Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 5, 2025, стр. 46 – 58.

ПОЛНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВЫВЕДЕННЫЕ ИЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТОЖДЕСТВ

М.-Ф. ЧЕН, С.-М. ХУАН

Гуандунский университет иностранных языков, Гуанчжоу, КНР[1]
Гуандунский технологический университет, Гуанчжоу, КНР
E-mails: *chenminfeng198710@126.com; mahuangxm@gdut.edu.cn*

АННОТАЦИЯ. В данной работе мы изучаем все решения нелинейных дифференциальных уравнений, связанных с тригонометрическими тождествами. Наши результаты улучшают результаты, полученные Чжаном и др. (Appl. Math. J. Chin. Univ. 28(2): 138–146, 2013) и Гундерсеном и др. (J. Math. Anal. Appl. 507: 125788, 2022). Кроме того, мы подтверждаем некоторые гипотезы, выдвинутые Гао и др. (Mediterr. J. Math. 20: 167, 2023). Наконец, ставим некоторые открытые вопросы.

MSC2020 numbers: 34M05; 30D35.

Ключевые слова: Теория Неванлинна; полное решение; нелинейное дифференциальное уравнение.

1. Введение и основные результаты

Для комплексных дифференциальных уравнений важной и сложной задачей является доказательство существования их решений. В 2004 году Ян и Ли [1] показали, что дифференциальное уравнение $4f^3 + 3f'' = -\sin 3z$, полученное из тригонометрического тождества $\sin 3z = 3\sin z - 4(\sin z)^3$, имеет ровно три полных решения, а именно $f_1(z) = \sin z$, $f_2(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos z - \frac{1}{2}\sin z$ и $f_3(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z - \frac{1}{2}\sin z$. Впоследствии Ли [2] получил более общий результат.

Теорема A.[2] *Пусть $n \geq 2$ — целое число, $P(z, f)$ — дифференциальный многочлен в $f(z)$ со степенью не более $n-2$, а $p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2$ — ненулевые константы, причем $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Если $f(z)$ является трансцендентным мероморфным решением следующего уравнения*

$$f^n(z) + P(z, f) = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}, \tag{1.1}$$

[1]Исследование было поддержано Национальным фондом естественных наук Китая (№ 12001117, 12101138), Фондом фундаментальных и прикладных фундаментальных исследований провинции Гуандун (№ 2021A1515110654).

и удовлетворяет условию $N(r,f) = S(r,f)$, *то выполняется одно из следующих условий:*

(i) $f(z) = \gamma_0(z) + \gamma_1 e^{\alpha_1 z/n}$;

(ii) $f(z) = \gamma_0(z) + \gamma_2 e^{\alpha_2 z/n}$;

(iii) $f(z) = \gamma_1 e^{\alpha_1 z/n} + \gamma_2 e^{\alpha_2 z/n}$ *и* $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$,

где $\gamma_0(z)$ *— малая функция от* $f(z)$, *а* γ_1, γ_2 *— константы, удовлетворяющие условию* $\gamma_i^n = p_i, i = 1, 2$.

В последнее время многие ученые уделяют внимание изучению мероморфных решений нелинейного дифференциального уравнения (1.1), см. [3] – [8]. В 2013 году Чжан и Йи [9] получили следующие результаты, связанные с хорошо известным тригонометрическим тождеством $(\sin^2 z)' = \sin 2z$.

Теорема Б.[9] *Пусть* $k \geq 1$ *— целое число,* $p(z)$ *- многочлен. Дифференциальное уравнение*

$$(f^2(z))^{(k)} = \sin 2z + p(z), \tag{1.2}$$

имеет полные решения следующих форм:

$$f_{1,2}(z) = \pm 2^{\frac{1-k}{2}} \cos\left(z - \frac{k+1}{4}\pi\right), f_{3,4}(z) = \pm i 2^{\frac{1-k}{2}} \sin\left(z - \frac{k+1}{4}\pi\right)$$

тогда и только тогда, когда $p(z) \equiv 0$.

Кроме того, они рассмотрели нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$(f^n(z))^{(k)} = \sin mz + p(z), \tag{1.3}$$

где $n \geq 3$, k и m — положительные целые числа, $p(z)$ — многочлен. Они получили

Теорема В.[9] *Не существует мероморфных решений уравнения* (1.3).

Заметим, что $\sin mz$ является линейной комбинацией e^{imz} и e^{-imz}. С этой точки зрения мы докажем следующие два результата, которые являются обобщениями теорем Б и В соответственно.

Теорема 1.1. *Пусть* $k \geq 1$ *— целое число,* p_j, α_j $(j = 1, 2)$ *— ненулевые константы,* $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $p(z)$ *— многочлен. Если* $f(z)$ *— трансцендентное мероморфное решение следующего уравнения*

$$(f^2(z))^{(k)} = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z} + p(z), \tag{1.4}$$

тогда $p(z) \equiv 0$ *и выполняется одно из следующих условий:*

(i) $f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{2} z}$, $\alpha_1 = 2\alpha_2$, $\gamma_0^2 = \frac{2^{2k-2} p_2^2}{p_1 \alpha_1^k}$, $\gamma_1^2 = \frac{p_1}{\alpha_1^k}$;

(ii) $f(z) = \gamma_0 + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{2} z}$, $\alpha_2 = 2\alpha_1$, $\gamma_0^2 = \frac{2^{2k-2} p_1^2}{p_2 \alpha_2^k}$, $\gamma_2^2 = \frac{p_2}{\alpha_2^k}$;

(iii) $f(z) = \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{2} z} + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{2} z}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\gamma_j^2 = \frac{p_j}{\alpha_j^k}$, $j = 1, 2$.

Теорема 1.2. *Не существует мероморфных решений уравнения*

$$(f^n(z))^{(k)} = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z} + p(z), \tag{1.5}$$

где $n \geq 3$, k — положительные целые числа, p_j, α_j $(j = 1, 2)$ — ненулевые константы, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $p(z)$ — многочлен.

