Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 5, 2025, стр. 20 – 34.

ПРИМЕНЕНИЯ ЦЕПЕЙ ЛЕВНЕРА В ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ И КВАЗИКОНФОРНЫХ РАСШИРЕНИЯХ

С. Л. ГУО, ДЖ. Х. ФАН

Нанкинский университет науки и технологии, Нанкин, Цзянсу, КНР[1]
E-mails: *sulingguo1@163.com; jinhuafan@hotmail.com*

АННОТАЦИЯ. В данной работе исследуются теория цепей Левнера и критерии однолистности и квазиконформной расширяемости для аналитических функций в единичном круге. Заменив предшварцеву производную на шварцеву производную, мы получаем результаты, аналогичные результатам Хотты [Публ. мат., Дебрецен 82 (2013), стр. 473-483]. Кроме того, построив различные цепи Левнера, мы обобщаем и предоставляем единые доказательства нескольких известных критериев однозначности и квазиконформной расширяемости. В качестве применения цепей Левнера мы модифицируем критерий Альфорса, включающий комплексную константу c.

MSC2020 numbers: 30C62; 30C55.

Ключевые слова: Цепь Левнера; квазиконформное расширение; однолистная функция; производная Шварца; критерий Альфорса.

1. Введение

Пусть $\mathcal{A}$ — класс аналитических функций f в единичном круге $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ нормализованный по $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, а $\mathcal{S}$ — подкласс $\mathcal{A}$, состоящий из всех однолистных функций. Для локально однолистной аналитической функции f в $\mathbb{D}$, предшварцева производная T_f и шварцева производная S_f определяются соответственно как

$$T_f = \frac{f''}{f'}, \qquad S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Соответствующие нормы:

$$||T_f|| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1 - |z|^2)|T_f|, \quad ||S_f|| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1 - |z|^2)^2|S_f|.$$

Пусть $k \in [0, 1)$, гомеоморфизм F из $\mathbb{C}$ называется k-квазиконформным, если F принадлежит классу Соболева $W^{1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ и удовлетворяет $|\bar{\partial}F| \leqslant k|\partial F|$ почти всюду в $\mathbb{C}$. В данной работе обозначим через $\widetilde{\mathcal{S}}_k$ (соответственно $\mathcal{S}_k$) подкласс всех $f \in \mathcal{S}$, допускающих k-квазиконформные расширения на $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (соответственно $\mathbb{C}$), т. е. существует k-квазиконформное отображение $F : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ (соответственно $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) такое, что $F|_{\mathbb{D}} = f$.

[1]Работа была поддержана Национальным фондом естественных наук Китая. (№ 12471074).

Как известно, T_f и S_f играют важную роль в изучении однолистных функций, квазиконформных расширений и универсального пространства Тейхмюллера (см. [1] – [4]). Хорошо известный критерий Беккера [5] показал, что $f \in \mathcal{S}_k$, если $||T_f|| \leqslant k$, а критерий Альфорса [6] показал, что $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$, если $||S_f|| \leqslant 2k$.

Поскольку критерии Беккера и Альфорса являются очень важными и полезными, было изучено множество обобщений. Добавив комплексную константу c, Альфорс [7] получил общие критерии, которые играют ключевую роль в оценке максимального шара $\mathcal{S}$ с центром в базовой точке в пространстве Хорнича [8].

Теорема 1.1 ([7])**.** *Пусть $f \in \mathcal{A}$ и $k \in [0,1)$, для константы $c \in \mathbb{C}$ и всех $z \in \mathbb{D}$,*

(i) *если $\left|c|z|^2 + (1-|z|^2)\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant k$, то $f \in \mathcal{S}_k$;*

(ii) *если $\left|\frac{z}{\bar{z}}\frac{(1-|z|^2)^2}{1-c}\frac{1}{2}S_f - c|z|^2\right| \leqslant k$, то $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$.*

Используя геометрические подходы, Эпштейн [9] получил следующий критерий однолистности, который включает критерии Беккера и Альфорса как частные случаи. На самом деле, Поммеренке [10] повторно доказал результат Эпштейна с помощью теории цепей Левнера.

Теорема 1.2 ([9, 10])**.** *Пусть f и g являются голоморфными в $\mathbb{D}$. Если f и g являются локально однолистными аналитическими функциями в $\mathbb{D}$ и*

$$\left|\frac{1}{2}(1-|z|^2)^2(S_f - S_g) + (1-|z|^2)\bar{z}\,T_g\right| \leqslant 1$$

для всех $z \in \mathbb{D}$, то f является однолистной функцией в $\mathbb{D}$.

Параллельно Теореме 1.2, заменив производную Шварца на предшварцевскую производную, Чен [11] получил квазиконформный критерий расширения, который имеет важное применение в оценке внутреннего радиуса однолистности и в исследовании геометрии универсального пространства Тейхмюллера.

Теорема 1.3 ([11])**.** *Пусть $k \in [0,1)$. Если $f \in \mathcal{A}$ и $g \in \mathcal{A}$ являются локально однолистными аналитическими функциями в $\mathbb{D}$, и для всех $z \in \mathbb{D}$*

$$\left|z\,(1-|z|^2)(T_f - T_g) + z\,\frac{g'}{g} - 1\right| \leqslant k, \tag{1.1}$$

то $f \in \mathcal{S}_k$.

Поскольку Теоремы 1.1–1.3 являются достаточными условиями, Рушевейх сначала представил эквивалентное условие для того, чтобы $f \in \mathcal{A}$ была однолистной. Результат еще не опубликован, но мы можем ссылаться на [12].

Теорема 1.4 ([12])**.** *Пусть $f \in \mathcal{A}$. Тогда $f \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда существует аналитическая функция Ω в $f(\mathbb{D})$ такая, что*

$$(1-|z|^2)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} + zf'(z)\Omega(f(z))\right| \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

В дальнейшем, учитывая Теорему 1.4, Хотта [12] получил необходимое и достаточное условие для того, чтобы $f \in \mathcal{A}$ имела квазиконформное расширение.

