

ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

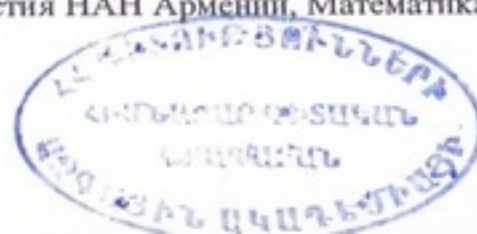
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ МАТЕМАТИКА

ТОМ 60 № 3 2025



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

Известия НАН Армении. Математика.



ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Վ. Ս. Արարեկյան	Գ. Ա. Կարազուլյան
Կ. Լ. Ավետիսյան	Յու. Ա. Կուտոյանց
Գ. Գ. Գևորգյան	Ռ. Վ. Համբարձումյան
Մ. Ս. Գինովյան	Ա. Հ. Հովհաննիսյան
Ա. Ս. Դալայան	Հ. Շահիզուլյան
Ն. Բ. Ենգիբարյան	Ա. Շիրիկյան
Խ. Ա. Խաչատրյան	Բ. Ս. Նահապետյան
Վ. Կ. Օհանյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ)	Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Սիարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

Կ. Լ. Ավետիսյան	Բ. Ս. Նահապետյան
Ր. Վ. Ամբարձումյան	Դ. Ա. Կարազուլյան
Վ. Ս. Աթաբեկյան	Ե. Ա. Կուտոյանց
Դ. Դ. Դևորկյան	Ա. Օ. Օգանիսյան
Մ. Ս. Դիովյան	Բ. Մ. Սոցոսյան
Ա. Ս. Դալալյան	Մ. Ա. Մաչատրյան
Ն. Բ. Էնգիբարյան	Ա. Մախգուլյան
Վ. Կ. Օգանյան (զամ. գլաւնոյ ռեդակտորա)	Ա. Միրիկյան

Отвественный секретарь Н. Г. Агаронян

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПАРАХ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ УОЛША

М. Г. ГРИГОРЯН, А. А. САРГСЯН

Ереванский государственный университет¹
E-mails: *gmarting@ysu.am*; *asargsyan@ysu.am*

Аннотация. В работе доказано, что существует весовое пространство $L_\mu^1[0, 1]$, для которого можно построить универсальную пару (U, δ) относительно системы Уолша.

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: ряд Фурье; система Уолша; коэффициенты Фурье; весовое пространство; сходимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа продолжает исследования авторов ([1]-[5]) связанных с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых по системе Уолша универсальны в смысле знаков в различных функциональных классах. Необходимо отметить, что понятие универсального ряда восходит к работам Меньшова [6] и Талаляна [7]. Наиболее общие результаты были получены ими и их учениками.

Пусть $L_\mu^p[0, 1]$, $p > 0$ – класс всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых $\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx < \infty$, где $\mu(x)$, $x \in [0, 1]$ – весовая функция (т.е. измеримых на $[0, 1]$, положительных функций). Пусть $f(x)$, $f_k(x) \in L_\mu^p[0, 1]$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ ($\mathbf{N}$ – совокупность натуральных чисел).

Говорят, что ряд $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ сходится к $f(x)$ в $L_\mu^p[0, 1]$, если частичные суммы: $\sum_{k=0}^n f_k(x)$, $k \in \mathbf{N}$ этого ряда сходятся к $f(x)$ в метрике $L_\mu^p[0, 1]$, т.е.

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right|^p \mu(x) dx.$$

Пусть $L^0[0, 1]$ – класс всех почти везде конечных, измеримых на $[0, 1]$ функций. Под сходимостью в $L^0[0, 1]$ мы будем подразумевать сходимость почти всюду.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066

Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система на $[0, 1]$ и пусть

$$(1.2) \quad c_k(U) = \int_0^1 U(x) \varphi_k(x) dx, \quad k \in \mathbf{N}$$

коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[0, 1]$.

Пусть S – одно из пространств $L_{\mu}^p[0, 1]$, $p > 0$ или $L^0[0, 1]$.

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $U \in L^1[0, 1]$ и последовательность знаков $\delta = \{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ образуют универсальную пару (U, δ) для класса S (для пространства $L_{\mu}^1[0, 1]$) относительно системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, если частичные суммы ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x)$ плотны в S .

