Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 5, 2025, стр. 35 – 45.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С ИМПУЛЬСОМ

Я. ХАЛИЛИ, Д. БАЛЕАНУ

Университет сельскохозяйственных наук и природных ресурсов Сари, Сари, Иран [1]
Университет Чанкая, Анкара, Турция
E-mails: *y.khalili@sanru.ac.ir* *dumitru@cankaya.edu.tr*

Аннотация. В данной работе рассматривается обратная задача для квадратичного пучка оператора Штурма-Лиувилля с импульсом в конечном интервале. Показано, что некоторая информация о собственных функциях в некоторой внутренней точке $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и частях двух спектров однозначно определяет потенциальные функции и все параметры в граничных условиях. Кроме того, мы доказываем, что потенциальные функции на всем интервале и параметры в граничных условиях могут быть установлены из одного спектра и потенциалов, заданных на $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

MSC2020 numbers: 34A37; 65L09; 47A10.

Ключевые слова: обратная задача; пучок; импульсный; спектр.

1. Введение

Теория обратных задач для дифференциальных операторов играет важную роль в развитии спектральной теории. Обратные задачи спектрального анализа заключаются в восстановлении операторов по их спектральным данным, таким как спектр, нормирующие константы, функция Вейля, спектральная функция и узловые точки. Наиболее полное описание этой теории и ее применений можно найти в математике, математической физике, электронике, квантовой механике, геофизике и т. д. (подробнее см. [1] – [4]).

В данной статье мы рассматриваем краевую задачу $L(p, q, h, H, \omega_1, \omega_2)$,

$$-y'' + (2\rho p(x) + q(x))y = \lambda r(x)y, \quad x \in (0, 1), \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \qquad V(y) := y'(1) + Hy(1) = 0, \tag{1.2}$$

где $p(x) \in W_2^1(0, 1)$, $q(x) \in L_2(0, 1)$- функции с действительными значениями и $\lambda = \rho^2$ — спектральный параметр. Пусть $r(x) = \omega_1^2$ для $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $r(x) = \omega_2^2$ для $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Также параметры h и H являются действительными.

[1]Финансовую поддержку данного исследования оказал Иранский университет сельскохозяйственных наук и природных ресурсов в рамках исследовательского проекта № 03-1401-10

Обратные спектральные задачи, восстанавливающие операторы из их спектральных данных, разделяются на два класса: обратные задачи о собственных значениях и обратные задачи об узлах. Обратные собственные задачи для операторов Штурма-Лиувилля различных типов изучались многими исследователями [5] – [9]. В этих исследованиях авторы в последние годы изучали внутренние обратные задачи для операторов Штурма-Лиувилля как эффективный метод . Этот метод изучается с учетом свойства собственных функций в середине интервала и произвольной точке в первой или второй половине интервала [10] – [13]. Полуобратные задачи также используются для реконструкции оператора по одному спектру и известным потенциалам на половине интервала [14, 15]. В данной работе мы рассматриваем импульсный дифференциальный пучок и приводим новый результат о внутренних обратных задачах, когда свойство собственных функций рассматривается в произвольной точке во второй половине интервала. Мы также приводим полуобратные задачи, когда потенциальные функции известны во второй половине интервала. Наличие импульса и пучка приводит к существенным качественным изменениям в задаче и появлению интересных результатов. Действительно, полученные результаты являются обобщением классического оператора Штурма-Лиувилля с использованием метода Мочидзуки-Трушина [16] и метода Хохштата-Либермана [17].

В данной статье мы изучаем внутреннюю и полуобратную задачи для L. В Разделе 2 изучаются некоторые важные свойства собственных значений. В Разделе 3 доказывается теорема единственности внутренней обратной задачи. В Разделе 4 приводится теорема единственности полуобратной задачи.