Теорема 1.5 ([12])**.** *Пусть $f \in \mathcal{A}$ и $k \in [0,1)$. Предположим, что существует $k' \in [0,k)$ и конформное отображение Q определённое в $f(\mathbb{D})$, которое допускает $\frac{k-k'}{1-kk'}$-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$. Кроме того, для константы $c \in \mathbb{C}$ и всех $z \in \mathbb{D}$, если выполняется следующее неравенство:*

$$\left|c|z|^2 + (1-|z|^2)\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)} + zf'(z)\Omega(f(z))\right\}\right| \leqslant k', \tag{1.2}$$

где $\Omega = \frac{Q''}{Q'}$, то $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$. И наоборот, если $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$, тогда существует $k' \in [0,1)$ и конформное отображение Q определённое в $f(\mathbb{D})$, которое имеет $\frac{k+k'}{1+kk'}$-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$, такое что неравенство (1.2) *выполняется для константы $c \in \mathbb{C}$ и для всех $z \in \mathbb{D}$.*

Заметим, что условия $|c| \leqslant k$ и $|c| \leqslant k'$ соответственно включены в Теоремах 1.1 и (1.2) [13, Примечание 1.1 и 1.2].

Кроме того, для ознакомления с современными исследованиями по однолистности и квазиконформному расширению можно обратиться к соответствующим работам Дениза и соавторов [14, 15, 16], в которых представлены новые критерии и обсуждаются их значимые связи с другими результатами.

Первая задача статьи состоит в рассмотрении аналогичных результатов Теорем 1.4 и 1.5 путем замены предшварцевой производной на шварцеву производную.

Теорема 1.6. *Пусть $f \in \mathcal{A}$. Тогда $f \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда существует аналитическая функция Ω в $f(\mathbb{D})$ такая, что*

$$\frac{1}{2}(1-|z|^2)^2\left|S_f(z) + (f'(z))^2\left[\Omega'(f(z)) - \frac{1}{2}\Omega^2(f(z))\right]\right| \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.3}$$

Теорема 1.7. *Пусть $f \in \mathcal{A}$ и $k \in [0,1)$. Предположим, что существует $k' \in [0,k)$ и конформное отображение Q определенное в $f(\mathbb{D})$, которое имеет $\frac{k-k'}{1-kk'}$-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$. Кроме того, для постоянного $c \in \mathbb{C}$ и для всех $z \in \mathbb{D}$, если выполняется следующее неравенство:*

$$\left|\frac{z}{\overline{z}}\frac{(1-|z|^2)^2}{1-c}\frac{1}{2}\left\{S_f(z) + (f'(z))^2\left[\Omega'(f(z)) - \frac{1}{2}\Omega^2(f(z))\right]\right\} - c|z|^2\right| \leq k', \tag{1.4}$$

где $\Omega = \frac{Q''}{Q'}$, *то* $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$. *И наоборот, если* $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$, *то существует* $k' \in [0,1)$ *конформное отображение* Q *определённое в* $f(\mathbb{D})$, *которое имеет* $\frac{k+k'}{1+kk'}$-*квазиконформное расширение в* $\overline{\mathbb{C}}$, *такое что неравенство* (1.2) *выполняется для константы* $c \in \mathbb{C}$ *и всех* $z \in \mathbb{D}$. (*условие* $|c| \leqslant k'$ *включено в* (1.4))

Аналогично рассмотрению Теоремы 1.1 путем добавления константы к критериям Беккера и Альфорса, вторая задача статьи состоит в дальнейшей генерализации Теорем 1.2 и 1.3 путем добавления комплексной константы α.

Теорема 1.8. *Пусть* f *и* g *являются голоморфными в* $\mathbb{D}$. *Если* f *и* g *являются локально однолистными аналитическими функциями в* $\mathbb{D}$, *и для константы* $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} &\Big|\alpha(1-|z|^2)^2\left[(\alpha-\frac{1}{2})(T_f(z)-T_g(z))+S_f(z)-S_g(z)\right] \\ &+(1-|z|^2)\bar{z}\Big[(1-2\alpha)\,T_f(z)+2\alpha\,T_g(z)\Big]\Big| \leqslant 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

действует для всех $z \in \mathbb{D}$, *тогда* f *является однолистным в* $\mathbb{D}$.

Теорема 1.9. *Пусть* $k \in [0,1)$. *Если* $f \in \mathcal{A}$ *и* $g \in \mathcal{A}$ *являются локально однолистными аналитическими функциями в* $\mathbb{D}$, *для константы* $\alpha \in \mathbb{C}$ *и для всех* $z \in \mathbb{D}$

$$\left|\alpha\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1} z\,(1-|z|^2)(T_f-T_g)+\Big\{1+|z|^2\Big[\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1}-1\Big]\Big\}z\,\frac{g'}{g}-1\right| \leqslant k, \tag{1.6}$$

то $f \in \mathcal{S}_k$. *Где ветвь* $\left(\frac{g'}{f'}\right)^{\alpha-1}$ *выбрана так, что* $\left(\frac{g'}{f'}\right)^{\alpha-1}(0) = 1$.

Примечание 1.1. Теоремы 1.2 и 1.3 являются частными случаями Теорем 1.8 и 1.9 при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 1$, соответственно. Фактически, обобщение добавлением константы α уже появилось в [17, 18].

Мы знаем, что в критерии Беккера ∞ является фиксированным, а в критерии Альфорса — нет. В некоторых задачах необходимо зафиксировать ∞. Для решения этой проблемы Хотта и Гуменюк [19] модифицировали критерий Альфорса. В качестве применения цепей Левнера мы в Разделе 5 обобщим результаты Гуменюка и Хотты.

