Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 5, 2025, стр. 3 – 19.

ВЗВЕШЕННЫЕ ГРАНД ПРОСТРАНСТВА ГЕРЦА-МОРРЕЯ-ЛИЗОРКИНА-ТРИБЕЛЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

С. ВАНГ, П. ГУО, ДЖ. СЮЙ

Хайнаньский педагогический университет, Хайкоу, Китай[1]
Университет электронных технологий Гуйлинь, Гуйлинь, Китай
Центр прикладной математики Гуанси (GUET), Гуйлинь, Китай
Ключевая лаборатория по анализу данных и вычислениям колледжей и университетов Гуанси, Гуйлинь, Китай
E-mails: *wang_shengrong*@126.*com*; *guopf*999@163.*com*; *jingshixu*@126.*com*

АННОТАЦИЯ. Пусть векторно-значный сублинейный оператор удовлетворяет условию размера и является ограниченным в взвешенных пространствах Лебега с переменным показателем. Тогда мы получаем его ограниченность в взвешенных гранд пространствах Герца-Моррея с переменными показателями. Далее мы вводим взвешенные гранд пространства Герца-Моррея-Трибеля-Лизоркина с переменными показателями и даем их эквивалентные квазинормы через максимальные функции.

MSC2020 numbers: 42B25; 46E30; 46E35.

Ключевые слова: сублинейный оператор; вес Макенхопта; переменный показатель; гранд пространство Герца-Моррея; пространство Трибеля-Лизоркина.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория пространств функций с переменным показателем быстро развивалась после того, как Ковачик и Ракосник [1] сформулировали основные свойства пространств Лебега с переменным показателем. В частности, в [2] – [6] была изучена ограниченность максимального оператора Харди-Литтлвуда в пространствах Лебега с переменным показателем. Круз-Урибе, Фиоренца и Нойгебауэр [7] расширили классический вес Мукенхупта A_p в [8] до переменного показателя и доказали эквивалентность между условием веса $A_{p(\cdot)}$ и ограниченностью максимального оператора Харди-Литтлвуда в соответствующем взвешенном пространстве Лебега с переменным показателем.

Ограниченность некоторых сублинейных операторов, в том числе максимального оператора Харди-Литтлвуда, в последнее время рассматривалась многими авторами. Более того, ограниченность некоторых сублинейных операторов в взвешенных переменных пространствах Герца-Моррея была получена

[1]Работа поддержана Национальным фондом естественных наук Китая (гранты № 12161022 и 12061030) и Научно-техническим проектом Гуанси (Guike AD23023002).

Вангом и Шу в [9]. Затем ограниченность векторно-значных сублинейных операторов в взвешенных пространствах Герца-Моррея с переменными показателями была доказана в [10]. Далее были введены гранд пространства Герца с переменной, и ограниченность сублинейных операторов в них была получена Нафисом, Рафейро и Зайгумом в [11]. Наконец, были введены взвешенные гранд пространства Герца-Моррея, и ограниченность сублинейных операторов и их многолинейных коммутаторов в них была получена Чжаном, Хэ и Чжаном в [12].

Смешав пространства Герца, пространства Бесова и пространства Трибеля-Лизоркина, Ян и третий автор статьи [13, 14] ввели пространства Бесова типа Герца и пространства Трибеля-Лизоркина. Затем Ши и третий автор статьи [15] расширили их до переменных показателей и получили их эквивалентные квазинормы.

Вдохновленные упомянутыми работами, в данной статье мы рассматриваем ограниченность векторно-значных сублинейных операторов в взвешенных гранд пространствах Герца-Моррея с переменными показателями и вводим взвешенные гранд пространства Герца-Моррея-Трибеля-Лизоркина с переменными показателями. План статьи следующий. В разделе 2 мы собираем некоторые обозначения. В разделе 3 мы даем ограниченность векторно-значных сублинейных операторов в взвешенных гранд пространствах Герца-Моррея с переменными показателями. В разделе 4, мы представляем взвешенные гранд пространства Герца-Моррея-Трибеля-Лизоркина с переменным показателем и получаем их эквивалентные квазинормы с помощью максимальных операторов Питре.

Теперь дадим некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел и $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел. Пусть $\mathbb{R}^n$ n-мерное евклидово пространство, где $n \in \mathbb{N}$. В дальнейшем C обозначает положительные константы, но может меняться от строки к строке. Для любых величин A и B, если существует константа $C > 0$ такая, что $A \leq CB$, запишем $A \lesssim B$. Если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$, запишем $A \sim B$. Для любого $k \in \mathbb{Z}$, мы определяем $B_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$, $D_k := B_k \backslash B_{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} < |x| \leq 2^k\}$, $\chi_k := \chi_{D_k}$, $\widetilde{\chi}_m = \chi_m$, $m \geq 1$, $\widetilde{\chi}_0 = \chi_{B_0}$. Для измеримой функции $q(\cdot)$ в $\mathbb{R}^n$, принимающей значения в $(0, \infty)$, обозначим $q^- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$, $q^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} q(x)$. Множество $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех $q(\cdot)$, удовлетворяющих $q^- > 1$ и $q^+ < \infty$; $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех $q(\cdot)$, удовлетворяющих $q^- > 0$ и $q^+ < \infty$.