В 2022 году Гундерсен и др. [10] рассмотрели полные решения биномиального дифференциального уравнения, которое связано с известным тригонометрическим тождеством $\cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z$.

Теорема Г.[10] *Единственные полные решения дифференциального уравнения*

$$(f(z))^2 - (f'(z))^2 = \cos 2z \tag{1.6}$$

являются следующие четыре решения $f(z) = \pm\cos z, \pm\sin z$.

Вскоре после этого Гао и др. [11] исследовали более общее биномиальное дифференциальное уравнение, чем (1.6) , и получили следующий результат.

Теорема Д. [11] *Пусть a, p_1, p_2 и λ — ненулевые константы, удовлетворяющие условию $9a\lambda^2 + 4 \neq 0$. Тогда уравнение*

$$(f(z))^2 + a(f'(z))^2 = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z} \tag{1.7}$$

имеет полные решения тогда и только тогда, когда выполняется условие $a\lambda^2 + 1 = 0$ или $a\lambda^2 - 4 = 0$. Кроме того,

(i) Если $a\lambda^2 + 1 = 0$, то полными решениями уравнения (1.7) являются

$$f(z) = r_i e^{\lambda z} + s_i e^{-\lambda z} + t_i,$$

где $t_i (i = 1, 2, 3, 4)$ — четыре корня уравнения $t^4 + p_1 p_2 = 0$, $r_i = \frac{p_1}{2t_i}$ и $s_i = \frac{p_2}{2t_i}$.

(ii) Если $a\lambda^2 - 4 = 0$, то полными решениями уравнения (1.7) являются

$$f(z) = a_i e^{\frac{\lambda}{2} z} + b_j e^{-\frac{\lambda}{2} z},$$

где $a_i (i = 1, 2)$ являются квадратными корнями из $\frac{p_1}{2}$ и $b_j (j = 1, 2)$ — квадратные корни из $\frac{p_2}{2}$.

Примечание 1.1. Условие $9a\lambda^2 + 4 \neq 0$ в Теореме Д является необходимым. Например, пусть $a = -1$ и $\lambda = \frac{2}{3}$ в $9a\lambda^2 + 4 = 0$. Тогда $f(z) = \pm(e^{\frac{1}{3}z} + e^{-z})$ являются решениями уравнения $(f(z))^2 - (f'(z))^2 = \frac{8}{9} e^{\frac{2}{3}z} + \frac{8}{3} e^{-\frac{2}{3}z}$. Они выдвинули следующую гипотезу.

Гипотеза Е.[11] *Полные решения уравнения*

$$(f(z))^2 - \frac{4}{9\lambda^2}(f'(z))^2 = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z} \tag{1.8}$$

являются $f_i(z) = a_i e^{\frac{\lambda}{2}z} + b_i e^{-\frac{3\lambda}{2}z}$ *и* $f_j(z) = a_j e^{-\frac{\lambda}{2}z} + b_j e^{\frac{3\lambda}{2}z}$*, где* λ, p_1, p_2 *— ненулевые константы,* a_i *— квадратные корни из* $\frac{9}{8}p_1$*,* $b_i = \frac{p_2}{3p_1}a_i$*,* $i = 1,2$ *и* b_j *— квадратные корни из* $\frac{9}{8}p_2$*,* $a_j = \frac{p_1}{3p_2}b_j$*,* $j = 3,4$.

Кроме того, в конце они выдвинули еще одно предположение. [11].

Гипотеза Ж.[11] *Пусть* $n \geq 5$*,* k *— положительные целые числа,* a, p_i *и* $\alpha_i (i = 1,2)$ *— ненулевые константы с* $\alpha_1 \neq \alpha_2$*. Тогда* $(f(z))^n + a(f^{(k)}(z))^n = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}$ *не существует полного решения.*

В данной статье мы исследуем две гипотезы, подтверждаем гипотезу Е и частично доказываем гипотезу Ж.

Теорема 1.3. *Полные решения уравенения* (1.8) *являются* $f(z) = \mu_1 e^{\frac{\lambda}{2}z} + \mu_2 e^{-\frac{3\lambda}{2}z}$ *и* $f(z) = \nu_1 e^{-\frac{\lambda}{2}z} + \nu_2 e^{\frac{3\lambda}{2}z}$*, где* $\mu_1^2 = \frac{9}{8}p_1$*,* $\mu_1\mu_2 = \frac{3}{8}p_2$*, и* $\nu_1^2 = \frac{9}{8}p_2$*,* $\nu_1\nu_2 = \frac{3}{8}p_1$.

Теорема 1.4. *Пусть* $n \geq 4$ *— целое число,* a, λ *и* $p_i (i = 1,2)$ *— ненулевые константы. Тогда уравнение*

$$(f(z))^n + a(f'(z))^n = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z} \tag{1.9}$$

имеет полные решения тогда и только тогда, когда $n = 4$*. Более того,* $f(z)$ *имеет вид* $f(z) = \gamma_1 e^{\frac{\lambda}{2}z} + \gamma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}z}$*, где* $\lambda^4 = -\frac{16}{a}$*,* γ_1, γ_2 *— константы , удовлетворяющие* $8\gamma_1^3\gamma_2 = p_1$*,* $8\gamma_1\gamma_2^3 = p_2$.

Примечание 1.2. Из Теоремы 1.4, видно, что наш результат обобщает Теорему 7 из [11] и частично является ответом на гипотезу Ж. Но, к сожалению, мы не рассматриваем случай, когда $n = 3$, поскольку его невозможно доказать нашим методом. Однако мы подозреваем, что для этого случая не существует полного решения. Здесь мы выдвигаем следующую гипотезу.

Гипотеза 1.1. *Пусть* k *— положительное целое число,* a, λ *и* $p_i (i = 1,2)$ *— ненулевые константы. Тогда не существует полного решения уравнения* $(f(z))^3 + a(f^{(k)}(z))^3 = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z}$.

