ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLIV 1967 1

МАТЕМАТИКА

Р. В. Амбарцумян

К характеризации процессов Пуассона в терминах разложимости точечного процесса на независимые рекуррентные компоненты

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 1/X 1966)

Теорему Макфаддена о суперпозициях независимых стационарных точечных процессов (в дальнейшем т. п.) можно рассматривать как еще одну характеризацию пуассоновских т. п. в классе R всех рекуррентных стационарных т. п. положительной интенсивности.

Теорема Макфаддена состоит в том, что если т. п. $\Pi_1 \in R$ и т. п. $\Pi_2 \in R$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, то из принадлежности их суперпозиции

$$\Pi = \Pi_1 * \Pi_2$$

(звезда означает суперпозицию независимых т. п.) классу R следует что Π есть т. п. Пуассона (1).

В связи с этим интересно выяснить, насколько широким может быть взят класс т. п. P, чтобы из представления

$$\Pi = \Pi_1 * \Pi_2, \ \Pi \in P, \ (\Pi_1, \Pi_2) \in \bar{R}^2,$$

где $\bar{R}^2$ некоторый, достаточно широкий, подкласс всевозможных пар, рекуррентных т. п., следовало, что Π является т. п. Пуассона. В более общей постановке число компонент, принадлежащих R, следует считать произвольным.

Теорема 1, доказываемая в настоящей работе, представляет собой шаг в этом направлении.

Каждый т. п. $\Pi \in R$ вполне определяется функцией распределения $F(x)$ длины интервала между последовательными событиями в Π. О функции $F(x)$ будем говорить, что она отвечает т. п., Π, и наоборот.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим класс всех стационарных т. п., последовательные интервалы между событиями в которых составляют марковскую последовательность конечного порядка.

Через $\bar{R}^n$ обозначим подкласс класса всевозможных строк

$$(\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_n), \ \Pi_i \in R, \ i = 1, \cdots, n$$

определяемый следующими дополнительными условиями:

Функции распределения $F_i(x)$, отвечающие т. п. Π_i, $i=1,2\cdots,\cdots,n$ непрерывны и дифференцируемы в нуле, причем производные $\alpha_i = \left.\frac{dF_i}{dx}\right|_{x=0}$ удовлетворяют соотношениям

а) $\alpha_i \neq 0$, $i=1,\cdots,n$

б) $\alpha_i \neq \alpha_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k}$, когда $i \neq j_1,\cdots,j_k$ при любом, выборе индексов $i, j_1, \cdots, j_k$.

Теорема 1. *Если имеет место представление*

$$\Pi = \Pi_1 * \Pi_2 * \cdots * \Pi_n, \quad \Pi \in \mathfrak{M}, \quad (\Pi_1 \cdots \Pi_n) \in \bar{R}^n,$$

то Π *является т. п. Пуассона.*

1. Доказательство теоремы 1 опирается на принадлежащую автору теорему о суперпозициях независимых т. п., с компонентами, принадлежащими R, приведенную без доказательства в [2].

Для полноты изложения сформулируем и докажем эту теорему. Пусть

$$\Pi = \Pi_1 * \cdots * \Pi_n, \quad \Pi_i \in R, \quad i=1,\cdots,n; \tag{2}$$

σ_i — интенсивность т. п. Π_i;

$m_i(t)$ — функция восстановления для т. п. Π_i (среднее число событий за время $(0, t)$ в т. п. Π_i, при условии, что в момент $t=0$ произошло событие т. п. Π_i);

$M_k(t, \Delta)$ — среднее число событий в т. п. Π, происходящих в интервале времени $(0, t)$, при условии, что на интервале $(-\Delta, 0)$ произошло k событий т. п. Π.

Теорема 2. *Если существуют отличные от нуля производные*

$$\alpha_i = \left.\frac{dF_i}{dx}\right|_{x=0},$$

то существует предел

$$\lim_{\Delta\to 0} M_k(t, \Delta) = M_k(t),$$

причем

$$M_k(t) = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=k} P_{j_1, j_2, \cdots j_n} \sum_{i=1}^{n} \hat{m}_{j_i}(t),$$

где

$$\hat{m}_{j_i}(t) = \begin{cases} m_i(t), & \text{если } j_i \neq 0 \\ \sigma_i t, & \text{если } j_i = 0 \end{cases}$$

и

$$P_{j_1,\cdots,j_n} = \frac{1}{\omega_k} \prod_{i, j_i \neq 0} \frac{\sigma_i \alpha_i^{\,j_i-1}}{j_i!} \quad (j_1 + \cdots + j_n = k),$$