Структура данной статьи следующая. В Разделе 2 мы представим основные понятия теории цепей Левнера и расширение Беккера, используемые в последующих доказательствах. В Разделе 3 мы приводим доказательства Теорем 1.6 и 1.7. В Разделе 4 мы доказываем Теоремы 1.8 и 1.9. В Разделе 5 мы модифицируем пункт (ii) Теоремы 1.1.

2. Предварительные сведения

В этом разделе мы представляем некоторые понятия, связанные с классической цепью Левнера, которые будут использоваться в наших доказательствах. Подробности классической теории Левнера можно найти в [20, 21, 22] , а современную теорию Левнера — в [23, 24, 25].

Определение 2.1. Рассмотрим функцию $f_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)z^n$, где $a_1(t) \neq 0$, определенную в $\mathbb{D} \times [0, +\infty)$, где $a_1(t)$ является комплекснозначной, локально абсолютно непрерывной функцией в $[0, \infty)$ и $\lim_{t\to\infty} |a_1(t)| = \infty$. Тогда $f_t(z)$ называется цепью Левнера, если выполняются следующие условия:

(i) Для каждого $t \in [0, +\infty)$, $f_t(z)$ является аналитической и однолистной в $\mathbb{D}$;

(ii) Для любых $0 \leqslant s < t < \infty$, имеем $f_s(\mathbb{D}) \subseteq f_t(\mathbb{D})$.

Если в Определении2.1 $a_1(t) = e^t$, то назовем $f_t(z)$ стандартной цепью Левнера. Для стандартной цепи Левнера Поммеренке [4] дал следующее заключение.

Теорема 2.1 ([4])**.** *$f_t(z)$ является стандартной цепью Левнера тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

(i) *$f_t(z)$ является аналитической функцией в диске $|z| < r_0$ для каждого $t \geqslant 0$, где $r_0 \in (0, 1)$, и абсолютно непрерывной в $t \geqslant 0$ для каждого $|z| < r_0$. Более того, существуют положительные константы K_0 и r_0 такие, что:*

$$|f_t(z)| \leqslant K_0 e^t, \quad |z| < r_0, \quad t \geqslant 0.$$

(ii) *Существует функция $p(z, t)$, аналитическая в $\mathbb{D}$ и измеримая в $t \geqslant 0$, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} p(z, t) > 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и почти всех $t \geqslant 0$, такая, что*

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = z f_t'(z) p(z, t), \quad z \in \mathbb{D}, \quad \text{п.в. } t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Функция $p(z, t)$ называется функцией Герглотца. Для такой стандартной цепи соответствующая функция Герглотца $p(z, t)$ нормируется по $p(0, t) = 1$ для п.в. $t \geqslant 0$. Хотта [26] обобщил Теорему 2.1 для цепи Левнера, первый коэффициент которой $a_1(t)$ является комплексным. В этом случае $p(z, t)$ не нормализуется.

Примечательный результат, показанный Поммеренке [4, Гл.6] гласит, что для каждого $f \in \mathcal{S}$, существует цепь Левнера f_t , такая что $f = f_0$. Более того, некоторые свойства f, такие как квазиконформная расширяемость, могут быть определены с помощью $p(z,t)$. Используя $p(z,t)$, Беккер [5, 27] дал известный квазиконформный критерий расширяемости, который включает в себя большинство ранее известных критериев, т. е. если функция Герглотца $p(z,t)$ стандартной цепи Левнера $f_t(z)$ удовлетворяет

$$\left|\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}\right| \leqslant k < 1 \quad ..\, t \geqslant 0 \;\; \forall z \in \mathbb{D}, \tag{2.2}$$

то для каждого $t \geqslant 0$, f_t допускает k-квазиконформное расширение в $\mathbb{C}$.

Обозначим $\mathcal{S}_k^B$ совокупность $f \in \mathcal{S}$ допускающую подходящую стандартную цепь Левнера с $p(z,t)$, удовлетворяющую (2.2). Для цепи Левнера $f_t(z) = a_1(t)z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t)z^n$ без предположения $a_1(t) = e^t$, Хотта [26] доказал, что расширение Беккера также выполняется. Параллельно $\mathcal{S}_k^B$ обозначим $\widetilde{\mathcal{S}}_k^B$ совокупность $f \in \mathcal{S}$ допускающих подходящую цепь Левнера с $p(z,t)$, удовлетворяющую (2.2).

3. Доказательства Теорем 1.6 и 1.7

В этом разделе мы докажем Теоремы 1.6 и 1.7. В действительности, проверив идею Хотты в [12], мы обнаружим, что доказательства несложны. Для удобства мы приводим подробности доказательства Теорем 1.6−1.7.

Доказательство Теоремы 1.6 Предположим, что (1.3) выполняется, и покажем, что f является однолистной. Для заданного Ω, пусть аналитическая функция Q в $f(\mathbb{D})$ такая, что $\Omega = Q''/Q'$ и $g = Q \circ f$. Исходя из (1.3), путем простых вычислений получаем

$$\begin{aligned}
1 \geqslant & \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 \left| S_f + (f')^2 \left[\Omega'(f) - \frac{1}{2}\Omega^2(f)\right]\right| \\
= & \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 \Big| (\frac{f''}{f'})' - \frac{1}{2}(\frac{f''}{f'})^2 + \big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)}\big]' \cdot f' - \frac{1}{2}\big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)}\big]^2 \cdot (f')^2 \Big| \\
= & \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 \Big| \big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)} \cdot f' + \frac{f''}{f'}\big]' - \frac{1}{2}\big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)} \cdot f' + \frac{f''}{f'}\big]^2 \Big| \\
= & \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 \Big| (\frac{g''}{g'})' - \frac{1}{2}(\frac{g''}{g'})^2 \Big| = \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 |S_g|.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Тогда (3.1) подразумевает, что g является однолистной. Таким образом , f является однолистной, поскольку $g = Q \circ f$ является однолистной тогда и только тогда, когда Q и f являются однолистными в своих соответствующих областях.