В сочетании с Теоремой 1.4, мы также предлагаем следующую гипотезу.

Гипотеза 1.2. *Пусть* $n \geq 5$*,* k *— положительные целые числа,* a, p_i *и* $\alpha_i (i = 1,2)$ *— ненулевые константы с* $\alpha_1 \pm \alpha_2 \neq 0$*. Тогда не существует полного решения уравнения* $(f(z))^n + a(f^{(k)}(z))^n = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}$.

Наконец, рассмотрим следующее уравнение:

$$(f(z))^3 + a(f^{(k)}(z))^3 = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}, \tag{1.10}$$

где k — положительное целое число, a, p_i и $\alpha_i (i = 1,2)$ — ненулевые константы с $\alpha_1 \pm \alpha_2 \neq 0$.

Пример 1.1. $f(z)=e^{(-1+\sqrt{3}i)z}+e^{2z}$ является полным решением

$$(f(z))^3-\frac{1}{8}(f'(z))^3=\frac{3(3+\sqrt{3}i)}{2}e^{2\sqrt{3}iz}+\frac{3(3-\sqrt{3}i)}{2}e^{(3+\sqrt{3}i)z}.$$

Пример 1.2. $f(z)=e^{(1+\sqrt{3}i)z}+e^{2z}$ является полным решением

$$(f(z))^3-\frac{1}{64}(f''(z))^3=\frac{3(3+\sqrt{3}i)}{2}e^{(4+2\sqrt{3}i)z}+\frac{3(3-\sqrt{3}i)}{2}e^{(5+\sqrt{3}i)z}.$$

Рассматривая два приведенных выше примера, мы видим, что уравнение (1.10) имеет полное решение. Исходя из этого, мы задаем следующий вопрос.

Вопрос 1.1. *Как найти все полные решения уравнения* (1.10)*?*

В данной статье мы в основном используем теорию Неванлинны для доказательства наших результатов. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными результатами и стандартными обозначениями теории Неванлинны [12] – [14], такими как $T(r,f)$, $m(r,f)$, $N(r,f)$ и т.д. Для простоты обозначим через $S(r,f)$ любую величину, удовлетворяющую условию $S(r,f)=o(T(r,f))$, при $r\to\infty$, за исключением, возможно, множества конечной логарифмической меры. Также через $\rho(f)$ обозначим порядок полной функции f.

2. Некоторые Леммы

Лемма 2.1. *(*[15, Лемма 2.4]*) Пусть $n\geq 2$ — целое число, α_j $(j=1,2)$ — различные ненулевые константы, а p_j $(j=1,2)$ — ненулевые мероморфные функции. Тогда уравнение*

$$f^n(z)=p_1e^{\alpha_1 z}+p_2e^{\alpha_2 z}$$

не может иметь мероморфного решения f такого, что $T(r,p_j)=S(r,f)$ $(j=1,2)$.

Лемма 2.2. *(*[16, Теорема 1.51]*) Предположим, что $f_1,f_2,\ldots,f_n (n\geq 2)$ являются мероморфными функциями, и $g_1,g_2,\ldots,g_n$ — полными функциями, удовлетворяющими следующим условиям:*

(1) $\sum\limits_{j=1}^{n} f_je^{g_j}\equiv 0.$

(2) *g_j-g_k не являются константами для $1\leq j<k\leq n$.*

(3) *Для $1\leq j\leq n, 1\leq h<k\leq n$,*

$$T(r,f_j)=o(T(r,e^{g_h-g_k}))\ (r\to\infty, r\notin E),$$

где $E\subset(1,\infty)$ — множество конечной линейной меры или конечной логарифмической меры.

Тогда $f_j\equiv 0$ $(j=1,\ldots,n)$.

Лемма 2.3. *([13, Следствие 2.3.4]) Пусть $f(z)$ — трансцендентная мероморфная функция, а $k \geq 1$ — целое число. Тогда*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f),$$

и если f имеет конечный порядок роста, то

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

Лемма 2.4. *([13, Предположение 5.1]) Пусть $P(z)$ — многочлен степени n, тогда все нетривиальные решения $f(z)$ уравнения*

$$f''(z) + P(z)f(z) = 0$$

имеют порядок роста $\rho(f) = \frac{n+2}{2}$.

3. Доказательство Теоремы 1.1

Предположим, что f является мероморфным решением (1.4). Интегрируя (1.4) k раз, получаем

$$f^2(z) = \frac{p_1}{\alpha_1^k} e^{\alpha_1 z} + \frac{p_2}{\alpha_2^k} e^{\alpha_2 z} + q(z), \tag{3.1}$$

где $q(z)$ — многочлен. Из (3.1) следует, что $\rho(f) < \infty$ и

$$N(r, f) = \frac{1}{2} N(r, f^2) = \frac{1}{2} N\left(r, \frac{p_1}{\alpha_1^k} e^{\alpha_1 z} + \frac{p_2}{\alpha_2^k} e^{\alpha_2 z} + q(z)\right) = O(\log r).$$

Если $q(z) \equiv 0$, заметим, что $N(r, f) = 0$ и по Лемме 2.1, уравнение (3.1) не может иметь мероморфного решения f. Если $q(z) \not\equiv 0$, из Теоремы A следует, что решение уравнения (3.1) имеет три случая. Если $f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{2} z}$, $\alpha_1 = 2\alpha_2$, подставляя их в уравнение (3.1) получаем

$$\left(\gamma_1^2 - \frac{p_1}{\alpha_1^k}\right) e^{\alpha_1 z} + \left(2\gamma_0\gamma_1 - \frac{p_2}{\alpha_2^k}\right) e^{\frac{\alpha_1}{2} z} + \gamma_0^2 - q(z) = 0.$$