2. Предварительные сведения

Пусть $y(x,\rho)$ — решение уравнения (1.1) при условиях $y(0,\rho)=1$ и $y'(0,\rho)=h$. Для каждого фиксированного $x\in(0,1)$, эта функция и ее производная по x являются полными в ρ. Из [18, 19], мы получаем следующее интегральное представление для ограниченных функций $A(x,t)$ и $B(x,t)$,

$$y(x,\rho)=y_0(x,\rho)+\int_0^x A(x,t)\cos\rho\omega_1 t dt+\int_0^x B(x,t)\sin\rho\omega_1 t dt, \tag{2.1}$$

где

$$y_0(x,\rho)=\begin{cases}\cos\left(\rho\omega_1 x-\frac{Q_+(x)}{\omega_1}\right), & x<\frac{1}{2},\\[2ex] \frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\cos\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\omega_2 x\right)-\frac{Q_+(x)}{\omega_2}\right)\\ +\frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\cos\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\omega_2 x\right)+\frac{Q_-(x)}{\omega_2}\right), & x>\frac{1}{2},\end{cases}$$

где $Q_+(x)=\int_0^x p(t)dt$ и $Q_-(x)=\int_{\frac{1}{2}}^x p(t)dt$. Для достаточно большого ρ мы можем вывести решение (1.1) , удовлетворяющее (1.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} y(x,\rho) &= \cos\left(\rho\omega_1 x-\frac{Q_+(x)}{\omega_1}\right)\\ &+\left(2h+\frac{1}{\omega_1}\int_0^x(q(t)+p^2(t))dt\right)\frac{\sin\left(\rho\omega_1 x-\frac{Q_+(x)}{\omega_1}\right)}{2\rho}\\ &+o\left(\frac{1}{\rho}\exp(|\Im\rho|\omega_1 x)\right),\qquad x<\frac{1}{2}, \end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} y(x,\rho) &= \frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\cos\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\omega_2 x\right)-\frac{Q_+(x)}{\omega_2}\right)\\ &+\frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\cos\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\omega_2 x\right)+\frac{Q_-(x)}{\omega_2}\right)\\ &+\frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\left(2h+\frac{1}{\omega_1}\int_0^x(q(t)+p^2(t))dt\right)\\ &\qquad\times\frac{\sin\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\omega_2 x\right)-\frac{Q_+(x)}{\omega_2}\right)}{2\rho}\\ &+\frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\left(2h-\frac{1}{\omega_2}\int_{\frac{1}{2}}^x(q(t)+p^2(t))dt+\frac{1}{\omega_1}\int_0^{\frac{1}{2}}(q(t)+p^2(t))dt\right)\\ &\qquad\times\frac{\sin\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\omega_2 x\right)+\frac{Q_-(x)}{\omega_2}\right)}{2\rho}\\ &+o\left(\frac{1}{\rho}\exp\left(|\Im\rho|\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\omega_2 x\right)\right)\right),\qquad x>\frac{1}{2}. \end{aligned}\tag{2.3}$$

Собственные значения ρ_n из L совпадают с нулями его характеристической функции [20]. Обозначим всю функцию

$$\Delta(\rho):=V(y(x,\rho)),\tag{2.4}$$

как характеристическую функцию L. Мы отметим, что на протяжении всей статьи функция $y_n(x):=y(x,\rho_n)$, соответствующая собственным значениям ρ_n, называется собственной функцией L.

Теперь, используя (1.2), (2.3) и (2.4), мы можем для достаточно больших ρ,

$$\begin{aligned} \Delta(\rho)=\frac{\rho}{2}&\left((\omega_2-\omega_1)\sin\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\rho+\frac{Q_-(1)}{\omega_2}\right)\right.\\ &\left.-(\omega_2+\omega_1)\sin\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\rho-\frac{Q_+(1)}{\omega_2}\right)\right)+O\left(\exp\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)|\Im\rho|\right)\right), \end{aligned}\tag{2.5}$$

и тогда собственные значения ρ_n,

$$\rho_n=\frac{1}{\omega_1+\omega_2}\left(2n\pi+\frac{2Q_+(1)}{\omega_2}\right)+O(n^{-1}),\tag{2.6}$$

для достаточно больших n.

Для изучения обратной задачи для импульсного дифференциального пучка (1.1)-(1.2), в дополнение к краевой задаче $L = L(p, q, h, H, \omega_1, \omega_2)$, мы рассмотрим краевую задачу $\widetilde{L} = L(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{h}, \widetilde{H}, \omega_1, \omega_2)$ аналогичной формы, но с другими коэффициентами.