Определение 1.2. Функция $U \in L^1[0, 1]$ называется универсальной для класса S , относительно системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в смысле знаков, если для каждой функции $f \in S$ можно найти последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x)$ сходится к $f(x)$ в S .

Нетрудно видеть, что каковы бы не были число $p \in [1, \infty)$ и ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ не существует функции $U \in L^1[0, 1]$, которая была бы универсальной для класса $L^p[0, 1]$, $p \geq 1$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ в смысле знаков.

В [4] построена функция $U \in L^1[0, 1]$, которая универсальна для класса $L^0[0, 1]$, относительно системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в смысле знаков.

Первые примеры универсальных функций были построены Биркгофом [8] в рамках комплексного анализа, при этом целые функции представлялись в любом круге равномерно сходящимися сдвигами универсальной функции, Марцинкевичем [9] в рамках действительного анализа, при этом любая измеримая функция представлялась как предел почти всюду некоторой последовательности разностных отношений универсальной функции. (см. также [10]–[13]).

Отметим, что в работах [14]–[21] были получены результаты, связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых (по системе Уолша либо по тригонометрической системе) универсальны в том или ином смысле в различных функциональных классах.

В работах [3] и [17] был изучен вопрос существования как универсальных пар (U, δ) , так и универсальных функций в смысле знаков для классов $L^p[0, 1]$ при $p \in (0, 1)$ относительно системы Уолша, а также относительно тригонометрической системы.

В этой статье мы рассмотрим аналогичный вопрос для класса $L_\mu^1[0, 1]$ и докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Существует весовое пространство $L_\mu^1[0, 1]$, для которого можно построить универсальную пару (U, δ) относительно системы Уолша.*

Замечание 1.1. *Нетрудно видеть, что теорема 1 окончательна в следующих смыслах:*

- а) для класса $L^1[0, 1]$ не существует универсальной пары (U, δ) ,
- б) коково бы не было весовое пространство $L_\mu^1[0, 1]$ для него не существует интегрируемой функции, частичные суммы ряда Фурье-Уолша которой плотны в $L_\mu^1[0, 1]$.

Теорема 1.1 следует из более сильной Теоремы 1.2.

Теорема 1.2. *Существует весовое пространство $L_\mu^1[0, 1]$ с $0 < \mu(x) \leq 1, x \in [0, 1]$, для которого можно построить универсальную пару (U, δ) относительно системы Уолша такую, что*

- а) функция $U \in L^1[0, 1]$ имеет монотонно убывающие коэффициенты Фурье по системе Уолша и ее ряд Фурье – Уолша сходится в метрике $L^1[0, 1]$,

б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\#\{k \in \mathbf{N}, k \leq n; \delta_k = 1\}}{n} = 1,$$

где $\#\{E\}$ – число элементов конечного множества E .

- с) функция $U \in L^1[0, 1]$ является универсальной для класса $L_\mu^1[0, 1]$ относительно системы Уолша в смысле знаков.

Вопрос. Верна ли теорема 1.2 для тригонометрической системы (и для других классических систем)?

2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

При доказательстве теоремы 1.2 воспользуемся следующей леммой, доказанной в работе [2].

Лемма 2.1. *Существует весовая функция $0 < \mu(x) \leq 1$ такая, что для любых чисел $n_0 \geq 1$, $\eta \in (0, 1)$ и ступенчатой функции $f(x) = \sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} \tilde{\gamma}_m \chi_{\tilde{\Delta}_m}(x)$, где $\tilde{\gamma}_m \neq 0$ и $\{\tilde{\Delta}_m\}_{m=1}^{\tilde{\nu}_0}$ – суть непересекающиеся двоичные интервалы с $\sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} |\tilde{\Delta}_m| = 1$. Тогда можно найти полиномы*

$$H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} a_k W_k(x),$$

$$Q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1,$$

по системе Уолша, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $0 < a_{k+1} \leq a_k < \eta, \quad k \in [2^{n_0}, 2^n - 1),$
- 2) $\int_0^1 |f(x) - Q(x)| \mu(x) dx < \eta,$
- 3) $\max_{2^{n_0} \leq M < 2^n} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^M \delta_k a_k W_k(x) \right| \mu(x) dx < 5 \int_0^1 |f(x)| \mu(x) dx + \eta,$
- 4) $\max_{2^{n_0} \leq M < 2^n} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right| dx < \eta.$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ есть последовательность всех ступенчатых функций вида

$$(3.1) \quad f_n(x) = \sum_{j=1}^{2^{l_n}} \gamma_n^{(j)} \chi_{\Delta_{l_n}^{(j)}}(x)$$