Из Леммы 2.2 следует, что $\gamma_1^2 = \frac{p_1}{\alpha_1^k}$, $2\gamma_0\gamma_1 = \frac{p_2}{\alpha_2^k}$ и $\gamma_0^2 = q(z)$. Тогда $q(z) = \gamma_0^2 = \frac{2^{2k-2} p_2^2}{p_1 \alpha_1^k}$, что означает, что $q(z)$ является константой, а $p(z) \equiv 0$. Если $f(z) = \gamma_0 + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{2} z}$, $\alpha_2 = 2\alpha_1$, то путем аналогичных вычислений получаем $\gamma_2^2 = \frac{p_2}{\alpha_2^k}$ и $q(z) = \gamma_0^2 = \frac{2^{2k-2} p_1^2}{p_2 \alpha_2^k}$, что означает, что $p(z) \equiv 0$. If $f(z) = \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{2} z} + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{2} z}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, то путем аналогичных вычислений получаем $\gamma_j^2 = \frac{p_j}{\alpha_j^k}$, $j = 1, 2$ и $2\gamma_1\gamma_2 = q(z)$, что означает, что $p(z) \equiv 0$.

4. Доказательство Теоремы 1.2

Предположим, что f является мероморфным решением (1.5). Интегрируя (1.5) k раз, получаем

$$f^n(z) = \frac{p_1}{\alpha_1^k} e^{\alpha_1 z} + \frac{p_2}{\alpha_2^k} e^{\alpha_2 z} + q(z), \tag{4.1}$$

где $q(z)$ является многочленом. Из (4.1) следует, что $\rho(f) < \infty$ и

$$N(r,f) = \frac{1}{n} N(r, f^n) = \frac{1}{n} N\left(r, \frac{p_1}{\alpha_1^k} e^{\alpha_1 z} + \frac{p_2}{\alpha_2^k} e^{\alpha_2 z} + q(z)\right) = O(\log r).$$

Если $q(z) \equiv 0$, то по Лемме 2.1 и учитывая, что $N(r,f) = 0$, уравнение (4.1) не может иметь мероморфного решения f. Если $q(z) \not\equiv 0$, то из Теоремы A следует, что решение уравнения (4.1) имеет три случая. Если $f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{n} z}$, $\gamma_1^n = \frac{p_1}{\alpha_1^k}$, подставляя их в уравнение (4.1) , получаем

$$\sum_{j=1}^{n-1} \binom{j}{n} \gamma_0^{n-j} \gamma_1^j e^{\frac{j\alpha_1}{n} z} - \frac{p_2}{\alpha_2^k} e^{\alpha_2 z} + \gamma_0^n - q(z) = 0.$$

Поскольку $n \geq 3$, то $\sum_{j=1}^{n-1} \binom{j}{n} \gamma_0^{n-j} \gamma_1^j e^{\frac{j\alpha_1}{n} z}$ содержит по крайней мере два члена. Из Леммы 2.2, следует, что по крайней мере один из $\binom{j}{n} \gamma_0^{n-j} \gamma_1^j e^{\frac{j\alpha_1}{n} z} (j = 1, 2, \cdots, n-1)$ равен нулю, а $\gamma_0^n = q(z)$, тогда $\gamma_0 \gamma_1 \equiv 0$. Заметим, что $\gamma_1^n = \frac{p_1}{\alpha_1^k} \neq 0$, тогда $q(z) = \gamma_0^n \equiv 0$, что невозможно. Если $f(z) = \gamma_0 + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{n} z}$, $\gamma_2^n = \frac{p_2}{\alpha_2^k}$, то по аналогичным вычислениям можно установить противоречие. Если $f(z) = \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{n} z} + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{n} z}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, подставляя эти выражения в уравнение (4.1) , получаем

$$\left(\gamma_1^n - \frac{p_1}{\alpha_1^k}\right) e^{\alpha_1 z} + \left(\gamma_2^n - \frac{p_2}{\alpha_2^k}\right) e^{\alpha_2 z} + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{j}{n} \gamma_1^j \gamma_2^{n-j} e^{\frac{j\alpha_1 + (n-j)\alpha_2}{n} z} - q(z) = 0.$$

Поскольку $n \geq 3$, тогда $\sum_{j=1}^{n-1} \binom{j}{n} \gamma_1^j \gamma_2^{n-j} e^{\frac{j\alpha_1 + (n-j)\alpha_2}{n} z}$ содержит по крайней мере два члена и по крайней мере один член $\frac{j_0\alpha_1 + (n-j_0)\alpha_2}{n} \neq 0, \alpha_1, \alpha_2$, $j_0 \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Из Леммы 2.2 следует, что $\gamma_1^n = \frac{p_1}{\alpha_1^k} \neq 0$, $\gamma_2^n = \frac{p_2}{\alpha_2^k} \neq 0$ и $\binom{j_0}{n} \gamma_1^{j_0} \gamma_2^{n-j_0} = 0$, что невозможно.

5. Доказательство Теоремы 1.3

Пусть f является полным решением уравнения (1.8). Дифференцирование (1.8) дает

$$ff' - \frac{4}{9\lambda^2} f' f'' = \frac{\lambda}{2}(p_1 e^{\lambda z} - p_2 e^{-\lambda z}). \tag{5.1}$$

Устраняя $e^{\lambda z}$ и $e^{-\lambda z}$ из (1.8) и (5.1), получаем

$$\frac{\lambda^2}{4} \left[f^2 - \frac{4}{9\lambda^2}(f')^2\right]^2 - (f')^2 \left(f - \frac{4}{9\lambda^2} f''\right)^2 = \lambda^2 p_1 p_2. \tag{5.2}$$

Перепишем (5.2) следующим образом

$$\frac{1}{4p_1p_2}\left[1-\frac{4}{9\lambda^2}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right]^2-\left(\frac{f'}{f}\right)^2\left(1-\frac{4}{9\lambda^2}\frac{f''}{f}\right)^2=\frac{1}{f^4}. \tag{5.3}$$