С другой стороны, предположим, что f является однолистной, мы построим аналитическую функцию Ω в $f(\mathbb{D})$ так, чтобы выполнялось (1.3) . Выберем

$h \in \mathcal{S}$ с $||S_h|| \leqslant 1$ и пусть $Q := h \circ f^{-1}$ и $\Omega = Q''/Q'$. Тогда, заменив g на h и следуя вычислениям в (3.1), получим, что (1.3) выполняется следующим образом:

$$1 \geqslant ||S_h|| \geqslant \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2|S_h| = \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2\left|S_f + (f')^2\left[\Omega'(f) - \frac{1}{2}\Omega^2(f)\right]\right|.$$

Доказательство Теоремы 1.7 Предположим, что (1.4) выполняется для заданного конформного отображения Q, удовлетворяет условиям Теоремы 1.7, мы докажем, что $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$. Для $\Omega = Q''/Q'$, пусть $g = Q \circ f$. Простыми вычислениями получаем

(3.2)

$$\begin{aligned} k' \geqslant & \left|\frac{z}{\overline{z}}\frac{(1-|z|^2)^2}{1-c}\frac{1}{2}\left\{S_f(z) + (f')^2\Big[\Omega'(f) - \frac{1}{2}\Omega^2(f)\Big]\right\} - c|z|^2\right| \\ = & \left|\frac{z}{\overline{z}}\frac{(1-|z|^2)^2}{1-c}\frac{1}{2}\left\{(\frac{f''}{f'})' - \frac{1}{2}(\frac{f''}{f'})^2 + \big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)}\big]'f' - \frac{1}{2}\big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)}\big]^2(f')^2\right\} - c|z|^2\right| \\ = & \left|\frac{z}{\overline{z}}\frac{(1-|z|^2)^2}{1-c}\frac{1}{2}\left\{\big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)}f' + \frac{f''}{f'}\big]' - \frac{1}{2}\big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)}f' + \frac{f''}{f'}\big]^2\right\} - c|z|^2\right| \\ = & \left|\frac{z}{\overline{z}}\frac{(1-|z|^2)^2}{1-c}\frac{1}{2}\left\{(\frac{g''}{g'})' - \frac{1}{2}(\frac{g''}{g'})^2\right\} - c|z|^2\right| = \left|\frac{z}{\overline{z}}\frac{(1-|z|^2)^2}{1-c}\frac{1}{2}S_g(z) - c|z|^2\right|. \end{aligned}$$

Согласно (ii) в Теореме 1.1, (3.2) подразумевает, что $g = Q \circ f$ допускает k'-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$. Поскольку Q допускает $(k-k')\,/\,(1-kk')$-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$, мы заключаем, что $f = Q^{-1} \circ g \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$.

С другой стороны, предположим, что $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$, мы построим конформное отображение Q в $f(\mathbb{D})$ которое допускает $(k+k')\,/\,(1+kk')$- квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$ так, что выполняется (1.4) . Выберем $h \in \mathcal{S}$ которая удовлетворяет

$$\left|\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{1-c}\,\frac{z}{\overline{z}}\,\frac{1}{2}S_h(z) - c|z|^2\right| \leqslant k' \tag{3.3}$$

для всех $z \in \mathbb{D}$ с определенным $c \in \mathbb{C}$. Согласно (ii) в Теореме 1.1, отображение h допускает k'-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $Q := h \circ f^{-1}$ и $\Omega = Q''/Q'$. Поскольку $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$, Q допускает $(k+k')\,/\,(1+kk')$-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда, заменив g на h и следуя вычислениям в (3.2) получим, что (1.4) выполняется следующим образом:

$$\begin{aligned} k' \geqslant & \left|\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{1-c}\,\frac{z}{\overline{z}}\,\frac{1}{2}S_h(z) - c|z|^2\right| \\ = & \left|\frac{z}{\overline{z}}\frac{(1-|z|^2)^2}{1-c}\frac{1}{2}\left\{\left[S_f(z) + (f')^2\left(\Omega'(f) - \frac{1}{2}\Omega^2(f)\right)\right]\right\} - c|z|^2\right|. \end{aligned}$$

4. Доказательства Теорем 1.8 и 1.9

В этом разделе мы приводим доказательства Теорем 1.8–1.9 путем построения подходящей цепи Левнера.

Доказательство Теоремы 1.8 Без потери общего представления, мы предполагаем, что

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad \text{и} \quad g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots,$$

где $a_1 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$. Теперь рассмотрим следующие функции:

$$f^*(z) = \frac{f(z) - a_0}{a_1 + \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1}\right)(f(z) - a_0)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2} + \frac{b_2^2}{b_1^2}\right) z^3 + \cdots,$$

$$g^*(z) = \frac{g(z) - b_0}{b_1} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \frac{b_3}{b_1} z^3 + \cdots$$

вместо функций f и g. Эти нормализации не умаляют общности. В результате этого преобразования мы теперь имеем

$$f(z) = g(z) + O(z^3) \quad \text{и} \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} = 1 + O(z^2) \quad \text{при}\, z \to 0.$$

Поскольку f и g являются локально однолистными аналитическими функциями для некоторого $\alpha \in \mathbb{C}$, мы можем выбрать ветвь $\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^\alpha$, которая принимает значение 1 при $z = 0$. Далее определим следующие функции:

$$v(z) = \left(\frac{g'(z)}{f'(z)}\right)^\alpha = 1 + v_1 z^2 + O(z^3), \tag{4.1}$$

$$u(z) = f(z) \cdot v(z) = z + u_1 z^2 + O(z^3). \tag{4.2}$$

Очевидно, что как $v(z)$, так и $u(z)$ являются аналитическими функциями в $\mathbb{D}$. Теперь определим $f_t(z) : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ следующим образом

$$f_t(z) = \frac{u(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\, z u'(e^{-t}z)}{v(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\, z v'(e^{-t}z)}, \tag{4.3}$$

которая является мероморфной в $\mathbb{D}$ и удовлетворяет условию $f_0(z) = f(z)$. Теперь мы проверим, что $f_t(z)$ является стандартной цепью Левнера.