3. Внутренняя обратная задача

В этом разделе мы представим теорему Мочидзуки-Трушина в виде так называемой внутренней обратной задачи в точке $x = b \neq \frac{1}{2}$. Когда $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, мы устанавливаем теорему единственности краевой задачи L из частей двух спектров и некоторой информации о собственных функциях. Когда $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, симметрично, мы можем получить теорему единственности для L, которая поэтому здесь не рассматривается.

Рассмотрим последовательности $l(n)$, $r(n)$ неотрицательных целых чисел, таких что

$$l(n) = \frac{n}{\sigma_1}(1 + \epsilon_{1n}), \quad 0 < \sigma_1 \leq 1, \quad \epsilon_{1n} \longrightarrow 0,$$
$$r(n) = \frac{n}{\sigma_2}(1 + \epsilon_{2n}), \quad 0 < \sigma_2 \leq 1, \quad \epsilon_{2n} \longrightarrow 0,$$

и пусть μ_n будут собственными значениями L_1 для (1.1) вместе с (1.2) таким образом, что $V(y) = y'(1) + H_1 y(1) = 0$, поскольку $H_1 \neq H, H_1 \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.1. *Пусть $l(n)$ и $r(n)$ такие, что $\sigma_1 > \frac{4b}{\omega_1+\omega_2} - 1$ и $\sigma_2 > 2 - \frac{4b}{\omega_1+\omega_2}$, а $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Пусть для натуральных чисел n,*

$$\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n, \quad \mu_{l(n)} = \widetilde{\mu}_{l(n)},$$

$$< y_{r(n)}(x), \widetilde{y}_{r(n)}(x) >_{x=b} = 0,$$

тогда $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $(0, 1)$ и $(h, H) = (\widetilde{h}, \widetilde{H})$.

Лемма 3.1. *Рассмотрим последовательность натуральных чисел*

$$m(n) = \frac{n}{\sigma}(1 + \epsilon_n), \quad 0 < \sigma \leq 1, \quad \epsilon_n \longrightarrow 0.$$

(1) Пусть $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ такое, что $\sigma > \frac{4b}{\omega_1+\omega_2}$. Если для натуральных чисел n,

$$\lambda_{m(n)} = \widetilde{\lambda}_{m(n)}, \quad < y_{m(n)}(x), \widetilde{y}_{m(n)}(x) >_{x=b} = 0,$$

то $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $[0, b]$ и $h = \widetilde{h}$.
(2) Пусть $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ такое, что $\sigma > 2 - \frac{4b}{\omega_1+\omega_2}$. Если для натуральных чисел n, $\lambda_{m(n)} = \widetilde{\lambda}_{m(n)}$, $< y_{m(n)}(x), \widetilde{y}_{m(n)}(x) >_{x=b} = 0$, то $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $[b, 1]$ и $H = \widetilde{H}$.

Доказательство. Пусть $y(x,\rho)$ является решением

$$-y''(x,\rho)+(2\rho p(x)+q(x))y(x,\rho)=\lambda r(x)y(x,\rho), \qquad y(0,\rho)=1, \quad y'(0,\rho)=h, \tag{3.1}$$

и $\widetilde{y}(x,\rho)$ является решением

$$-\widetilde{y}''(x,\rho)+(2\rho\widetilde{p}(x)+\widetilde{q}(x))\widetilde{y}(x,\rho)=\lambda r(x)\widetilde{y}(x,\rho), \qquad \widetilde{y}(0,\rho)=1, \quad \widetilde{y}'(0,\rho)=\widetilde{h}. \tag{3.2}$$

Если умножить (3.1) на $\widetilde{y}(x,\rho)$ и (3.2) на $y(x,\rho)$, а затем вычесть, получим

$$\Big(2\rho\big(p(x)-\widetilde{p}(x)\big)+\big(q(x)-\widetilde{q}(x)\big)\Big)y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)=y''(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)-y(x,\rho)\widetilde{y}''(x,\rho). \tag{3.3}$$

Интегрируя (3.3) на $[0,b]$, , мы можем записать

$$\begin{aligned} H_b(\rho) \;&:=\; \int_0^b \big(2\rho P(x)+Q(x)\big)y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)dx+h-\widetilde{h} \\ &= y'(b,\rho)\widetilde{y}(b,\rho)-y(b,\rho)\widetilde{y}'(b,\rho), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $P(x)=p(x)-\widetilde{p}(x)$ и $Q(x)=q(x)-\widetilde{q}(x)$. Предположение теоремы дает, что $H_b(\rho_{m(n)})=0$. Теперь мы должны доказать, что $H_b(\rho)=0$ для других значений ρ в комплексной плоскости.