2. Обозначения и предварительные замечания

В этом разделе мы сначала вспомним некоторые определения и обозначения. Пусть $q(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда пространство Лебега с переменным показателем $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех измеримых функций f , таких что

$$\|f\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{q(x)} \mathrm{d}x \leq 1 \right\} < \infty.$$

Пусть $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ и w — вес, который является неотрицательной измеримой функцией в $\mathbb{R}^n$. Тогда взвешенное пространство Лебега с переменным показателем $L^{q(\cdot)}(w)$ является множеством всех комплекснозначных измеримых функций f таких, что $fw \in L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Пространство $L^{q(\cdot)}(w)$ является банаховым пространством, обладающим нормой

$$\|f\|_{L^{q(\cdot)}(w)} := \|fw\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $q(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. Множество $L^{q(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(w)$ состоит из всех измеримых функций f ,таких что $f\chi_K \in L^{q(\cdot)}(w)(\mathbb{R}^n)$ для всех компактных подмножеств $K \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ множество всех измеримых функций f , таких что $\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}^n} |f(y)| < \infty$.

Пусть $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда стандартная максимальная функция Харди-Литтлвуда f определяется следующим образом:

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{B\ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\mathrm{d}y, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

где супремум берется по всем шарам, содержащим x в $\mathbb{R}^n$. Мы также определяем $\mathcal{M}_t(f) := (\mathcal{M}(|f|^t))^{1/t}$, $t \in (0, \infty)$.

Определение 2.1. Пусть $\alpha(\cdot)$ — вещественная измеримая функция в $\mathbb{R}^n$.

(i) Функция $\alpha(\cdot)$ является локально лог-Гёльдерово непрерывная, если существует константа $C_{\log}(\alpha)$, такая что

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq \frac{C_{\log}(\alpha)}{\log(e + 1/|x-y|)}, \ x, y \in \mathbb{R}^n, \ |x-y| < \frac{1}{2}.$$

Обозначим через $C^{\log}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ множество всех локально лог-Гёльдерово непрерывных функций.

(ii) Функция $\alpha(\cdot)$ является лог-гёльдеровской непрерывной в начале, если существует константа C_0 такая, что

$$|\alpha(x) - \alpha(0)| \leq \frac{C_0}{\log(e + 1/|x|)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через $C^{\log}_0(\mathbb{R}^n)$ множество всех локально лог-Гёльдерово непрерывных функций в начале.

(iii) Функция $\alpha(\cdot)$ является лог-гёльдеровской непрерывной в бесконечности, если существует $\alpha_\infty \in \mathbb{R}$ и константа C_∞ такие, что

$$|\alpha(x) - \alpha_\infty| \leq \frac{C_\infty}{\log(e+|x|)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через $C^{\log}_\infty(\mathbb{R}^n)$ множество всех локально лог-Гёльдерово непрерывных функций в бесконечности.

(iv) Функция $\alpha(\cdot)$ является глобально лог-гёльдеровской непрерывной, если $\alpha(\cdot)$ являются как локально лог-Гёльдерово непрерывными, так и лог-Гёльдерово непрерывными в бесконечности. Обозначим через $C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ множество всех локально лог-Гёльдерово непрерывных функций.

Определение 2.2. Пусть $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, а неотрицательная измеримая функция w говорят, что она принадлежит $A_{q(\cdot)}$, если

$$\|w\|_{A_{q(\cdot)}} := \sup_{\text{all ball } B\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|}\|w\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|w^{-1}\chi_B\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Определение 2.3. Пусть w - веса в $\mathbb{R}^n$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\theta > 0$. Однородное взвешенное пространство Герца-Моррея $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)$ определяется следующим образом:

$$M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w) := \left\{f \in L^{q(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, w) : \|f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)} < \infty\right\},$$

где

$$\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)} := \sup_{\delta>0}\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} \left\|2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Лемма 2.1 (см. [12, Лемма 4.1])**.** *Пусть w - вес в $\mathbb{R}^n$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\theta > 0$. Если $\alpha(\cdot) \in C^{\log}_0(\mathbb{R}^n) \cap C^{\log}_\infty(\mathbb{R}^n)$, тогда для всех $f \in L^{q(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, w)$,*

$$\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)} \sim \max\Bigg\{\sup_{\delta>0}\sup_{k_0\leq 0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\left\|f\chi_k\right\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}},$$
$$\sup_{\delta>0}\sup_{k_0>0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\Bigg(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\left\|f\chi_k\right\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)}$$
$$+ \delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)}\left\|f\chi_k\right\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)}\Bigg)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}\Bigg\}.$$

Следующая лемма была доказана Ноем и Идзуки в [16].