Из (5.3) и Леммы 2.3 следует, что $m(r,1/f)=S(r,f)$. Тогда имеем

$$T(r,f)=N(r,1/f)+S(r,f). \tag{5.4}$$

Дифференцируя (5.1) , получаем

$$(f')^2+ff''-\frac{4}{9\lambda^2}[(f'')^2+f'f''']=\frac{\lambda^2}{2}(p_1e^{\lambda z}+p_2e^{-\lambda z}). \tag{5.5}$$

Из (1.8) и (5.5) следует, что

$$f'\left(\frac{11}{9}f'-\frac{4}{9\lambda^2}f'''\right)=\frac{\lambda^2}{2}f^2-ff''+\frac{4}{9\lambda^2}(f'')^2. \tag{5.6}$$

Дифференцируя (5.5) , получаем

$$3f'f''+ff'''-\frac{4}{3\lambda^2}f''f'''-\frac{4}{9\lambda^2}f'f^{(4)}=\frac{\lambda^3}{2}(p_1e^{\lambda z}-p_2e^{-\lambda z}). \tag{5.7}$$

Из (5.1) и (5.7) следует, что

$$f'''\left(\frac{4}{3\lambda^2}f''-f\right)=f'\left(\frac{31}{9}f''-\frac{4}{9\lambda^2}f^{(4)}-\lambda^2 f\right). \tag{5.8}$$

Предположим, что z_0 является нулем $f'(z)$, из (5.8) следует, что $f'''(z_0)=0$ или $\frac{4}{3\lambda^2}f''(z_0)-f(z_0)=0$. Если $f'''(z_0)=0$ и $\frac{4}{3\lambda^2}f''(z_0)-f(z_0)=0$. Поскольку $\left(\frac{4}{3\lambda^2}f''-f\right)'(z_0)=\left(\frac{4}{3\lambda^2}f'''-f'\right)(z_0)=0$, то из (5.8) следует, что $f'(z)$ имеет кратное нулевое значение в z_0, что противоречит (5.1) , поскольку $p_1e^{\lambda z}-p_2e^{-\lambda z}$ имеет только простые нули. Если $f'''(z_0)=0$ и $\frac{4}{3\lambda^2}f''(z_0)-f(z_0)\neq 0$, то f'''/f' должна быть полной функцией. Применяя теорию Вимана-Вариона (см. Главы 3-4) из [13]) к (5.6), получаем $\rho(f)=1$. Обозначим $\mu=f'''/f'$. Тогда $T(r,\mu)=m(r,\mu)=S(r,f')=O(\log r)$, что означает, что μ является многочленом. Переписав $\mu=f'''/f'$ как $f'''-\mu f'=0$. По Лемме 2.4, имеем $\rho(f')=\frac{n+2}{2}$, где n -степень μ. Тогда $1=\rho(f)=\rho(f')=\frac{n+2}{2}$, следовательно, $n=0$, что означает, что μ является константой. Подставляя $f'''=\mu f'$ и $f^{(4)}=\mu f''$ в (5.8) , получаем

$$(\lambda^2-\mu)f+\frac{16\mu-31\lambda^2}{9\lambda^2}f''=0. \tag{5.9}$$

Если $\lambda^2=\mu$, то $16\mu-31\lambda^2=-15\lambda^2\neq 0$, что является противоречием. Если $\lambda^2\neq\mu$, то из (5.9) следует, что $\frac{16\mu-31\lambda^2}{9\lambda^2}\neq 0$. Поскольку $f'''=\mu f'$, получаем $f''=\mu f+\nu$. Подставляя это в (5.9) , получаем $\nu=0$. Из $f'''=\mu f'$, $f''=\mu f$ и (5.6), имеем, что

$$\left(\frac{\lambda^2}{2}-\mu+\frac{4\mu^2}{9\lambda^2}\right)f^2+\frac{4\mu-11\lambda^2}{9\lambda^2}(f')^2=0. \tag{5.10}$$

Из (5.4) следует, что

$$\frac{\lambda^2}{2} - \mu + \frac{4\mu^2}{9\lambda^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{4\mu - 11\lambda^2}{9\lambda^2} = 0,$$

что невозможно. Если $f'''(z_0) \neq 0$ и $\frac{4}{3\lambda^2} f''(z_0) - f(z_0) = 0$, то $\frac{\frac{4}{3\lambda^2} f'' - f}{f'}$ должна быть полной функцией. Установим $\tau = \frac{\frac{4}{3\lambda^2} f'' - f}{f'}$. Тогда $f'' = \frac{3\lambda^2}{4}(\tau f' + f)$ и $f''' = \frac{3\lambda^2}{4}\left[\left(\frac{3\lambda^2}{4}\tau^2 + \tau' + 1\right) f' + \frac{3\lambda^2}{4}\tau f\right]$. Подставляя эти выражения в (5.6) , получаем

$$(9\lambda^2\tau^2 + 6\tau' - 16)(f')^2 = 0. \tag{5.11}$$

Следовательно,

$$9\lambda^2\tau^2 + 6\tau' - 16 = 0. \tag{5.12}$$

Заметим, что $\rho(f) = 1$ и $\tau = \frac{\frac{4}{3\lambda^2} f'' - f}{f'}$, получаем $\rho(\tau) \leq 1$. Из (5.12) следует, что

$$2T(r,\tau) = T(r,\tau^2) = T\left(r, \frac{16 - 6\tau'}{9\lambda^2}\right) \leq T(r,\tau') + O(1) \leq T(r,\tau) + O(\log r).$$

Следовательно, τ должно быть многочленом. Тогда, по (5.12), мы приходим к выводу, что τ должно быть константой и $\tau = \pm\frac{4}{3\lambda}$. Если $\tau = -\frac{4}{3\lambda}$, тогда $f'' = \frac{3\lambda^2}{4} f - \lambda f'$, и его общим решением является $f(z) = \mu_1 e^{\frac{\lambda}{2}z} + \mu_2 e^{-\frac{3\lambda}{2}z}$. Подставляя это выражение в (1.8), получаем $\mu_1^2 = \frac{9}{8}p_1$, $\mu_1\mu_2 = \frac{3}{8}p_2$. Если $\tau = \frac{4}{3\lambda}$, тогда $f'' = \frac{3\lambda^2}{4} f + \lambda f'$, и его общим решением является $f(z) = \nu_1 e^{-\frac{\lambda}{2}z} + \nu_2 e^{\frac{3\lambda}{2}z}$. Подставляя это выражение в (1.8), получаем $\nu_1^2 = \frac{9}{8}p_2$, $\nu_1\nu_2 = \frac{3}{8}p_1$.