а ω_k *выбирается из условия:*

$$\sum_{j_1+\cdots+j_n=k} P_{j_1\cdots j_n} = 1.$$

Доказательство начнем с выяснения асимптотического поведения при $\Delta\to 0$ вероятностей $v_k^i(\Delta)$ того, что на интервале длины Δ в т. п. $\Pi_l \in R$ появится ровно k событий. Согласно известным формулам Пальма (3)

$$v_k^l(t) = \sigma_l \int_0^t [\varphi_{k-1}^l(u) - \varphi_k^l(u)]\, du, \ k \geqslant 1, \tag{3}$$

где $\varphi_k^l(t)$ есть вероятность иметь k событий т. п. Π_l на интервале $(0, t)$ при условии, что в момент $t=0$ произошло событие т. п. Π_l. В то же время, как известно

$$\varphi_k^l(x) = F_l^{(k-1)}(x) - F_l^{(k)}(x), \tag{4}$$

где $F_l^{(k)}(x)$ — k-кратная свертка функции $F_l(x)$ с собой (т. е. функция распределения суммарной длины $k+1$ последовательных интервалов между событиями в т. п. Π_l).

Так как

$$F_l(x) = \alpha_l x + o(x), \ x \to 0,$$

заключаем, что

$$F_l^{(k)}(x) = \frac{\alpha_l^{k+1} \ x^{k+1}}{(k+1)!} + o(x^{k+1}), \ x \to 0. \tag{5}$$

Сопоставляя (3), (4) и (5) заключаем, что

$$v_k^l(t) = \frac{\sigma_l \ \alpha_l^{k-1}}{k!} t^k + o(t^k), \ k > 0, t \to 0, \tag{6}$$

$$v_0^l(t) = 1 + o(1), \quad t \to 0.$$

Строгая положительность вероятностей $v_k^l(t)$ позволяет хорошо определить $M_k^l(t, \Delta)$ как условные математические ожидания числа событий т. п. Π_l, за интервал времени $(0, t)$ при условии, что за интервал времени $(-\Delta, 0)$ произошло ровно k событий т. п. Π_l. То же самое относится и к условному математическому ожиданию $M_k(t, \Delta)$, определенному ранее.

По теореме об условных математических ожиданиях имеем

$$M_k(t, \Delta) = \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_n = k} \frac{v_{j_1}^1(\Delta) \cdot v_{j_2}^2(\Delta) \cdots v_{j_n}^n(\Delta)}{\omega_k(\Delta)} \sum_{l=1}^n M_{j_l}^l(t, \Delta), \tag{7}$$

где

$$\omega_k(\Delta) = \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_n = k} v_{j_1}^1(\Delta) \ v_{j_2}^2(\Delta) \cdots v_{j_n}^n(\Delta)$$

есть вероятность того, что на интервале длины Δ появится k событий суммарного т. п. Π.

Стационарность и рекуррентность т. п. Π_l, влечет существование пределов

$$\lim_{\Delta \to 0} M_{j_l}^l(t, \Delta) = \begin{cases} \sigma_l \, t & \text{при} \quad j_l = 0 \\ m_l(t) & \text{при} \quad j_l \neq 0, \end{cases} \tag{8}$$

а с помощью (6) находятся пределы

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{v_{j_1}^1(\Delta) \cdots v_{j_n}^n(\Delta)}{\omega_k(\Delta)} = \frac{1}{\omega_k} \prod_{l, \, j_l \neq 0} \frac{\sigma_l \, \alpha_l^{j_l - 1}}{j_l!}. \tag{9}$$

Легко видеть, что из (8) и (9) следует утверждение теоремы 2.

2. Допущение, что т. п. П принадлежит классу $\mathfrak{M}$, как легко видеть, означает, что существует такое r, что

$$M_k(t) = M_r(t) \text{ для всех } k \geqslant r. \tag{10}$$

Если все α_i отличны от нуля, теорема 1 позволяет установить бесконечное число связей между функцией $M_r(t)$ и функциями восстановления компонент $m_i(t)$.

Действительно, учитывая (10) из теоремы 2 для $k \geqslant r$ получаем

$$M_r(t) = \sum_{j_1+\cdots+j_n=k} P_{j_1,\ldots,j_n} \sum_{i=1}^{n} \hat{m}_{j_i}(t)$$

или более подробно

$$\omega_k M_r(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m} \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_m} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k \\ l_1, l_2, \ldots, l_m \neq 0}} \frac{\alpha_{i_1}^{l_1-1}}{l_1!}\cdots\frac{\alpha_{i_m}^{l_m-1}}{l_m!} \tag{11}$$

$$[m_{i_1}(t) + m_{i_2}(t) + \cdots + m_{i_m}(t) + (1-\sigma_{i_1}-\cdots-\sigma_{i_m})\,t].$$

Поясним, что в (11) индекс m имеет смысл числа компонент, давших положительный вклад в k событий т. п. П происшедших в начале интервала $(0, t)$; $i_1, \cdots, i_m$ — суть номера компонент сделавших такой вклад, а l_j — размер ненулевого вклада т. п. Π_{i_j}, $j = 1\cdots m$; интенсивность т. п. П положена равной единице.