Лемма 2.2. *Если $q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ и $w \in A_{q(\cdot)}$, тогда существуют константы δ_1, $\delta_2 \in (0,1)$ и $C > 0$, такие, что для всех шаров B из $\mathbb{R}^n$ и для* *всех измеримых подмножеств* $S \subset B$,

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{q(\cdot)}(w)}}{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(w)}} \leq C\bigg(\frac{|S|}{|B|}\bigg)^{\delta_1} \text{ и } \frac{\|\chi_S\|_{L^{q'(\cdot)}(w^{-1})}}{\|\chi_B\|_{L^{q'(\cdot)}(w^{-1})}} \leq C\bigg(\frac{|S|}{|B|}\bigg)^{\delta_2}.$$

3. Ограниченность векторно-значного сублинейного оператора в взвешенных пространствах Герца-Моррея

В этом разделе мы приводим ограниченность векторно-значных сублинейных операторов в взвешенных пространствах Герца-Моррея с переменными показателями.

Теорема 3.1. *Пусть* $r, p \in (1,\infty)$, $q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\theta > 0$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, *где* δ_1, $\delta_2 \in (0,1)$ *— константы Леммы 2.2 для* $q(\cdot)$. *Предположим, что* T *является сублинейным оператором, удовлетворяющим условию размера,*

$$|Tf(x)| \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-n}|f(y)|\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

для всех $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *и п.в.* $x \notin \operatorname{supp} f$. *Если сублинейный оператор* T *удовлетворяет векторно-значному неравенству в* $L^{q(\cdot)}(w)$,

$$\bigg\|\bigg(\sum_{j=1}^\infty |Tf_j|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \leq C\bigg\|\bigg(\sum_{j=1}^\infty |f_j|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \tag{3.2}$$

для всех последовательностей локально интегрируемых функций $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ *в* $\mathbb{R}^n$, *тогда*

$$\bigg\|\bigg(\sum_{j=1}^\infty |Tf_j|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)} \leq C\bigg\|\bigg(\sum_{j=1}^\infty |f_j|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}. \tag{3.3}$$

где константа $C > 0$ *не зависит от* $\{f_j\}_{j=1}^\infty$.

Лемма 3.1 (см. [17, Следствие 3.2])**.** *Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *и* w *- вес. Если максимальный оператор* $\mathcal{M}$ *ограничен в* $L^{q(\cdot)}(w)$ *и* $L^{q'(\cdot)}(w^{-1})$ *и* $r \in (1,\infty)$, *то существует положительная константа* C *такая, что*

$$\bigg\|\bigg(\sum_{j=1}^\infty (\mathcal{M}f_j)^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \leq C\bigg\|\bigg(\sum_{j=1}^\infty |f_j|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{L^{q(\cdot)}(w)}.$$

Из Теоремы 3.1 и Леммы 3.1 получаем следующее следствие.

Следствие 3.1. *Пусть* $r, p \in (1,\infty)$, $q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\theta > 0$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, *где* δ_1, $\delta_2 \in (0,1)$ *константы Леммы 2.2 для* $q(\cdot)$. *Тогда*

$$\bigg\|\bigg(\sum_{j=1}^\infty |\mathcal{M}f_j|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)} \leq C\bigg\|\bigg(\sum_{j=1}^\infty |f_j|^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)},$$

где константа $C>0$ не зависит от локально интегрируемых функций $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство Теоремы 3.1. Поскольку ограниченные функции с компактной поддержкой являются плотными в $M\dot{K}_{q_2(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)$, мы рассматриваем только f как ограниченную функцию с компактной поддержкой и записываем

$$f_j(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} f_j^l\chi_l =: \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_j^l, \quad j\in\mathbb{N}.$$

По Лемме 2.1 имеем

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|Tf_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)} \sim \max\Bigg\{\sup_{\delta>0}\sup_{k_0\le 0,k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\times\\
&\left(\delta^{\theta}\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=-\infty}^{\infty}Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}},\\
&\quad \sup_{\delta>0}\sup_{k_0>0,k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\Bigg(\delta^{\theta}\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=-\infty}^{\infty}Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\\
&\qquad +\delta^{\theta}\sum_{k=0}^{k_0}2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=-\infty}^{\infty}Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\Bigg)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}\Bigg\}\\
&\quad =: \max\{E, F+G\}.
\end{aligned}$$

Поскольку оценка F аналогична оценке E, то достаточно получить, что E и G ограничены в взвешенных гранд пространствах Герца-Моррея с переменными показателями. Легко видеть, что

$$E\lesssim\sum_{i=i}^{3}E_i \text{ и } G\lesssim\sum_{i=i}^{3}G_i,$$

где

$$E_1 := \sup_{\delta>0}\sup_{k_0\le 0,k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\delta^{\theta}\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=-\infty}^{k-2}Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}},$$

$$E_2 := \sup_{\delta>0}\sup_{k_0\le 0,k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\delta^{\theta}\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=k-1}^{k+1}Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}},$$

$$E_3 := \sup_{\delta>0}\sup_{k_0\le 0,k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\delta^{\theta}\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=k+2}^{\infty}Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}},$$

$$G_1 := \sup_{\delta>0}\sup_{k_0>0,k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\delta^{\theta}\sum_{k=0}^{k_0}2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=-\infty}^{k-2}Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

$$G_2 := \sup_{\delta>0}\sup_{k_0>0,k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\delta^{\theta}\sum_{k=0}^{k_0}2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=k-1}^{k+1}Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

$$G_3 := \sup_{\delta>0}\sup_{k_0>0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\delta^{\theta}\sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=k+2}^{\infty} Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Если $l \le k-2$, то мы делаем вывод, что $|x-y| \ge |x|-|y| > 2^{k-1}-2^l \ge 2^{k-2}$, $x \in D_k$, $y \in D_l$. Тогда из (3.1) для $\forall x \in D_k$, имеем

$$|Tf_j^l(x)| \lesssim 2^{-kn}\int_{\mathbb{R}^n}|f_j^l(y)|\mathrm{d}y.$$

Таким образом, согласно неравенству Минковского, неравенству Гельдера, Определению 2.2 и Лемме 2.2, получаем