6. Доказательство Теоремы 1.4

Пусть f — трансцендентное полное решение уравнения (1.9). Дифференцирование (1.9) дает

$$nf^{n-1}f' + an(f')^{n-1}f'' = \lambda(p_1 e^{\lambda z} - p_2 e^{-\lambda z}). \tag{6.1}$$

Дифференцирование (6.1) дает

$$\begin{aligned} n(n-1)f^{n-2}(f')^2 + nf^{n-1}f'' + an(n-1)(f')^{n-2}(f'')^2 + an(f')^{n-1}f''' \\ = \lambda^2(p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z}). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Из (1.9) и (6.2) следует, что

(6.3)

$$a(f')^{n-2}[-\lambda^2(f')^2 + n(n-1)(f'')^2 + nf'f'''] = f^{n-2}[\lambda^2 f^2 - n(n-1)(f')^2 - nff''].$$

Дифференцируя (6.2) , получаем

(6.4)

$$\begin{aligned} &n(n-1)(n-2)f^{n-3}(f')^3 + 3n(n-1)f^{n-2}f'f'' + nf^{n-1}f''' + an(n-1)(n-2)\times \\ &\times (f')^{n-3}(f'')^3 + 3an(n-1)(f')^{n-2}f''f''' + an(f')^{n-1}f^{(4)} = \lambda^3(p_1 e^{\lambda z} - p_2 e^{-\lambda z}). \end{aligned}$$

Из (6.1) и (6.4) следует, что

(6.5)
$$f'[(n-1)(n-2)f^{n-3}(f')^2+3(n-1)f^{n-2}f''+a(n-1)(n-2)(f')^{n-4}(f'')^3$$
$$+a(f')^{n-2}f^{(4)}-\lambda^2(f^{n-1}+a(f')^{n-2}f'')]=-f'''[3a(n-1)(f')^{n-2}f''+f^{n-1}].$$

Предположим, что z_0 является нулем $f'(z)$, из (6.5) следует, что $f'''(z_0)=0$ или $[3a(n-1)(f')^{n-2}f''+f^{n-1}](z_0)=0$. Если $[3a(n-1)(f')^{n-2}f''+f^{n-1}](z_0)=0$, то $f(z_0)=0$. По (1.9), получаем противоречие. Тогда $f'''(z_0)=0$ и f'''/f' должна быть полной функцией. Применяя теорию Вимана-Вариона (см. Главы 3-4) из [13]) к (6.3), получаем $\rho(f)=1$. Теперь зададим $\kappa=f'''/f'$. Тогда $T(r,\kappa)=m(r,\kappa)=S(r,f')=O(\log r)$, что означает, что κ является многочленом. Перепишем $\kappa=f'''/f'$ как

$$f'''-\kappa f'=0. \tag{6.6}$$

По Лемме 2.4 имеем $\rho(f')=\frac{n+2}{2}$, где n — степень κ. Тогда $1=\rho(f)=\rho(f')=\frac{n+2}{2}$, следовательно, $n=0$, что означает, что κ является ненулевой константой. Подставляя (6.6) и $f^{(4)}=\kappa f''$ в (6.5) , получаем

(6.7)
$$f^{n-3}[(\kappa-\lambda^2)f^2+(n-1)(n-2)(f')^2]$$
$$=-f''[3(n-1)f^{n-2}+a((3n-2)\kappa-\lambda^2)(f')^{n-2}+a(n-1)(n-2)(f')^{n-4}(f'')^2].$$

Обозначим $g=f'$, из (6.6) следует, что $g''-\kappa g=0$. Тогда получаем

(6.8)
$$g=f'=\gamma_1e^{\sqrt{\kappa}z}+\gamma_2e^{-\sqrt{\kappa}z},\ f=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{\sqrt{\kappa}}e^{\sqrt{\kappa}z}-\frac{\gamma_2}{\sqrt{\kappa}}e^{-\sqrt{\kappa}z},\ f''=\sqrt{\kappa}(\gamma_1e^{\sqrt{\kappa}z}-\gamma_2e^{-\sqrt{\kappa}z}),$$

где $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ — константы. Из (1.9) следует, что $\gamma_1\gamma_2\neq 0$. Пусть z_1 — нуль функции $f(z)$. Можно проверить, что $f'(z_1)\neq 0$ по (1.9). Далее рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. Если $n=4$. Легко видеть, что нули $f(z)$ являются нулями $f''(z)$ или $6(f'')^2+(10\kappa-\lambda^2)(f')^2$ по (6.7). Предположим, что z_1 является нулем $6(f'')^2+(10\kappa-\lambda^2)(f')^2$. Если $10\kappa-\lambda^2=0$, то z_1 должно быть нулем $f''(z)$. Сравнивая порядок z_1 по обеим сторонам (6.7), получаем противоречие. Следовательно, $10\kappa-\lambda^2\neq 0$. Соответственно, $f''(z_1)\neq 0$ и $\gamma_0\neq 0$. В противном случае, если z_1 является нулем $f''(z)$, и заметим, что z_1 является нулем $6(f'')^2+(10\kappa-\lambda^2)(f')^2$, тогда $f'(z_1)=0$, что противоречит (1.9). Поскольку z_1 является нулем $6(f'')^2+(10\kappa-\lambda^2)(f')^2$, мы имеем либо $(f''+\nu f')(z_1)=0$ либо $(f''-\nu f')(z_1)=0$, где $\nu^2=\frac{\lambda^2-10\kappa}{6}\neq 0$. Если z_1 является нулем $f''+\nu f'$, обозначив $\mu=\frac{f''+\nu f'}{f}$, тогда $T(r,\mu)=O(\log r)$. Следовательно, μ должно быть многочленом, и $f'' = \mu f - \nu f'$. Из (6.8) следует, что

