ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLIV 1967 1

МАТЕМАТИКА

Л. А. Петросян

Динамическая игра преследования при наличии сил трения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 24/IX 1966)

Преследование происходит на плоскости. Две частицы—преследователь P и преследуемый E с единичными массами в начальный момент времени находятся в точках q и r и обладают импульсами p и s соответственно. Игроки P и E перемещаются в R^2, имея возможность в каждый момент времени изменять направление прилагаемых сил, величины которых мы будем предполагать постоянными по модулю. На частицы P и E, кроме того действует сила трения обратно пропорциональная их скорости (ср. с игрой преследования рассмотренной в ([1])). Продолжительность игры ограничена числом $T>0$. Пусть $z(T)=(q(T), p(T), r(T), s(T))$ состояние системы в момент времени T; тогда целью P является максимизация величины

$$U[z(T)] = -\{[q_1(T)-r_1(T)]^2+[q_2(T)-r_2(T)]^2\},$$

а игрок E преследует противоположную цель.

Дадим формальное определение игры.

Пусть **F** и **I** множества вектор-функций

$$\varphi(z, T) = [\varphi_1(z, T), \varphi_2(z, T)]$$

и

$$\psi(z, T) = [\psi_1(z, T), \psi_2(z, T)],$$

обладающих следующими свойствами

1. $\varphi_1^2+\varphi_2^2=\Phi^2$, $\Phi=\mathrm{const}$,
2. $\psi_1^2+\psi_2^2=\Psi^2$, $\Psi=\mathrm{const}$.
3. При любых $\varphi\in$ **F** и $\psi\in$ **I** система уравнений

$$\begin{aligned} \dot q_i &= p_i \\ \dot r_i &= s_i \\ \dot p_i &= \varphi_i(z, T) - k_P p_i, \quad k_P=\mathrm{const}, \\ \dot s_i &= \psi_i(z, T) - k_E s_i, \quad k_E=\mathrm{const}, \\ &(i=1, 2) \end{aligned} \tag{1}$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях z^0.

Множества F и I представляют собой множества стратегий игроков P и E. В ситуации (φ, ψ), $\varphi \in F$ и $\psi \in I$ функция выигрыша определяется следующим образом. Пусть $z(t)$ решение системы уравнений (1) при начальном условии z^0. Тогда

$$K(z^0; \varphi, \psi) = U[z(T)],$$

где $T > 0$ предписанная заранее продолжительность игры.

Обозначим получившуюся таким образом игру через $\Gamma(z^0, T)$.

Пусть далее

$$V(z, T) = \mathrm{Val}\, K(z; \varphi, \psi)$$

функция значения игры $\Gamma(z, T)$.

Пользуясь стандартным методом, изложенным в ([2]), ([3]), выводим уравнение в частных производных первого порядка, которому должна удовлетворять функция $V(z, T)$ при начальном условии

$$V(z, T)|_{T=0} = -\left[\sum_{i=1}^{2} (q_i - r_i)^2\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i} p_i + \frac{\partial V}{\partial r_i} s_i\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p_i} k_p p_i + \frac{\partial V}{\partial s_i} p_E s_i\right) -$$

$$- \Phi\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p_i}\right)^2\right]^{1/2} + \Psi\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial V}{\partial s_i}\right)^2\right]^{1/2} = 0 \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = V_{q_i},\ \frac{\partial V}{\partial p_i} = V_{p_i},\ \frac{\partial V}{\partial s_i} = V_{s_i},\ \frac{\partial V}{\partial r_i} = V_{r_i},\ \frac{\partial V}{\partial T} = V_T,$$

Характеристики уравнения (3) являются оптимальными траекториями в игре преследования. Уравнения характеристик имеют вид (см. ([4])).

$$\begin{aligned}
&\dot q_i = p_i, && \dot V_{q_i} = 0\\
&\dot p_i = \Phi \frac{V_{p_i}}{\sqrt{V_{p_1}^2 + V_{p_2}^2}}, && \dot V_{p_i} = -V_{q_i} + k_P V_{p_i},\\
& && \dot V_{r_i} = 0,\\
&\dot r_i = s_i, && \dot V_{s_i} = -V_{r_i} + k_E V_{r_i},\\
&\dot s_i = -\Psi \frac{V_{s_i}}{\sqrt{V_{s_1}^2 + V_{s_2}^2}}, && \dot V_T = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

$$(i = 1, 2).$$

Решая уравнение (3) при начальном условии (2) методом характеристик мы получим, что

$$V(q_i, r_i, p_i, s_i, T) =$$

$$= -\left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(q_i - r_i + p_i \frac{e^{-k_P T} - 1}{k_P} - s_i \frac{e^{-k_E T} - 1}{k_E} \right)^2} - \right.$$

$$\left. - \left(\Phi \frac{e^{-k_P T} + k_P T - 1}{k_P^2} - \Psi \frac{e^{-k_E T} + k_E T - 1}{k_E^2} \right) \right\}. \qquad (5)$$

Оптимальные стратегии в игре $\Gamma(z, T)$ имеют вид

$$\dot{\varphi}_i = \Phi \frac{V_{p_i}}{\sqrt{V_{p_1}^2 + V_{p_2}^2}}, \quad \dot{\psi}_i = \frac{-\Psi V_{s_i}}{\sqrt{V_{s_1}^2 + V_{s_2}^2}} \quad (*)$$

$$i = 1, 2,$$

где $V(z, T)$ определяется по формуле (5).

