) \in A_{q,s}(B, 1)$ որեւէ $s > 1$ թվի համար

$$բ) \iint_B e^{2 \operatorname{Im} \psi(z)} dx dy < \infty \text{ որեւէ } \alpha > 0 \text{ իրական թվի համար}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А — Ч Р О Ч Ы П Р О З Р Ы

- ¹ В. И. Смирнов и Н. А. Лебедев, Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1964.
- ² А. Л. Шагинян, С. М. Ж., № 3, 1960.
- ³ А. Л. Шагинян, ДАН СССР, XV, 1937.
- ⁴ А. Л. Шагинян, ДАН АрмССР, XVI, № 1.
- ⁵ Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1952.
- ⁶ М. М. Джрбашян, Матем. сб., 36, № 3, 1955.