Шаг 1. Сначала убедимся, что $f_t(z)$ удовлетворяет условию (i) Теоремы 2.1.

В силу (4.1)–(4.3), имеем, что $f_t(z) = e^t z + O(z^2)$ при $z \to 0$. Следовательно, существуют константы $r_0 \in (0, 1)$ и $K_0 > 0$ такие, что $|f_t(z)| \leqslant K_0 e^t$, $|z| < r_0$, $t \geqslant 0$. Более того, для каждого $z \in \mathbb{D}$, функция $f_t(z)$ принадлежит $C^\infty([0, +\infty))$, что гарантирует, что $f_t(z)$ локально абсолютно непрерывна в $t \geqslant 0$.

Шаг 2. Теперь убедимся, что $f_t(z)$ удовлетворяет условию (ii) Теоремы 2.1.

Путем прямых вычислений находим, что

(4.4)
$$f_t'(z) = \frac{e^t\,(u'v - v'u) + z(1-e^{-2t})\,(u''v - v''u) + z^2 e^t(1-e^{-2t})^2\,(u''v' - v''u')}{\left[v + (e^t - e^{-t})zv'\right]^2},$$

(4.5)
$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = \frac{z\left[e^t\,(u'v - v'u) - z(1-e^{-2t})\,(u''v - v''u) - z^2 e^t(1-e^{-2t})^2\,(u''v' - v''u')\right]}{\left[v + (e^t - e^{-t})zv'\right]^2}.$$

Для u, v и их производных справедливы следующие выражения:

$$u'v - v'u = f'\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha}, \tag{4.6}$$

$$u''v - v''u = (1-2\alpha)f''\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha} + 2\alpha g''\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha-1}, \tag{4.7}$$

$$u''v' - v''u' = \alpha f'\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha}\left[S_f - S_g + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''}{f'} - \frac{g''}{g'}\right)\right], \tag{4.8}$$

где u, v и их производные оцениваются в точке $e^{-t}z$. Чтобы доказать, что существует измеримая функция $p(z,t)$ относительно t, такая что $\Re p(z,t) > 0$ и выполняется уравнение (2.1) , предположим, что

$$\phi(z,t) = \frac{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} - zf_t'(z)}{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} + zf_t'(z)}.$$

По (4.4)–(4.8), получаем

$$\begin{aligned}
\phi(z,t) &= \frac{-ze^{-t}\left(1-e^{-2t}\right)(u''v - v''u) - z^2\left(1-e^{-2t}\right)^2(u''v' - v''u')}{u'v - v'u} \\
&= -\alpha z^2\left(1-e^{-2t}\right)^2\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(T_f(e^{-t}z) - T_g(e^{-t}z)\right) + S_f(e^{-t}z) - S_g(e^{-t}z)\right] \\
&\quad - e^{-t}z\left(1-e^{-2t}\right)\left[(1-2\alpha)T_f(e^{-t}z) + 2\alpha T_g(e^{-t}z)\right].
\end{aligned}$$

Заметим, что $|e^{-t}z|^2 < e^{-2t}$ для $z \in \mathbb{D}$. Используя z для обозначения $e^{-t}z$, по (1.5), получаем

$$\begin{aligned}
|\phi(z,t)| \leqslant \Bigg|&\alpha(1-|z|^2)^2\left[(\alpha - \frac{1}{2})(T_f(z) - T_g(z)) + S_f(z) - S_g(z)\right] \\
&+ (1-|z|^2)\bar{z}\Big[(1-2\alpha)\,T_f(z) + 2\alpha\,T_g(z)\Big]\Bigg| \leqslant 1,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Объединяя (4.9) и

$$p(z,t) = \frac{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t}}{zf_t'(z)} = \frac{1+\phi(z,t)}{1-\phi(z,t)},$$

получаем $\operatorname{Re} p(z,t) > 0$. Более того, $p(z,t)$ является аналитической функцией в $\mathbb{D}$ и измеримой в $t \geqslant 0$. Таким образом, условие (ii) Теоремы 2.1 выполняется.

Следовательно, $f_t(z)$ является стандартной цепью Левнера, и, следовательно, $f(z) = f_0(z)$ является однолистной в $\mathbb{D}$.

Доказательство Теоремы 1.9 Поскольку f, $g \in \mathcal{A}$ и являются локально однолистными аналитическими функциями для $\alpha \in \mathbb{C}$, мы можем выбрать ветвь

$$\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{\alpha} = 1 + \nu_1 z + \cdots, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

которая принимает значение 1 при $z = 0$. Определим $f_t(z) : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ через

$$f_t(z) = f(e^{-t}z) + (e^{2t} - 1)\left(\frac{f'(e^{-t}z)}{g'(e^{-t}z)}\right)^{\alpha} g(e^{-t}z).$$

Далее докажем, что $f_t(z)$ является стандартной цепью Левнера.

Шаг 1. Проверим, что $f_t(z)$ удовлетворяет условию (i) Теоремы 2.1.