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=-\infty}^{k-2} Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim \left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn}\int_{\mathbb{R}^n}|f_j^l(y)|\mathrm{d}y\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim \left\|\sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j^l(y)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}y\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j^l|^r\right)^{\frac{1}{r}} w\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_l w^{-1}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad\lesssim \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn}|B_k|\|\chi_{B_k}\|^{-1}_{L^{q'(\cdot)}(w^{-1})}\|\chi_{B_l}\|_{L^{q'(\cdot)}(w^{-1})}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{(l-k)n\delta_2}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Если $l \ge k+2$, то мы делаем вывод, что $|x-y| \ge |y|-|x| > 2^{l-2}$, $x \in D_k$, $y \in D_l$. Для $\forall x \in D_k$, поскольку сублинейный оператор T удовлетворяет (3.1), то имеем

$$|Tf_j^l(x)| \lesssim 2^{-ln}\int_{\mathbb{R}^n}|f_j^l(y)|\mathrm{d}y.$$

Таким образом, согласно неравенству Минковского, неравенству Гельдера, Определению 2.2 и Лемме 2.2, получаем

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{l=k+2}^{\infty}Tf_j^l\Big|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\chi_k\Big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{l=k+2}^{\infty}2^{-ln}\int_{\mathbb{R}^n}|f_j^l(y)|\mathrm{d}y\Big)^r\Big)^{\frac{1}{r}}\chi_k\Big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim\Big\|\sum_{l=k+2}^{\infty}2^{-ln}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j^l(y)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}y\chi_k\Big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim\sum_{l=k+2}^{\infty}2^{-ln}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\Big)^{\frac{1}{r}}w\chi_l\Big\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_l w^{-1}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad\lesssim\sum_{l=k+2}^{\infty}2^{-ln}|B_l|\|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\|\chi_{B_l}\|^{-1}_{L^{q(\cdot)}(w)}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\chi_l\Big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}
\end{aligned}$$

$$\lesssim\sum_{l=k+2}^{\infty}2^{(k-l)n\delta_1}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\chi_l\Big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}. \tag{3.5}$$

Оценим E_1. Поскольку $\varepsilon_1=n\delta_2-\alpha(0)>0$ и (3.4) и неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned}
&\Big(\delta^{\theta}\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\Big(\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{(l-k)n\delta_2}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\chi_l\Big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\Big)^{p(1+\delta)}\Big)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}\\
&\lesssim\Big(\delta^{\theta}\sum_{k=-\infty}^{k_0}\Big(\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{\alpha(0)l}2^{(l-k)\varepsilon_1}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\chi_l\Big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\Big)^{p(1+\delta)}\Big)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}\\
&\lesssim\Big(\delta^{\theta}\sum_{k=-\infty}^{k_0}\Big(\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{\alpha(0)lp(1+\delta)}2^{(l-k)\varepsilon_1p(1+\delta)/2}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\chi_l\Big\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)}\Big)\\
&\quad\times\Big(\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{(l-k)\varepsilon_1(p(1+\delta))'/2}\Big)^{\frac{p(1+\delta)}{(p(1+\delta))'}}\Big)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}\\
&\lesssim\Big(\delta^{\theta}\sum_{l=-\infty}^{k_0}2^{\alpha(0)lp(1+\delta)}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\chi_l\Big\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)}\Big)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.
\end{aligned}$$

Следовательно

$$E_1\lesssim\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}.$$

Оценим E_2. Для $k-1 \le l \le k+1$, $\forall x \in D_k$, поскольку T удовлетворяет (3.2), то по неравенству Минковского получаем

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=k-1}^{k+1} Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \lesssim \left\|\sum_{l=k-1}^{k+1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|Tf_j^l|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}$$

$$\lesssim \sum_{l=k-1}^{k+1}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|Tf_j^l|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \lesssim \sum_{l=k-1}^{k+1}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}. \tag{3.6}$$

Таким образом, из (3.6) получаем

$$E_2 \lesssim \sup_{\delta>0}\sup_{k_0\le 0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\delta^\theta\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\sum_{l=k-1}^{k+1}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim \sup_{\delta>0}\sup_{k_0\le 0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\delta^\theta\sum_{l=-\infty}^{k_0+1} 2^{l\alpha(0)p(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim \left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}.$$

Оценим E_3. Из (3.5) получаем

$$E_3 \lesssim \sup_{\delta>0}\sup_{k_0\le 0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}E_{3,1} + \sup_{\delta>0}\sup_{k_0\le 0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}E_{3,2},$$