Используя (2.1), мы получим для ограниченных функций $A'(x,t)$ и $B'(x,t)$,

$$\begin{aligned} y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho) \;&=\; \frac{1}{2}\left(\cos\left(2\rho\omega_1 x-\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)+\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\right) \\ &+\frac{1}{2}\int_0^x A'(x,t)\cos\left(2\rho\omega_1 t-\frac{Q_+(t)+\widetilde{Q}_+(t)}{\omega_1}\right)dt \\ &-\frac{1}{2}\int_0^x B'(x,t)\sin\left(2\rho\omega_1 t-\frac{Q_+(t)+\widetilde{Q}_+(t)}{\omega_1}\right)dt, \qquad x<\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Следовательно, для константы $M_1>0$,

$$|y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)|\le M_1\exp(2|\Im\rho|\omega_1 x), \tag{3.6}$$

которое приводит к тому, что

$$|H_b(\rho)|\le M_2\rho\exp(2br|sin\theta|\omega_1), \tag{3.7}$$

для некоторой константы $M_2>0$. Пусть $h(\theta)$ будет индикатором $H_b(\rho)$ как

$$h(\theta):=\limsup_{r\to\infty}\frac{ln(|H_b(r\exp(i\theta))|)}{r}. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8), мы делаем вывод

$$h(\theta)\le 2b|sin\theta|\omega_1,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta \le \frac{b}{\pi}\int_0^{2\pi}|sin\theta|d\theta = \frac{4b}{\pi}. \tag{3.9}$$

Условия Леммы 3.1 и асимптотическая форма (2.6) дают, что для достаточно большого r,

$$n(r) \ge 2\sum_{\frac{2n\pi}{\sigma(\omega_1+\omega_2)}(1+O(1))<r} 1 = \frac{r\sigma(\omega_1+\omega_2)}{\pi}[1+\epsilon(r)],$$

где $n(r)$ — количество корней $H_b(\rho)$ в диске $|\rho| \le r$ и $\epsilon(r)$ стремится к нулю. Поскольку $\sigma > \frac{4b}{\omega_1+\omega_2}$, получаем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r} \ge \frac{\sigma(\omega_1+\omega_2)}{\pi} \ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta. \tag{3.10}$$

Для любой полной функции $H_b(\rho)$ экспоненциального типа, не равной нулю, имеем [21],

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta. \tag{3.11}$$

Результаты (3.10) и (3.11) показывают, что $H_b(\rho) = 0$ во всей комплексной плоскости. Теперь, подставляя (3.5) в (3.4) и принимая $H_b(\rho) = 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^b Q(x)\left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right) + \cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\right)\right)dx\\
&+\int_0^b Q(x)\left(\int_0^x A'(x,t)\cos\rho\omega_1 t dt + \int_0^x B'(x,t)\sin\rho\omega_1 t dt\right)dx\\
&+\rho\int_0^b P(x)\left(\left(\cos\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right) + \cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\right)\right)dx\\
&+2\rho\int_0^b P(x)\left(\int_0^x A'(x,t)\cos\rho\omega_1 t dt + \int_0^x B'(x,t)\sin\rho\omega_1 t dt\right)dx + h - \widetilde{h} = 0.
\end{aligned}$$

Переписывая этот результат, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^b Q(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx + \rho\int_0^b P(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx\\
&+\int_0^b \cos\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t) + \int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)dt\\
&+\int_0^b \sin\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)dt\\
&+2\rho\int_0^b \cos\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t) + \int_t^{\frac{1}{2}} P(x)V_3(x,t)dx\right)dt\\
&+2\rho\int_0^b \sin\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)dt + h - \widetilde{h} = 0,
\end{aligned}$$