Очевидно, что $f_t(z)$ является аналитической функцией в $\mathbb{D}$ и удовлетворяет условиям $f_0(z) = f(z)$, $f_t'(0) = e^t$. Поскольку

$$e^{-t} f_t(z) = e^{-t} f(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\left(\frac{f'(e^{-t}z)}{g'(e^{-t}z)}\right)^{\alpha} g(e^{-t}z) = z + \cdots,$$

имеем, что $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} f_t(z) = z$, откуда следует, что $\{e^{-t} f_t(z)\}_{t\geqslant 0}$ является нормальным семейством. Следовательно, для любого $r_0 \in (0, 1)$, существует константа $K_0 > 0$ такая, что $|f_t(z)| \leqslant K_0 e^t$ для всех $|z| < r_0$ и $t \geqslant 0$. Более того, для каждого $z \in \mathbb{D}$, $f_t(z) \in C^{\infty}([0, +\infty))$, поэтому $f_t(z)$ локально абсолютно непрерывна в $t \geqslant 0$.

Шаг 2. Проверим, что $f_t(z)$ удовлетворяет условию (ii) Теоремы 2.1.

После простых вычислений получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} =& - z(e^t - e^{-t})\Big[\alpha g \frac{f''g' - f'g''}{g'^2}\Big(\frac{f'}{g'}\Big)^{\alpha-1} + g'\Big(\frac{f'}{g'}\Big)^{\alpha}\Big] \\ & - z e^{-t} f' + 2e^{2t} g\Big(\frac{f'}{g'}\Big)^{\alpha},\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$f_t'(z) = (e^t - e^{-t})\Big[\alpha g \frac{f''g' - f'g''}{g'^2}\Big(\frac{f'}{g'}\Big)^{\alpha-1} + g'\Big(\frac{f'}{g'}\Big)^{\alpha}\Big] + e^{-t} f', \tag{4.11}$$

где f', f'', g', g'' представляют соответственно $f'(e^{-t}z), f''(e^{-t}z), g'(e^{-t}z), g''(e^{-t}z)$.

Чтобы доказать, что существует измеримая функция $p(z, t)$ по отношению к t , такая что $\Re p(z, t) > 0$ и выполняется уравнение (2.1) , предположим, что

$$\phi(z, t) = \frac{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} - z f_t'(z)}{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} + z f_t'(z)}. \tag{4.12}$$

Из (4.10)–(4.12), получаем

$$\phi(z,t) = -\,ze^{-t}\,(1-e^{-2t})\Big[\alpha\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1}\Big(\frac{f''}{f'}-\frac{g''}{g'}\Big)\Big] \\ -\,ze^{-t}\,\frac{g'}{g}\Big\{1+e^{-2t}\Big[\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1}-1\Big]\Big\}+1.$$

Заметим, что $|e^{-t}z|^2 < e^{-2t}$ для $z \in \mathbb{D}$. Используя z для обозначения $e^{-t}z$, по (1.6), имеем

(4.13)

$$|\phi(z,t)| \leqslant \Big|\alpha\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1} z\,(1-|z|^2)(T_f-T_g)+\Big\{1+|z|^2\Big[\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1}-1\Big]\Big\}z\,\frac{g'}{g}-1\Big| \\ \leqslant k<1.$$

Объединяя (4.13) и

$$p(z,t) = \frac{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t}}{zf_t'(z)} = \frac{1+\phi(z,t)}{1-\phi(z,t)}, \tag{4.14}$$

имеем, что $\Re p(z,t) > 0$. Более того, $p(z,t)$ измерима в $t \geqslant 0$ является аналитической в $\mathbb{D}$, поскольку $|\phi(z,t)| < 1$ и $(g'/f')^{\alpha-1}$является аналитической в $\mathbb{D}$. Следовательно, (ii) в Теореме 2.1 выполняется. Тогда $f_t(z)$ является стандартной цепью Левнера, а $f(z) = f_0(z)$ - однолистной в $\mathbb{D}$.

Из (4.13) и (4.14), получаем, что

$$\left|\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}\right| = |\phi(z,t)| \leqslant k.$$

Затем, согласно критерию расширения Беккера, получаем, что $f_t(z)$ допускает k-квазиконформное расширение на $\mathbb{C}$. В частности, $f(z) = f_0(z) \in \mathcal{S}_k$.

5. Приложение

По расширению Беккера, мы имеем $\mathcal{S}_k^B \subseteq \mathcal{S}_k$. Ключевой проблемой, привлекающей значительное внимание, является нахождение наибольшего $k_* \in (0,1)$ с таким свойством, что для любого $k \in (0,k_*)$ существует $q(k) \in (0,1)$ такое, что $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{S}_{q(k)}^B$. Исходя из критерия Беккера и того факта, что $||T_f|| \leqslant 6k$ для $f \in \mathcal{S}_k$, следует, что $k_* \geqslant 1/6$. Впоследствии Гуменюк [28] получил $k_* \geqslant 1/3$. До этого, чтобы улучшить нижнюю границу k_*, Гуменюк и Хотта [19] внесли изменение в критерий Альфорса.

Теорема 5.1 ([19])**.** *Пусть $k \in (0,1)$ и $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots \in \mathcal{A}$. Для всех $z \in \mathbb{D}$, если*

$$2\left(1-|z|^2\right)|z|\,|a_2| + \left(1-|z|^2\right)^2\Big|a_2^2+\frac{1}{2}S_f(z)\Big| \leqslant k, \tag{5.1}$$

тогда $f \in \mathcal{S}_k^B$, *с расширением Беккера, заданным как* $F(z) = \Phi(z, 1/\bar{z})$ *для всех* $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}$, *где*

$$\Phi(z,w) := f(w) + \frac{f'(w)}{\frac{1}{z-w} + a_2 - \frac{1}{2}\frac{f''(w)}{f'(w)}}. \tag{5.2}$$

Далее обобщая результаты Гуменюка и Хотты [19] , мы получаем модификацию (ii) в Теореме 1.1.