где

$$E_{3,1} := \left(\delta^\theta\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\left(\sum_{l=k+2}^{-1} 2^{(k-l)n\delta_1}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

и

$$E_{3,2} := \left(\delta^\theta\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{(k-l)n\delta_1}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Оценим $E_{3,1}$. Поскольку $\varepsilon_2 = n\delta_1 + \alpha(0) > 0$ и из неравенства Гельдера, получаем

$$E_{3,1} \lesssim \left(\delta^\theta\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{l=k+2}^{-1} 2^{\alpha(0)l}2^{(k-l)\varepsilon_2}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim \left(\delta^\theta\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{l=k+2}^{-1} 2^{\alpha(0)lp(1+\delta)}2^{(k-l)\varepsilon_2 p(1+\delta)/2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)\left(\sum_{l=k+2}^{-1} 2^{(k-l)\varepsilon_2(p(1+\delta))'/2}\right)^{\frac{p(1+\delta)}{(p(1+\delta))'}}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim \left(\delta^\theta\sum_{l=-\infty}^{k_0} 2^{\alpha(0)lp(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Оценим $E_{3,2}$. Поскольку $\varepsilon_3 = n\delta_1 + \alpha_\infty > 0$ и из неравенства Гельдера, получаем

$$E_{3,2} \lesssim \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k(\alpha(0)+n\delta_1)p(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-ln\delta_1} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} 2^{-l\varepsilon_3} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\varepsilon_3 (p(1+\delta))'}\right)^{\frac{p(1+\delta)}{(p(1+\delta))'}}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Следовательно, имеем

$$E_3 \lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)}.$$

Оценим G_1. Из (3.4), получаем

$$G_1 \lesssim \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0, k_0\in\mathbb{Z}} G_{1,1} + \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0, k_0\in\mathbb{Z}} G_{1,2},$$

где

$$G_{1,1} := 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{(l-k)n\delta_2} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

и

$$G_{1,2} := 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{k-2} 2^{(l-k)n\delta_2} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

Оценим $G_{1,1}$. Поскольку $\varepsilon_4 = n\delta_2 - \alpha(0) > 0$, $\alpha_\infty - n\delta_2 < 0$ и из неравенства Гельдера, получаем

$$G_{1,1} \lesssim \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k(\alpha_\infty - n\delta_2)p(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{ln\delta_2} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{ln\delta_2} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} 2^{l\varepsilon_4}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right) \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\varepsilon_4 (p(1+\delta))'}\right)^{\frac{p(1+\delta)}{(p(1+\delta))'}}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Оценим $G_{1,2}$. Используя тот же аргумент, что и для E_1 а также тот факт, что $\varepsilon_5 = n\delta_2 - \alpha_\infty > 0$, мы получаем желаемый результат. Таким образом, мы получаем

$$G_1 \lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}.$$

Оценим G_2. Из (3.6) получаем

$$G_2 \lesssim \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0,k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \sum_{l=k-1}^{k+1} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim \sup_{\delta>0} \sup_{k_0\leq 0,k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=0}^{k_0+1} 2^{l\alpha_\infty p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}.$$

Оценим G_3. Используя тот же аргумент, что и для $E_{3,1}$, а также тот факт, что $\varepsilon_6 = n\delta_1 + \alpha_\infty > 0$, мы получаем желаемый результат.

Объединяя оценки E, F и G, получаем (3.3). $\square$

4. Характеристики пространств Герца-Моррея-Лизоркина-Трибеля

В этом разделе мы представляем взвешенные пространства Герца-Моррея-Трибеля-Лизоркина с переменным показателем и получим их эквивалентные квазинормы. Далее, для удобства, взвешенные пространства Герца-Моррея $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)$ обозначим $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}$. Для дальнейшего рассмотрения вспомним некоторые обозначения.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ пространство обобщённых функций медленного роста в $\mathbb{R}^n$. Для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, пусть $\mathcal{F}f$ или $\hat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f, определяемое следующим образом

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $f^\vee(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ обозначает обратное преобразование Фурье от f.

Определение 4.1. Пусть ϕ_0 - функция в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяющая $\widehat{\phi}_0(x) = 1$ для $|x| \leq 1$ и $\widehat{\phi}_0(x) = 0$ для $|x| \geq 2$. Положим $\widehat{\phi}(x) = \widehat{\phi}_0 - \widehat{\phi}_0(2x)$ и $\widehat{\phi}_j(x) = \widehat{\phi}(2^{-j}x)$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\{\widehat{\phi}_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ является гладким диадическим разрешением единицы и $\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\phi}_j(x) = 1 \quad$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 4.2. Пусть $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta > 0$, $s \in \mathbb{R}$ и $\beta \in (0,\infty)$. Более того, пусть $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ будет системой, как в Определении 4.1 и w - весом. Взвешенное пространство Герца-Моррея-Трибеля-Лизоркина с переменными показателями $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, таких что

$$\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \|\{2^{js}\phi_j * f\}_{j=0}^{\infty}\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}(\ell^\beta)} < \infty.$$

Определение 4.3. Пара функций (ϕ, Φ) называется допустимой, если $\phi, \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют

$$\text{supp}\ \widehat{\phi} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\} \text{ и } |\widehat{\phi}| \geq C > 0 \text{ когда } \frac{3}{5} \leq |\xi| \leq \frac{5}{3} \tag{4.1}$$

и

$$\text{supp}\ \widehat{\Phi} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\} \text{ и } |\widehat{\Phi}| \geq C > 0 \text{ когда } |\xi| \leq \frac{5}{3}, \tag{4.2}$$

где C — положительная константа, независимая от $\xi \in \mathbb{R}^n$. Во всей статье мы устанавливаем $\tilde{\phi}(x) := \overline{\phi(-x)}$.