Положим далее

$$\sum_{i=1}^{2}\left(q_i - r_i + p_i \frac{e^{-k_P T} - 1}{k_P} - s_i \frac{e^{-k_E T} - 1}{k_E} \right)^2 > 0. \qquad (6)$$

В области фазового пространства, удовлетворяющего условию (6)

$$V_{p_1}^2 + V_{p_2}^2 \neq 0$$

$$V_{s_1}^2 + V_{s_2}^2 \neq 0 \qquad (7)$$

и игра $\Gamma(z, T)$ имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях, которые определяются по формулам (*).

Для решения задачи о скорейшем попадании на многообразие

$$\sum_{i=1}^{2} (q_i - r_i)^2 = e$$

необходимо решить уравнение

$$\left[\sum_{i=1}^{2}\left(q_i - r_i + p_i \frac{e^{-k_P T} - 1}{k_P} - s_i \frac{e^{-k_E T} - 1}{k_E} \right)^2\right]^{1/2} -$$

$$- \left(\Phi \frac{e^{-k_P T} + k_P T - 1}{k_P^2} - \Psi \frac{e^{-k_E T} + k_E T - 1}{k_E^2} \right) = e$$

относительно T, как функции от z (найти наименьший корень).

Геометрическая интерпретация решения. Пусть точка q перемещается согласно закону

$$\dot{q}_1 = p_1,$$

$$\dot{q}_2 = p_2,$$

$$\dot{p}_1 = \Phi \sin \theta - k_P p_1,$$

$$\dot{p}_2 = \Phi \cos \theta - k_P p_2,$$

из точки q°, p°. Можно показать, что при различных углах $0 \leq \theta \leq 2\pi$ геометрическое место точек на плоскости, в которое попадает точка q за время T представляет собой окружность с радиусом

$$R_P = \frac{\Phi(e^{-k_P T} + k_P T - 1)}{k_P^2}$$

и с центром в точке

$$q = q^\circ + p^\circ \frac{e^{-k_P T} - 1}{k_P}.$$

Будем называть эту окружность окружностью действия преследователя P и обозначать C_P.

Аналогично радиус окружности действия преследуемого E, C_E, равен

$$R_E = \frac{\Psi(e^{-k_E T} + k_E T - 1)}{k_E^2}$$

и центр ее расположен в точке

$$r = r^\circ + s^\circ \frac{e^{-k_E T} - 1}{k_E}.$$

Пусть a расстояние между центрами окружностей действия C_P и C_E игроков P и E, т. е.

$$a = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(q_i - r_i + p_i \frac{e^{-k_P T} - 1}{k_P} - s_i \frac{e^{-k_E T} - 1}{k_E}\right)^2},$$

тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. *Значение игры $\Gamma(z, T)$ в области, определяемой условием* (7) (*несовпадение центров окружностей действия игроков в процессе игры*) *равно*

$$V(z, T) = R_P - (R_E + a).$$

Доказательство немедленно следует из вида функции значения игры (см. (5)).

При выполнении условия

$$\Phi - \Psi > 0$$

ускорение P превосходит ускорение преследуемого E и круг действия преследователя C_P превосходит круг действия преследуемого C_E. Поэтому невыполнение условия (7) будет означать, что в какой-то момент времени круг действия преследователя будет содержать (накроет) круг действия преследуемого, что при оптимальной игре со стороны P приведет к поимке (0—поимке) преследуемого E за время меньшее чем T, то есть до момента окончания игры. Очевидно, что такая партия является проигрышной для E и он не допустит попадания точки z в область фазового пространства, в котором условие (7) нарушается. Таким образом при „разумной игре“ точка z всегда будет находиться в области, удовлетворяющей условию (7).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Լ. Ա. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Հետապնդման մի դինամիկ խաղ շփման ուժերի ազդեցության տակ

Դիտարկվում է հետևյալ անտագոնիստիկ դիֆերենցիալ խաղը։ P և E խաղացողները շարժվում են հարթության մեջ շփման ուժերի ազդեցության տակ։ Խաղի տևողությունն է $T>0$։ P հետապնդողի նպատակն է մինիմացնել իրեն և E-ի միջև եղած հեռավորությունը խաղի ավարտման մոմենտին։

Գտնվում են խաղի արժեքը և օպտիմալ խաղակերպերը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Петросян, Н. В. Мурзов*, ДАН СССР. Т. 172, вып. 6, 1967. [2] *R. Isaaks*. Differential games, IV-V, 1965. [3] *Л. А. Петросян*, ДАН АрмССР. т. 40, № 4 (1965). [4] *Р. Курант*, Уравнения с частными производными, М., 1964.