Теорема 5.2. *Пусть* $k \in (0,1)$ *и* $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \in \mathcal{A}$. *Для* $c \in \mathbb{C}$ *с* $|c| \leqslant k$ *и всех* $z \in \mathbb{D}$, *если*

$$2\left(1-|z|^2\right)|z|\,|a_2| + \left|\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{1-c}\ \frac{z}{\bar{z}}\left(a_2^2 + \frac{1}{2}S_f(z)\right) - c|z|^2\right| \leqslant k, \tag{5.3}$$

тогда $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k^B$, *с расширением Беккера, заданным как* $F(z) = \Phi(z, 1/\bar{z})$ *для всех* $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}$, *где*

$$\Phi(z,w) := f(w) + \frac{f'(w)}{\frac{1-c}{z-w} + a_2 - \frac{1}{2}\frac{f''(w)}{f'(w)}}. \tag{5.4}$$

Наши аргументы Теоремы 5.2 будут в значительной степени основаны на результатах, доказанных Гуменюком и Хоттой [19, Теорема 6.1]. Для удобства мы изложим их в модифицированном виде, необходимом для наших целей. Фактически, проверив доказательство Теоремы 6.1 в [19] слово за словом, мы можем изменить $f \in \mathcal{S}_k^B$ на $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k^B$, когда условие $\varphi(0,0) = 0$ заменяется на $\varphi(0,0) = c \in \mathbb{C}$.

Лемма 5.1 ([19])**.** *Пусть* f *— голоморфная функция в* $\mathbb{D}$ *с условиями* $f(0) = 0$ *и* $f'(0) = 1$. *Предположим, что существует мероморфная функция* Φ *определённая в* $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ *которая удовлетворяет следующей задаче с начальными условиями для уравнения в частных производных (УЧП):*

$$\frac{\partial \Phi(z,w)}{\partial w} = \varphi(z,w)\frac{\partial \Phi(z,w)}{\partial z}, \quad (z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{D}, \tag{5.5}$$

с начальными условиями:

$$\Phi(z,z) = f(z), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{5.6}$$

Здесь, φ *- мероморфная функция в* $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ *и удовлетворяет следующим свойствам:*

(i) $\varphi(0,0) = c \in \mathbb{C}$ $(c = 0)$;

(ii) $r|\varphi(w/r, w)| \leqslant k$ *для всех* $w \in \mathbb{D}$ *и всех* $r \in (|w|^2, 1)$.

Кроме того, предположим, что существуют константы $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $M > 0$ *такие, что*

$$|\Phi(z,w)| \leqslant M|z|, \quad \text{когда } |w| \leqslant |z| \text{ и } |zw| \leqslant \varepsilon^2. \tag{5.7}$$

Тогда f допускает k-квазиконформное расширение Беккера, которое задается следующим образом:

$$F(z) := \Phi(z, 1/\bar{z}), \quad |z| > 1. \tag{5.8}$$

В частности, мы имеем $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k^B$ $(f \in \mathcal{S}_k^B)$.

Доказательство Теоремы 5.2. Чтобы доказать Теорему 5.2, нам нужно проверить, что Φ заданное в (5.4), удовлетворяет всем условиям Леммы. 5.1.

Пусть $\varphi(z,w) := 2a_2(z-w) + \frac{(z-w)^2}{1-c}\left(a_2^2 + \frac{1}{2}S_f(w)\right) - c$, тогда имеем $\varphi(0,0) = -c$, что означает, что выполняется условие (i) Леммы 5.1 . Кроме того, поскольку выполняется (5.3) , имеем

$$\begin{aligned} k \geqslant & 2(1-|w|^2)|w||a_2| + \left|\frac{\left(1-|w|^2\right)^2}{1-c}\,\frac{w}{\bar{w}}\,\left(a_2^2 + \frac{1}{2}S_f(w)\right) - c|w|^2\right| \\ \geqslant & |w|^2\left|2\Big(\frac{w}{|w|^2} - w\Big)a_2 + \frac{\left(\frac{w}{|w|^2} - w\right)^2}{1-c}\Big(a_2^2 + \frac{1}{2}S_f(w)\Big) - c\right| \geqslant r|\varphi(w/r, w)|, \end{aligned}$$

где $r \in (|w|^2, 1)$. Тогда $\varphi(z,w)$ удовлетворяет условию (ii) Леммы 5.1.

Для φ легко проверить, что Φ удовлетворяет (5.5) и (5.6). Далее мы докажем, что Φ удовлетворяет (5.7). Поскольку $f(w) = w + a_2w^2 + a_3w^3 + \cdots$, то

$$f'(w) = 1 + 2a_2w + 3a_3w^2 + \cdots, \quad f''(w) \; = 2a_2 + 6a_3w + \cdots.$$

Очевидно, что для любого $w \in \frac{1}{2}\mathbb{D}$ существует $K > 1$, такое что

$$|f'(w)| \leqslant K \text{ и } \left|a_2 - \frac{1}{2}\left(f''(w)/f'(w)\right)\right| = \left|(3a_3 - 2a_2^2)w + \cdots\right| \leqslant K|w|.$$

Следовательно, всякий раз, когда $(z,w) \in \mathbb{C}\times\mathbb{D}$ удовлетворяет неравенствам $|w| \leqslant |z|$ и $|zw| \leqslant \varepsilon^2 := (1-k)/(4K)$, имеем

$$\begin{aligned} |\Phi(z,w)| &\leqslant |f(w)| + \frac{|(z-w)f'(w)|}{\big|1 - c - K|w|\cdot|z-w|\big|} \leqslant K|w| + \frac{2|z|\,|f'(w)|}{|1-c| - 2K|zw|} \\ &\leqslant K|z| + \frac{2K|z|}{|1-c| - 2K\varepsilon^2} \leqslant \frac{5+k-2|c|}{1+k-2|c|}K|z| \leqslant M|z|, \end{aligned}$$

где $|c| \leqslant k$ и $M > 0$. Тогда Φ удовлетворяет условию (5.7).