Следующие две леммы взяты из [18, Леммы 2.41 и 2.45].

Лемма 4.1. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $N > 0$, $m > n$ и $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует положительная константа C , независимая от N и x, такая, что для всех $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $|\omega_N * f(x)| \leq C\mathcal{M}f(x)$, где $\omega_N = N^n\omega(N\cdot)$.*

Лемма 4.2. *Пусть $r, R, N > 0$, $m > n$ и $\vartheta, \omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ с $\text{supp}\ \mathcal{F}\omega \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\}$. Тогда существует $C = C(r, m, n) > 0$, такая, что для всех $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,*

$$|\vartheta_R * \omega_N * g(x)| \leq C \max\{1, (N/R)^m\}(\eta_{N,m} * |\omega_N * g|^r(x))^{1/r}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\vartheta_R = R^n\vartheta(R\cdot)$, $\omega_N = N^n\omega(N\cdot)$ и $\eta_{N,m} = N^n(1 + N|\cdot|)^{-m}$.

В соответствии с [19], при заданной допустимой паре (ϕ, Φ) мы можем выбрать другую допустимую пару (ψ, Ψ) таким образом, что

$$\mathcal{F}\tilde{\Phi}(\xi)\mathcal{F}\Psi(\xi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{F}\tilde{\phi}(2^{-\nu}\xi)\mathcal{F}\psi(2^{-\nu}\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3}$$

Следующая Лемма является формулой воспроизведения Кальдерона; см. [20, (12.4)] и [21, Лемма 2.3].

Лемма 4.3. *Пусть $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (4.1) и $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (4.2) так, что выполняется (4.3) . Тогда для всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,*

$$\begin{aligned} f &= \tilde{\Phi} * \Psi * f + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\phi}_k * \psi_k * f \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \tilde{\Phi} * f(m)\Psi_m + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kn/2} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \tilde{\phi}_k * f(2^{-k}m)\psi_{k,m} \end{aligned}$$

в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, где $\Psi_m = \Psi(\cdot - m)$ и $\psi_{k,m} = 2^{kn/2}\psi(2^k \cdot -m)$, $m \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.1. *Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,\infty)$, $\beta \in (0,\infty]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, *где* δ_1, $\delta_2 \in (0,1)$ *- константы Леммы 2.2 для* $q(\cdot)$. *Умеренное распределение* f *принадлежит* $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда* $\|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} < \infty$, *где*

$$\|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \|\{2^{js}\phi_j * f\}_{j=0}^\infty\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}(\ell^\beta)},$$

ϕ *и* Φ *удовлетворяют (4.1) и (4.2), соответственно, и* $\phi_j = 2^{jn}\phi(2^j\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$, *когда* $j = 0$, ϕ_0 *заменяется на* Φ. *Более того, квазинормы* $\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}$ *и* $\|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}$ *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (4.1) и $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (4.2) таким образом, что выполняется (4.3) . По Лемме 4.3 и, анализируя условия на носитель, имеем

$$\phi_k * f = \sum_{j=k-1}^{k+1} \phi_k * \tilde{\phi}_j * \psi_j * f + \begin{cases} 0 & \text{если } k \geq 3 \\ \phi_k * \tilde{\Phi} * \Psi * f, & \text{если } k \in \{1,2\} \end{cases}$$

и

$$\phi_0 * f = \phi_0 * \tilde{\phi}_1 * \psi_1 * f + \phi_0 * \tilde{\Phi} * \Psi * f.$$

Для $j \in \{k-1, k, k+1\}$, $k \geq 3$, по Леммам 4.2 и 4.1 получаем

$$|\phi_k * \tilde{\phi}_j * \psi_j * f| \lesssim \mathcal{M}_t(\tilde{\phi}_j * f), \quad t \in (0,\infty).$$

Аналогично, когда $k \in \{0,1,2\}$, имеем

$$|\phi_k * \tilde{\Phi} * \Psi * f| + |\phi_0 * \tilde{\phi}_1 * \psi_1 * f| \lesssim \mathcal{M}_t(\tilde{\Phi} * f) + \mathcal{M}_t(\tilde{\phi}_1 * f), \quad t \in (0,\infty).$$

Возьмем $t \in (0, \min\{q^-, \beta\})$, тогда согласно Следствию 3.1 получаем

$$\|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

Противоположное неравенство следует из тех же аргументов. Обратите внимание, что мы используем гладкое разложение единицы (Определение 4.1). На этом доказательство завершено. $\square$