и тогда

$$
\begin{aligned}
h-\widetilde{h}&+\frac{1}{2}\int_0^b Q(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx+\rho\int_0^b P(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx\\
&+\int_0^b \cos\left(2\rho\omega_1 x\right)\left(\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^{\frac{1}{2}}Q(x)V_1(x,t)dx\right)\right.\\
&\qquad\left.+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)\right)dt\\
&+\int_0^b \sin\left(2\rho\omega_1 x\right)\left(\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)\right.\\
&\qquad\left.+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)\right)dt\\
&+2\rho\int_0^b \cos\left(2\rho\omega_1 x\right)\left(\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)\right.\\
&\qquad\left.+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)\right)dt\\
&+2\rho\int_0^b \sin\left(2\rho\omega_1 x\right)\left(\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)\right.\\
&\qquad\left.+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)\right)dt=0.
\end{aligned}
$$

Лемма Римана-Лебега гласит, что для достаточно большого ρ,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^b \cos\left(2\rho\omega_1 x\right)\left(\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)\right.\\
&\qquad\left.+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)\right)dt\\
&+\int_0^b \sin\left(2\rho\omega_1 x\right)\left(\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)\right.\\
&\qquad\left.+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)\right)dt\\
&+2\rho\int_0^b \cos\left(2\rho\omega_1 x\right)\left(\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)\right.\\
&\qquad\left.+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)\right)dt\\
&+2\rho\int_0^b \sin\left(2\rho\omega_1 x\right)\left(\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)\Bigg)dt=0,$$

и

$$\int_0^b P(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx=0,$$

$$h-\widetilde{h}+\frac{1}{2}\int_0^b Q(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx=0. \tag{3.12}$$

Из полноты функции "$(\cos,\sin)$"в $\left(L_2\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)^2$ следует, что для достаточно большого ρ,

$$\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)$$
$$+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)=0,$$
$$\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)$$
$$+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)=0,$$
$$\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)$$
$$+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)=0,$$
$$\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)$$
$$+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)=0,$$

поэтому мы будем иметь однородные интегральные уравнения Вольтерры

$$\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx=0,\qquad \int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx=0,$$
$$\frac{1}{2}P(t)+\int_t^{\frac{1}{2}} P(x)V_3(x,t)dx=0,\qquad \int_t^b P(x)V_4(x,t)dx=0.$$

Эти уравнения подразумевают, что $P(x)=Q(x)=0,\ x\in[0,b]$. Следовательно, $(p(x),q(x))=(\widetilde{p}(x),\widetilde{q}(x))$ п.в. на $[0,b]$. Кроме того, из (3.12) следует, что $h=\widetilde{h}$.

Чтобы доказать условие (2), мы должны рассмотреть вспомогательную задачу $\widehat{L}$,

$$-y'' + (2\rho p(1-x) + q(1-x))y = \lambda r(1-x)y, \quad x \in (0,1),$$
$$U(y) := y'(0) - Hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(1) + hy(1) = 0,$$

и следует провести аналогичное обсуждение. Путем преобразования переменной $x \to 1-x$, поскольку $1-b \in (0, \frac{1}{2})$, условия (1) выполняются. Таким образом, $P(1-x) = Q(1-x) = 0,\ x \in [0, 1-b]$, и тогда $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $[b,1]$ и $H = \widetilde{H}$. Доказательство завершено.

Доказательство Теоремы 3.1. Предположение $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, а затем равенство $\lambda_{r(n)} = \widetilde{\lambda}_{r(n)}$ вместе с $< y_{r(n)}, \widetilde{y}_{r(n)} >_{x=b}= 0$ удовлетворяет Лемме 3.1. Таким образом, $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ для $x \in [b, 1]$ и $H = \widetilde{H}$. Достаточно доказать, что $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ для $x \in [0, b]$ и $h = \widetilde{h}$.