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Abstract. In this paper, Loewner chain theory and criteria of univalency and quasiconformal extensibility for analytic functions on the unit disk are investigated. By replacing the pre-Schwarzian derivative with the Schwarzian derivative, we obtain results analogous to those of Hotta [Publ. Math. Debrecen. 82 (2013), pp. 473-483]. Furthermore, by constructing various Loewner chains, we generalize and provide uniform proofs of several known criteria of univalency and quasiconformal extensibility. As an application of Loewner chains, we make a modification of the Ahlfors's criterion involving a complex constant c.

Список литературы

[1] L. V. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal Mappings, 2nd ed., Univ. Lect. Series **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006).
[2] L. P. Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag, New York (1983).
[3] O. Lehto, Univalent Functions and Teichmüller Space, Springer-Verlag, New York (1987).
[4] C. Pommerenke, Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1975).
[5] J. Becker, "Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen", J. Reine Angew. Math. **255**, 23 – 43 (1972). https://doi.org/10.1515/crll.1972.255.23
[6] L. V. Ahlfors and G. Weill, "A uniqueness theorem for Beltrami equations", Proc. Amer. Math. Soc. **13**, 975 – 978 (1962). https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1962-0148896-1
[7] L. V. Ahlfors, "Sufficient conditions for quasiconformal extension", Ann. of Math. Stud. **79**, 23 – 29 (1974). https://doi.org/10.1515/9781400881642-004
[8] J. A. Pfaltzgraff, "Univalence of the integral of $f'(z)^{\lambda}$", Bull. London Math. Soc. **7** (3), 254 – 256 (1975). https://doi.org/10.1112/blms/7.3.254
[9] C. L. Epstein, "Univalence criteria and surfaces in hyperbolic space", J. Reine Angew. Math. **380**, 196 – 214 (1987). https://doi.org/10.1515/crll.1987.380.196
[10] C. Pommerenke, "On the Epstein univalence criterion", Results Math. **10**, 143 – 146 (1986). https://doi.org/10.1007/bf03322371
[11] T. Cheng and J. X. Chen, "On the inner radius of univalency by pre-Schwarzian derivative", Sci. China Math. **50**, 987-996 (2007). https://doi.org/10.1007/s11425-007-0049-9
[12] I. Hotta, "Ahlfors's quasiconformal extension condition and Φ-likeness", Publ. Math. Debrecen. **82** (2), 473 – 483 (2013). https://doi.org/10.5486/pmd.2013.5387
[13] I. Hotta, "Ruscheweyh's univalent criterion and quasiconformal extensions", Kodai Math. J. **33** (3), 446 – 456 (2010). https://doi.org/10.2996/kmj/1288962552
[14] E. Deniz and H. Orhan, "Some notes on extensions of basic univalence criteria", J. Korean Math. Soc. **48** (1), 179 – 189 (2011). https://doi.org/10.4134/jkms.2011.48.1.179
[15] E. Deniz, "Sufficient conditions for univalence and quasiconformal extensions of meromorphic functions", Georgian Math. J. **19** (4), 639 – 653 (2012). https://doi.org/10.1515/gmj-2012-0027
[16] E. Deniz, S. Kanas and H. Orhan, "Univalence criteria and quasiconformal extensions of a general integral operator", Ukrainan Math. J. **74** (1), 27 – 39 (2022). https://doi.org/10.37863/umzh.v74i1.1148
[17] E. Deniz and H. Orhan, "Univalence criterion for meromorphic functions and Loewner chains", Appl. Math. Comput. **218** (3), 751 – 755 (2011). https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.045
[18] Z. Y. Hu, J. H. Fan and X. Y. Wang, "Quasiconformal extensions and inner radius of univalence by pre-Schwarzian derivatives of analytic and harmonic mappings", J. Math. Phys. Anal. Geom. **19** (4), 781 – 798 (2023). https://doi.org/10.15407/mag19.04.781
[19] P. Gumenyuk and I. Hotta, "Univalent functions with quasiconformal extensions: Becker's class and estimates of the third coefficient", Proc. Amer. Math. Soc. **148**, 3927 – 3942 (2020). https://doi.org/10.1090/proc/15010
[20] P. P. Kufareff, "On one-parameter families of analytic functions", Rec. Math. Mat. bornik, N. S. **13** (55), 87 – 118 (1943).
[21] K. Löwner, "Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I", Math. Ann. **89** (1-2), 103 – 121 (1923). https://doi.org/10.1007/bf01448091
[22] C. Pommerenke, "Über die Subordination analytischer Funktionen", J. Reine Angew. Math. **218**, 159 – 173 (1965). https://doi.org/10.1515/crll.1965.218.159
[23] F. Bracci, M. D. Contreras and S. Díaz-Madrigal, "Evolution families and the Loewner equation I: The unit disc", J. Reine Angew. Math. **672**, 1 – 37 (2012). https://doi.org/10.1515/crelle.2011.167
[24] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk, "Loewner chains in the unit disk", Rev. Mat. Iberoam. **26**, 975 – 1012 (2010). https://doi.org/10.4171/rmi/624

[25] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk, "Loewner theory in annulus I: evolution families and differential equations", Trans. Am. Math. Soc. **365**, 2505 – 2543 (2013). https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2012-05718-7
[26] I. Hotta, "Löwner chains with complex leading coefficient", Monatsh. Math. **163** (3), 315 – 325 (2011). https://doi.org/10.1007/s00605-010-0200-5
[27] J. Becker, "Conformal mappings with quasiconformal extensions", Aspects of Contemporary Complex Analysis, Academic Press, London, 37 – 77 (1980).
[28] P. Gumenyuk, "On existence of Becker extension", Ann. Fenn. Math. **47** (2), 979 – 1005 (2022). https://doi.org/10.54330/afm.120591

Поступила 02 ноября 2024

После доработки 11 апреля 2025

Принята к публикации 15 апреля 2025