Очевидно, что ω_k равно сумме коэффициентов перед квадратными скобками в правой части (11).

Помножим уравнение (11) на z^k и просуммируем от r до ∞.

Исходя из тождества

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k \\ l_1, l_2, \ldots, l_m \neq 0}} \frac{\alpha_{i_1}^{l_1-1}\cdots\alpha_{i_m}^{l_m-1}}{l_1!\cdot\cdots\cdot l_m!} = \frac{(e^{\alpha_{i_1} z}-1)(e^{\alpha_{i_2} z}-1)\cdots(e^{\alpha_{i_m} z}-1)}{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_m}}$$

устанавливаем, что

$$\sum_{k=r}^{\infty} z^k \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k \\ l_1, l_2, \ldots, l_m \neq 0}} \frac{\alpha_{i_1}^{l_1-1}\cdots\alpha_{i_m}^{l_m-1}}{l_1!\cdots l_m!} = \frac{(e^{\alpha_{i_1} z}-1)\cdots(e^{\alpha_{i_m} z}-1) - \pi_{i_1\ldots i_m}(z)}{\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_m}},$$

где $\pi_{i_1\ldots i_m}(z)$ есть многочлен степени r.

Система уравнений (11) заменяется, таким образом, одним соотношением, выполняемым тождественно по z:

$$M_r(t) \sum_{m=1}^{n} \sum_{i_1+i_2+\cdots i_m} \frac{\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_m}}{\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_m}} [(e^{\alpha_{i_1} z}-1)\cdots(e^{\alpha_{i_m} z}-1) - \pi_{i_1\ldots i_m}(z)] =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m} \frac{\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_m}}{\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_m}} [m_{i_1}(t)+\cdots+m_{i_m}(t)+(1-\sigma_{i_1}-\cdots-\sigma_{i_m})t]\cdot$$

$$\cdot[(e^{\alpha_{i_1} z}-1)\cdots(e^{\alpha_{i_m} z}-1) - \pi_{i_1\ldots i_m}(z)]. \tag{12}$$

Допустим теперь, что выполняется условие б), определяющее класс $\bar{R}^n$. Тогда, сравнивая коэффициенты слева и справа в (12) при функциях $e^{z\sum_1^n a_k z - a_i z}$ $(i = 1, \cdots n)$ и $e^{z\sum_1^n a_i}$ приходим к системе линейных уравнений

$$M_r(t) = m_i(t) + (1 - \alpha_i)\, t \quad i = 1, \cdots n$$

$$M_r(t) = m_1(t) + m_2(t) + \cdots + m_n(t),$$

единственное решение которого есть

$$m_i(t) = \alpha_i t$$

$$M_r(t) = t.$$

Как известно, линейные функции восстановлении определяют в классе R пуассоновские т. п. Следовательно, т. п. Π_i, $i = 1 \cdots n$ являются т. п. Пуассона, а вместе с ними т. п. Пуассона является и их суперпозиция.

Теорема 1 доказана.

В заключение отметим, что если точки роста функции распределения $F(x)$ и сосредоточены на интервале (a, b), причем

$$0 < a \leqslant b < \infty, \; b < 2a,$$

то точечный процесс

$$\Pi = \Pi_1 * \Pi_2, \; \Pi_1, \; \Pi_2 \in R,$$

где Π_1 и Π_2 отвечают $F(x)$, принадлежит классу $\mathfrak{M}$ причем порядок марковской последовательности интервалов в т. п. Π не превосходит двух.

В этом случае не выполняется дополнительное условие а), определяющее класс $\bar{R}^2$; именно имеем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Было бы интересно выяснить насколько существенным для справедливости теоремы 1 является выполнение условий б).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Պուասսոնի կետային պրոցեսների բնորոշումը անկախ ռեկուրենտ կոմպոնենտների գոյության տերմիններով

Ենթադրենք, որ Π ստացիոնար կետային պրոցեսը հանդիսանում է n անկախ ռեկուրենտ պրոցեսների վերադրում։ Հոդվածում ցույց է տրվում, որ եթե Π պրոցեսի պատահարների միջև ընկած իրար հաջորդող ինտերվալները կազմում են վերջավոր կարգի մարկովյան հաջորդակա-

Նություն և բավարարվում են a) և б) լրացուցիչ պայմանները, ապա Π-ն անհրաժեշտ հանդիսանում է Պուասոնի պրոցես։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Дж. А. Мак-фадден*, On the lengths of intervals in a statronary point process J. R. Statist. Soc. B, 24, 364—382, 1962. [2] *Р. В. Амбарцумян*, Two Inverse Problems, Concerning the Syperposition of Recurrent Point Processes, J. Appl. Prob. 2, 449—454, (1965). [3] *А. Я. Хинчин*, Математические методы теории массового обслуживания. Труды математического института им. Стеклова, т. 49, 1955.