$$\sqrt{\kappa}(\gamma_1 e^{\sqrt{\kappa}z} - \gamma_2 e^{-\sqrt{\kappa}z}) = \mu\gamma_0 + \mu\left(\frac{\gamma_1}{\sqrt{\kappa}}e^{\sqrt{\kappa}z} - \frac{\gamma_2}{\sqrt{\kappa}}e^{-\sqrt{\kappa}z}\right) - \nu(\gamma_1 e^{\sqrt{\kappa}z} + \gamma_2 e^{-\sqrt{\kappa}z}).$$

Применив Лемму 2.2 к вышеуказанному уравнению, можно сделать вывод, что $\mu\gamma_0 = 0$. Заметим, что $\gamma_0 \neq 0$, тогда $\mu = 0$. Следовательно, $\sqrt{\kappa} = -\nu$ и $-\sqrt{\kappa} = -\nu$, то есть $\kappa = \nu = 0$, что невозможно. Если z_1 является нулем $f'' - \nu f'$, то аналогично получаем противоречие. Предположим, что z_1 является нулем $f''(z)$, тогда мы получаем $\gamma_0 = 0$ по (6.8). Подставляя (6.8) в (1.9) получим

$$\begin{aligned}(6.9)\qquad &\left(a + \frac{1}{\kappa^2}\right)\gamma_1^4 e^{4\sqrt{\kappa}z} + 4\gamma_1^3\gamma_2\left(a - \frac{1}{\kappa^2}\right)e^{2\sqrt{\kappa}z} + 6\gamma_1^2\gamma_2^2\left(a + \frac{1}{\kappa^2}\right)\\ &+ 4\gamma_1\gamma_2^3\left(a - \frac{1}{\kappa^2}\right)e^{-2\sqrt{\kappa}z} + \left(a + \frac{1}{\kappa^2}\right)\gamma_2^4 e^{-4\sqrt{\kappa}z} = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z}.\end{aligned}$$

Из (6.9) и Леммы 2.2 следует, что $6\gamma_1^2\gamma_2^2\left(a + \frac{1}{\kappa^2}\right) = 0$. Поскольку $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$, то $a\kappa^2 + 1 = 0$. Тогда уравнение (6.9) сводится к

$$4\gamma_1^3\gamma_2\left(a - \frac{1}{\kappa^2}\right)e^{2\sqrt{\kappa}z} + 4\gamma_1\gamma_2^3\left(a - \frac{1}{\kappa^2}\right)e^{-2\sqrt{\kappa}z} = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z}.$$

Если $\lambda = 2\sqrt{\kappa}$, тогда

$$f(z) = \frac{2}{\lambda}(\gamma_1 e^{\frac{\lambda}{2}z} - \gamma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}z}), \quad 8a\gamma_1^3\gamma_2 = p_1, \quad 8a\gamma_1\gamma_2^3 = p_2, \quad \lambda^4 = -\frac{16}{a}.$$

Если $\lambda = -2\sqrt{\kappa}$, тогда

$$f(z) = \frac{2}{\lambda}(\gamma_2 e^{\frac{\lambda}{2}z} - \gamma_1 e^{-\frac{\lambda}{2}z}) \quad 8a\gamma_1^3\gamma_2 = p_2 \quad 8a\gamma_1\gamma_2^3 = p_1 \quad \lambda^4 = -\frac{16}{a}.$$

Случай 2. Если $n \geq 5$. По (6.7), мы имеем либо $f''(z_1) = 0$ либо $[(n-1)(n-2)(f'')^2 + ((3n-2)\kappa - \lambda^2)(f')^2](z_1) = 0$. Предположим, что $[(n-1)(n-2)(f'')^2 + ((3n-2)\kappa - \lambda^2)(f')^2](z_1) = 0$. Если $(3n-2)\kappa - \lambda^2 = 0$, тогда z_1 должно быть нулем $f''(z)$. Из (6.8) следует, что $\gamma_0 = 0$, тогда $f'' = \kappa f$. Вместе с (6.7) это дает (6.10)

$$f^{n-3}[(\kappa-\lambda^2)f^2 + (n-1)(n-2)(f')^2] = -\kappa f^3[3(n-1)f^{n-4} + a(n-1)(n-2)\kappa^2(f')^{n-4}].$$

Если $n = 5$ или $n \geq 7$, то, сравнивая порядок z_1 по обеим сторонам (6.10), получаем противоречие. Если $n = 6$, то из $16\kappa - \lambda^2 = 0$ выводим, что $(3n-2)\kappa - \lambda^2 = 0$. Тогда (6.10) сводится к

$$(6.11)\qquad (16\kappa - \lambda^2)f^2 + 20(a\kappa^3 + 1)(f')^2 = 0.$$

Заметим, что $16\kappa - \lambda^2 = 0$, и из (6.11), получаем $a\kappa^3 + 1 = 0$. Подставляя это и (6.8) в (1.9) , получаем

$$6\gamma_1^5\gamma_2\left(a - \frac{1}{\kappa^3}\right)e^{4\sqrt{\kappa}z} + 20\gamma_1^3\gamma_2^3\left(a - \frac{1}{\kappa^3}\right) + 6\gamma_1\gamma_2^5\left(a - \frac{1}{\kappa^3}\right)e^{-4\sqrt{\kappa}z} = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z}.$$