Следствие 4.1. *Пусть* $\{\varpi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ *и* $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ *— два разложения единицы. Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,\infty)$, $\beta \in (0,\infty]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, *где* δ_1, $\delta_2 \in (0,1)$ *- константы в Лемме 2.2 для* $q(\cdot)$. *Тогда*

$$\|f\|^\varpi_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \sim \|f\|^\phi_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \sim \|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, и $a > 0$. Для каждой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, максимальные функции Пеетра для f определяются следующим образом:

$$\phi_j^{*,a} f(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|\phi_j * f(y)|}{(1+2^j|x-y|)^a}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. *Пусть* $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ *- разложения единицы. Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,\infty)$, $\beta \in (0,\infty]$, $s \in \mathbb{R}$, $t \in (0, \min\{q^-, \beta\})$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, *где* δ_1, $\delta_2 \in (0,1)$ *- константы в Лемме 2.2 для* $q(\cdot)$. *Если* $at > n$, *тогда*

$$\|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{js\beta} |\phi_j^{*,a} f|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}$$

эквивалентны (квази-)нормам в $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для любой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ покажем, что

$$\|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

По определению максимального оператора Пеетра (4.4) получаем, что $|\phi_j * f(x)| \lesssim \phi_j^{*,a} f(x)$ что означает, что для любой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

Остается показать, что для любой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

Возьмем $t \in (0, \min\{q^-, \beta\})$, $a > n/t$ и $k \in \mathbb{N}_0$. Согласно Лемме 4.2 получаем

$$\phi_j * f(y) \lesssim (\eta_{j,at} * |\phi_j * f|^t(y))^{1/t}, \quad j \in \mathbb{N}_0, \ y \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

Разделив обе части (4.5) на $(1+2^j|x-y|)^a$, и в правой части используем неравенство,

$$(1+2^j|x-z|)^a \le (1+2^j|x-y|)^a (1+2^j|y-z|)^a, \quad \text{для всех } x,y,z \in \mathbb{R}^n,$$

а в левой части возьмем супремум $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}(\phi_j^{*,a} f(x))^t &\lesssim \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi_j * f(z)|^t}{(1+2^j|y-z|)^{at}} \mathrm{d}z \frac{1}{(1+2^j|x-y|)^{at}} \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi_j * f(z)|^t}{(1+2^j|x-z|)^{at}} \mathrm{d}z \sim \eta_{j,at} * |\phi_j * f|^t(x) \lesssim (\mathcal{M}_t(\phi_j * f))^t,\end{aligned}$$

где мы используем Лемму 4.1. По Следствию 3.1 и Теореме 4.1 получаем

$$\|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{js\beta} |\phi_j * f|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}} \lesssim \|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

Теорема доказана. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,\infty)$, $\beta \in (0,\infty]$ *и* $w \in A_{q(\cdot)}$. *Для любой последовательности* $\{g_j\}_{j=0}^\infty$ *неотрицательных измеримых функций в* $\mathbb{R}^n$ *обозначим*

$$G_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-|k-j|\delta} g_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда существует положительная константа $C = C(q(\cdot), q(\cdot), \delta)$, *такая что*

$$\big\| \|\{G_j\}\|_{\ell_j^\beta} \big\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}} \le C \big\| \|\{g_k\}\|_{\ell_k^\beta} \big\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}}. \tag{4.6}$$

Доказательство. По Лемме 2 в [22], взяв нормы $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}$ по обеим частям неравенства, получаем (4.6). □

Пусть k_0, $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $S \ge -1$ целое число, такое что для любого $\epsilon > 0$

$$\mathcal{F}k(\xi) > 0 \quad \text{для } |\xi| < 2\epsilon, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{F}k(\xi) > 0 \quad \text{для } \epsilon/2 < |\xi| < 2\epsilon \tag{4.8}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha k(x) \mathrm{d}x = 0 \quad \text{для каждой } |\alpha| \le S, \tag{4.9}$$

где (4.7) и (4.8) являются условиями Таубера, а (4.9) условиями момента на k. Напомним обозначения.

$$k_t(x) := t^{-n} k(t^{-1}x), \quad k_j(x) := k_{2^{-j}}(x), \quad \text{для } t > 0 \text{ и } j \in \mathbb{N}.$$

Для любого $a > 0$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$, определим

$$k_j^{*,a} f(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|k_j * f(x+y)|}{(1+|y|/j)^a}, \quad j > 0. \tag{4.10}$$

Теорема 4.3. *Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,\infty)$, $\beta \in (0,\infty]$, $a \in \mathbb{R}$, $r \in (0, \min\{q^-, \beta\})$, $s < S+1$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, *где* δ_1, $\delta_2 \in (0,1)$ *- константы в Лемме 2.2 для* $q(\cdot)$. *Предположим, что* k_0, $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *являются функциями, удовлетворяющими (4.7), (4.8) и (4.9). Если* $ar > n$, *то пространство* $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ *в Определении 4.2 можно охарактеризовать следующим образом*

$$M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n) := \big\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|^i_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} < \infty \big\}, \quad i = 1, \cdots, 5,$$