Рассмотрим (3.4) для $b \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_b(\rho) &:= \int_0^b \big(2\rho P(x) + Q(x)\big) y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)dx + h - \widetilde{h} \\ &= y'(b,\rho)\widetilde{y}(b,\rho) - y(b,\rho)\widetilde{y}'(b,\rho). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Равенство $y_n(x)$ и $\widetilde{y}_n(x)$ в точке $x = 1$ и $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ в $x \in [b, 1]$ приводят к тому, что

$$y_n(x) = \alpha_n \widetilde{y}_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \ \text{Конст. } \alpha_n > 0, \ x \in [b, 1]. \tag{3.14}$$

Из соотношений (3.13) и (3.14) следует, что $\mathcal{H}_b(\lambda_n) = 0$. Аналогично, мы получим, что $\mathcal{H}_b(\mu_{l(n)}) = 0$.
Существует $1 + \frac{r(\omega_1+\omega_2)}{\pi}[1 + O(n^{-1})]$ из λ_n и $1 + \frac{r\sigma_1(\omega_1+\omega_2)}{\pi}[1 + O(n^{-1})]$ из $\mu_{l(n)}$ внутри диска радиуса r. Таким образом, их сумма равна $n(r) = 2 + \frac{r(\omega_1+\omega_2)}{\pi}[1 + \sigma_1 + O(n^{-1})]$. Используя $\sigma_1 > \frac{4b}{\omega_1+\omega_2} - 1$, имеем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} \geq \frac{(\omega_1+\omega_2)(1+\sigma_1)}{\pi} \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta. \tag{3.15}$$

Мы также можем записать для любой полной функции $\mathcal{H}_b(\lambda)$ экспоненциального типа, не равной нулю [21],

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta. \tag{3.16}$$

Из (3.15) и (3.16), получаем, что $\mathcal{H}_b(\lambda) = 0$.

Полученный результат $\mathcal{H}_b(\lambda) = 0$ и аналогичное доказательство Леммы 3.1 помогают нам доказать, что $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $[0, b]$ и $h = \widetilde{h}$.

4. Полуобратная задача

Теперь мы представим теорему Хохштата-Либермана в виде так называемой полуобратной задачи.

Теорема 4.1. *Если* $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ *для натуральных чисел* n, $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ *на* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *и* $H = \widetilde{H}$ *, то для* $\omega_2 > \omega_1$, *имеем* $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ *п.в. на* $(0, 1)$ *и* $h = \widetilde{h}$.

Доказательство. Интегрируя (3.3) на $[0, 1]$, мы получим

$$\int_0^1 \big(2\rho P(x) + Q(x)\big) y(x, \rho)\widetilde{y}(x, \rho)dx = (y'(x, \rho)\widetilde{y}(x, \rho) - y(x, \rho)\widetilde{y}'(x, \rho))|_{x=0}^{x=1}.$$

Принимая гипотезу теоремы, получим

$$\begin{aligned} H(\rho) \quad &:= \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \big(2\rho P(x) + Q(x)\big) y(x, \rho)\widetilde{y}(x, \rho)dx + h - \widetilde{h} \\ &= y'(1, \rho)\widetilde{y}(1, \rho) - y(1, \rho)\widetilde{y}'(1, \rho). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Свойства функций $y(x, \rho)$ и $\widetilde{y}(x, \rho)$ и второе граничное условие в (1.2) приводят к тому, что $H(\rho_n) = 0$. Далее мы докажем, что $H(\rho) = 0$ для всех ρ.
Из (3.6) и (4.1) следует, что

$$|H(\rho)| \leq C|\rho| \exp\left(|\Im\rho|\omega_1\right), \tag{4.2}$$

для некоторой константы $C > 0$. Также, используя (2.5), получаем

$$|\Delta(\rho)| \geq C_\delta|\rho| \exp\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)|\Im\rho|\right), \quad \rho \in G_\delta, \tag{4.3}$$

учитывая $G_\delta := \{\rho \in \mathbb{C}; | \rho - \rho_n | \geq \delta, \ \forall n\}$ для фиксированного $\delta > 0$ и некоторой константы $C_\delta > 0$. Теперь, подставив

$$\phi(\rho) = \frac{H(\rho)}{\Delta(\rho)}, \tag{4.4}$$

и взяв (4.2) и (4.3), получим, что $\phi(\rho) = 0$ для всех ρ, и тогда $H(\rho) = 0$.