Вместе с Леммой 2.2 , получаем $20\gamma_1^3\gamma_2^3\left(a-\frac{1}{\kappa^3}\right)=0$. Можно проверить, что $a\kappa^3-1=0$ по $\gamma_1\gamma_2\neq 0$. Это противоречит $a\kappa^3+1=0$. Если $(3n-2)\kappa-\lambda^2\neq 0$, то $f''(z_1)\neq 0$ и $\gamma_0\neq 0$. В противном случае, если $f''(z_1)=0$, и заметьте, что $[(n-1)(n-2)(f'')^2+((3n-2)\kappa-\lambda^2)(f')^2](z_1)=0$, тогда $f'(z_1)=0$, что противоречит (1.9). Поскольку z_1 является нулем функции $[(n-1)(n-2)(f'')^2+((3n-2)\kappa-\lambda^2)(f')^2]$, то либо $(f''+\tau f')(z_1)=0$ либо $(f''-\tau f')(z_1)=0$, где $\tau^2=\frac{\lambda^2-(3n-2)\kappa}{(n-1)(n-2)}\neq 0$. Если z_1 является нулем функции $f''+\tau f'$, обозначив $\omega=\frac{f''+\tau f'}{f}$, тогда $T(r,\omega)=O(\log r)$. Следовательно, ω должно быть многочленом, а $f''=\omega f-\tau f'$. Из (6.8) следует, что

$$\sqrt{\kappa}(\gamma_1e^{\sqrt{\kappa}z}-\gamma_2e^{-\sqrt{\kappa}z})=\omega\gamma_0+\omega\left(\frac{\gamma_1}{\sqrt{\kappa}}e^{\sqrt{\kappa}z}-\frac{\gamma_2}{\sqrt{\kappa}}e^{-\sqrt{\kappa}z}\right)-\tau(\gamma_1e^{\sqrt{\kappa}z}+\gamma_2e^{-\sqrt{\kappa}z}).$$

Применив Лемму 2.2 к вышеуказанному уравнению, можно сделать вывод, что $\omega\gamma_0=0$. Заметим, что $\gamma_0\neq 0$, тогда $\omega=0$. Следовательно, $\sqrt{\kappa}=-\tau$ и $-\sqrt{\kappa}=-\tau$, то есть $\kappa=\tau=0$, что невозможно. Если z_1 является нулем $f''-\nu f'$, то аналогичным образом мы получим противоречие. Предположим, что $f''(z_1)=0$, тогда мы получаем $\gamma_0=0$ по (6.8). Если $(3n-2)\kappa-\lambda^2=0$, то аналогично мы можем получить противоречие. Если $(3n-2)\kappa-\lambda^2\neq 0$, то $[(n-1)(n-2)(f'')^2+((3n-2)\kappa-\lambda^2)(f')^2](z_1)\neq 0$. В противном случае $f'(z_1)=0$, то невозможно. Сравнивая порядок z_1 по обоим сторонам (6.7), получаем противоречие.

Abstract. In this paper, we study the entire solutions of nonlinear differential equations related to trigonometric identities. Our results improve the results given by Zhang et al (Appl. Math. J. Chin. Univ. 28(2): 138-146, 2013) and Gundersen et al (J. Math. Anal. Appl. 507: 125788, 2022). Meanwhile, we confirm some of the conjectures proposed by Gao et al (Mediterr. J. Math. 20: 167, 2023). Finally, some open questions posed.

Список литературы

[1] C. C. Yang, P. Li, “On the transcendental solutions of a certain type of nonlinear differential equations”, Arch. Math., **82**, 442 – 448 (2004).

[2] P. Li, “Entire solutions of certain type of differential equations II”, J. Math. Anal. Appl., **375**, 310 – 319 (2011).

[3] Z. X. Chen, C. C. Yang, “On entire solutions of certain type of differential-difference equations”, Taiwan J. Math., **18**, 677 – 685 (2014).

[4] M. F. Chen, Z. S. Gao, “Entire solutions of certain type of nonlinear differential equations and differential-difference equations”, J. Comput. Anal. Appl., **24(1)**: 137 – 147 (2018).

[5] L. W. Liao, C. C. Yang, J. J. Zhang, “On meromorphic solutions of certain type of nonlinear differential equations”, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **38**, 581 – 593 (2013).

[6] H. F. Liu, Z. Q. Mao, “Meromorphic solutions of certain types of nonlinear differential equations”, Comput. Methods Funct. Theory, **20**, 319 – 332 (2020).

[7] X. Q. Lu, L. W. Liao, J. Wang, “On meromorphic solutions of a certain type of nonlinear differential equations”, Acta Math. Sin., **33**, 1597 – 1608 (2017).
[8] J. Zhang, L. W. Liao, “On entire solutions of a certain type of nonlinear differential and difference equations”, Taiwan J. Math., **15**, 2145 – 2157 (2011).
[9] X. B. Zhang, H. X. Yi, “Entire solutions of a certain type of functional-differential equations”, Appl. Math. J. Chin. Univ., **28(2)**, 138 – 146 (2013).
[10] G. G. Gundersen, W. R. Lü, T. W. Ng, C. C. Yang, “Entire solutions of differential equations that are related to trigonometric identities”, J. Math. Anal. Appl., **507**, 125788 (2022).
[11] L. K. Gao, J. Y. Gao, “Trigonometric identities and entire solutions of nonlinear binomial differential equations”, Mediterr J. Math., **20**, 167, (2023).
[12] W. K. Hayman, Meromorphic Function, Oxford, Clarendon Press (1964).
[13] I. Laine, Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Berlin: W de Gruyter (1993).
[14] L. Yang, Value Distribution Theory, Berlin, Springer-Verlag (1993).
[15] H. F. Liu, Z. Q. Mao, “Meromorphic solutions of certain nonlinear difference equations”, Results Math., **76**, 102 (2021).
[16] C. C. Yang, H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Beijing, Science Press (1995). Dordrecht: Kluwer Academic (2003).

Поступила 22 ноября 2024

После доработки 23 января 2025

Принята к публикации 02 февраля 2025