где

$$\|f\|^1_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \|k_0 * f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}} + \left\| \left(\int_0^1 t^{-s\beta} |k_t * f|^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}},$$

$$\|f\|^2_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \|k_0^* f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}} + \left\| \left(\int_0^1 t^{-s\beta} |k_t^{*,a} f|^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}},$$

$$\|f\|^3_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \|k_0 * f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}} + \left\| \left(\int_0^1 t^{-s\beta} \int_{|z|<t} |k_t * f|(\cdot + z)^\beta \mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}} \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}},$$

$$\|f\|^4_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{js\beta} |k_j^{*,a} f|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}},$$

$$\|f\|^5_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{js\beta} |k_j * f|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}}.$$

Тогда $\|f\|^i_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}$, $i = 1, \cdots, 5$, *являются эквивалентными (квази-) нормами в* $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. По аналогии с доказательством в [23, Теорема 2.6], где [23, Теорема 2.1 и Лемма 2.13] заменены Следствием 3.1 и Леммой 4.4, мы получаем желаемый результат. В связи с ограничением объёма статьи подробности опускаются. □

Примечание 4.1. Аналогично, можно ввести взвешенные гранд пространства Герца-Моррея-Бесова с переменными показателями. Предоставляем это на усмотрение заинтересованных читателей.

Abstract. Let a vector-valued sublinear operator satisfy the size condition and be bounded on weighted Lebesgue spaces with variable exponent. Then we obtain its boundedness on weighted grand Herz-Morrey spaces with variable exponents. Next we introduce weighted grand Herz-Morrey-Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents and provide their equivalent quasi-norms via maximal functions.

Список литературы

[1] O. Kováčik and J. Rákosník, “On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$”, Czechoslov. Math. J. **41**, 592 -– 618 (1991).

[2] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, “The maximal function on variable L^p spaces”, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28**, 223 – 238 (2003).

[3] L. Diening, “Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$”, Math. Inequal. Appl. **7**, 245 -– 253 (2004).

[4] A. Nekvinda, “Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$”, Math. Inequal. Appl. **7**, 255 – 266 (2004).

[5] L. Diening, “Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces”, Bull. Sci. Math. **129**, 657 -– 700 (2005).

[6] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, “Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent”, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **34**, 503 – 522 (2009).

[7] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, “Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces”, J. Math. Anal. Appl. **394**, 744 – 760 (2012).

[8] B. Muckenhoupt, “Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function”, Tran. Amer. Math. Soc. **165**, 207 – 226 (1972).
[9] L. Wang and L. Shu, “Boundedness of some sublinear operators on weighted variable Herz-Morrey spaces”, J. Math. Inequal. **12**, 31 – 42 (2018).
[10] S. R. Wang and J. S. Xu, “Boundedness of vector-valued sublinear operators on weighted Herz-Morrey spaces with variable exponents”, Open Math. **19**, 412 – 426 (2021).
[11] H. Nafis and H. Rafeiro and M.A. Zaighum, “A note on the boundedness of sublinear operators on grand variable Herz spaces”, J. Inequal. Appl. **2020**, 1 – 13 (2020).
[12] W. J. Zhang and S. X. He and J. Zhang, “Boundedness of sublinear operators on weighted grand Herz-Morrey spaces”, AIMS Math. **8**, 17381 – 17401 (2023).
[13] J. Xu, “Equivalent norms of Herz-type Besov and Triebel-Lizorkin spaces”, J. Funct. Spaces. Appl. **3**, 17 -– 31 (2005).
[14] J. Xu and D. Yang, “Herz-type Triebel-Lizorkin spaces. I”, Acta Math. Sin., Engl. Ser. **21**, 643 -– 654 (2005).
[15] C. Shi and J. Xu, “Herz type Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents”, Front. Math. China **8**, 907 -– 921 (2013).
[16] M. Izuki and T. Noi, “Boundedness of fractional integrals on weighted Herz spaces with variable exponent”, J. Inequal. Appl. **2016**, 15 p. (2016).
[17] D. Cruz-Uribe and L.-A. D. Wang, “Extrapolation and weighted norm inequalities in the variable Lebesgue spaces”, Trans. Am. Math. Soc. **369**, 1205 – 1235 (2017).
[18] D. Douadi, “Lorentz Herz-type Besov-Triebel-Lizorkin spaces”, arXiv:2406.02705v3
[19] M. Frazier and B. Jawerth, “A discrete transform and decomposition of distribution spaces”, J. Funct. Anal. **93**, 34 – 107 (1990).
[20] M. Frazier and B. Jawerth, “A discrete transform and decomposition of distribution spaces”, J. Funct. Anal. **93**, 34 -– 170 (1990).
[21] W. Yuan and W. Sickel and D. Yang, Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel, Lecture Notes in Mathematics 2005, Springer-Verlag, Berlin (2010). https://doi.org/10.1007/978-3-642-14606-0
[22] V. S. Rychkov, “On a theorem of Bui, Paluszyński, and Taibleson”, Proc. Steklov Inst. Math. **227**, 280 – 292 (1999).
[23] T. Ullrich, “Continuous characterizations of Besov-Lizorkin-Triebel spaces and new interpretations as coorbits”, J. Funct. Spaces Appl. **2012**, 47 p. (2012).

Поступила 10 декабря 2024

После доработки 29 января 2025

Принята к публикации 02 февраля 2025