Теперь, по аналогии с Леммой 3.1, можем показать, что $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $[0, 1]$ и $h = \widetilde{h}$. Теорема доказана. □

Abstract. In this work, an inverse problem for the quadratic pencil of the Sturm-Liouville operator with an impulse in the finite interval is considered. It is shown that some information on eigenfunctions at some internal point $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and parts of two spectra uniquely determine the potential functions and all parameters in the boundary conditions. Moreover we prove that the potential functions on the whole interval and the parameters in the boundary conditions can be established from one spectrum and the potentials prescribed on $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Список литературы

[1] H. Koyunbakan, "The inverse nodal problem for a differential operator with an eigenvalue in the boundary condition", Appl. Math. Lett. **21**, 1301 – 1305 (2008).
[2] R. J. Kruger, "Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties", J. Mathematical Physics **23**, 396 – 404 (1982).
[3] F. R. Lapwood and T. Usami, Free Oscillation of the Earth, Cambridge University Press, Cambridge (1981).
[4] A. Neamaty and Y. Khalili, "The eigenvalue problems for dierential equations with jump condition and turning point", Far East J. Mathematical Sciences, **37**, 1 – 7 (2020).
[5] S. Mosazadeh, "Reconstruction of singular second-order differential equations from spectral characteristics", Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, **35**, 645 – 654 (2019).
[6] A. S. Ozkan and B. Keskin, "Spectral problems for Sturm-Liouville operator with boundary and jump conditions linearly dependent on the eigenparameter", Inve. Probl. Sci. Eng. **20**, 799 – 808 (2012).
[7] Y.P. Wang, "Uniqueness theorems for Sturm-Liouville operators with boundary conditions polynomially dependent on the eigenparameter from spectral data", Results Math. **63**, 1131 – 1144 (2013).
[8] Y. P. Wang, C. F. Yang and Z. Y. Huang, "Half inverse problem for Sturm-Liouville operators with boundary conditions dependent on the spectral parameter", Turk. J. Math. **37**, 445 – 454 (2013).
[9] V. A. Yurko, "Inverse problem for quasi-periodic differential pencils with jump conditions inside the interval", Complex Anal. Oper. Theory **10**, 1203 – 1212 (2016).
[10] Y. Khalili and N. Kadkhoda, "The interior inverse problem for the impulsive Sturm-Liouville equation", Analysis and Mathematical Physics **10**, 1 – 10 (2020).
[11] Y. P. Wang, "An interior inverse problem for Sturm–Liouville operators with eigenparameter dependent boundary conditions", Tamkang J. Math. **42**, 395 – 403 (2011).
[12] Y. P. Wang, "Inverse problems for Sturm-Liouville operators with interior discontinuities and boundary conditions dependent on the spectral parameter", Math. Meth. Appl. Sci., **36**, 857 – 868 (2013).
[13] C. F. Yang and Y. X. Guo, "Determination of a differential pencil from interior spectral data", J. Math. Anal. Appl., **375**, 284 – 293 (2011).
[14] Y. Cakmak and S. Isık, "Half inverse problem for the impulsive diffusion operator with discontinuous coefficient", Filomat **30**, 157 – 168 (2016).
[15] H. Koyunbakan and E. Panakhov, "Half-inverse problem for diffusion operators on the finite interval", J. Mathematical Analysis and Applications, **326**, 1024 – 1030 (2007).
[16] K. Mochizuki and I. Trooshin, "Inverse problem for interior spectral data of Sturm-Liouville operator", J. Inverse Ill-Posed Problems **9**, 425 – 433 (2001).
[17] H. Hochstadt and B. Lieberman, "An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data", SIAM J. Appl. Math. **34**, 676-680 (1978).
[18] R. K. Amirov and A. A. Nabiev, "Inverse problems for the quadratic pencil of the Sturm–Liouville equations with impulse", Abstr. Appl. Anal. **2013**, Article ID 361989 (2013).
[19] Y. Khalili, N. Kadkhoda and D. Baleanu, "Inverse problems for the impulsive Sturm–Liouville operator with jump conditions", Inve. Probl. Sci. Eng. **27**, 1442 – 1450 (2019).
[20] G. Freiling and V.A. Yurko, Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications, NOVA Scince Publ., New York (2001).
[21] B. Ja. Levin, Distribution of Zeros of Entire Functions, AMS Transl., **5**, AMS, Providence (1964).

Поступила 20 ноября 2024

После доработки 19 февраля 2025

Принята к публикации 21 февраля 2025