с рациональными $\gamma_n^{(j)} \neq 0$ и условием $\sum_{j=1}^{2^{l_n}} |\Delta_j^{(j)}| = 1$, где $\{\Delta_{l_n}^{(j)}\}_{j=1}^{2^{l_n}}$ — непересекающиеся двоичные интервалы. Применим Лемму 2.1, полагая $n_0 = 1$, $\eta = 2^{-5}$, $f(x) = f_1(x)$. Тогда определяются полиномы по системе Уолша вида

$$U_1^{(1)}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_1^*-1} a_k^{(1)} W_k(x), \quad Q_1^{(1)}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_1^*-1} \delta_k^{(1)} a_k^{(1)} W_k(x), \quad M_1 = 2, \quad M_1^* = 2^{m_1},$$

удовлетворяющие условиям:

$$0 < a_{k+1}^{(1)} \leq a_k^{(1)} < \frac{1}{8}, \quad \delta_k^{(1)} = \pm 1, \quad k \in [M_1, M_1^*),$$

$$\int_0^1 |f_1(x) - Q_1^{(1)}(x)| \mu(x) dx < 2^{-6},$$

$$\int_0^1 |Q_1^{(1)}(x)| dx \leq \max_{m \in [M_1, M_1^*)} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_1}^m \delta_k^{(1)} a_k^{(1)} W_k(x) \right| dx < 4 \int_0^1 |f_1(x)| dx,$$

$$\int_0^1 |U_1^{(1)}(x)| dx < \max_{m \in [M_1, M_1^*)} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_1}^m a_k^{(1)} W_k(x) \right| dx < 2^{-3}.$$

Положим

$$M_2 = 2^4 M_1^*, \quad U_1^{(*)}(x) = \sum_{k=M_1^*}^{M_2} b_k^{(1)} W_k(x),$$

где

$$0 < b_{M_2-1}^{(1)} < \dots < b_k^{(1)} < \dots < b_{M_1^*}^{(1)} < a_{M_1^*-1}^{(1)}, \quad \sum_{k=M_1^*}^{M_2-1} b_k^{(1)} < 2^{-4}.$$

Снова применим лемму, полагая

$$n_0 = [\log_2 M_2], \quad \eta = \min\{b_{M_2-1}^{(1)}; 2^{-8}\}, \quad f(x) = \{f_1(x) - U_1^{(1)}(x) - U_1^{(*)}(x)\}.$$

Тогда определяются полиномы по системе Уолша вида

$$U_1^{(2)}(x) = \sum_{k=M_2}^{M_3-1} a_k^{(1)} W_k(x), \quad Q_1^{(2)}(x) = \sum_{k=M_2}^{M_3-1} \delta_k^{(1)} a_k^{(1)} W_k(x), \quad k \in [M_2, M_3) = [2^{m_1}, 2^{m_2}),$$

удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} 0 < a_{M_3-1}^{(1)} < \dots < a_{k+1}^{(1)} \leq a_k^{(1)} < a_{M_2}^{(1)} < b_{M_2-1}^{(1)}, \quad k \in [M_2, M_3), \\ \delta_k^{(1)} = \pm 1, \forall k \in [M_2, M_3), \\ \int_0^1 |(f_1(x) - U_1^{(1)}(x)) - U_1^{(*)}(x) - Q_1^{(2)}(x)| \mu(x) dx < 2^{-8}, \\ \int_0^1 |U_1^{(2)}(x)| dx < \max_{m \in [M_2, M_3)} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_2}^m a_k^{(1)} W_k(x) \right| dx < 2^{-8}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что продолжая эти рассуждения, мы можем по индукции определить последовательности полиномов $\{U_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{U_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{U_n^{(*)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^\infty$ вида

(3.2)

$$U_n^{(1)}(x) = \sum_{k=M_{2n-1}^*}^{M_n^*-1} a_k^{(n)} W_k(x), \quad Q_n^{(1)}(x) = \sum_{k=M_{2n-1}^*}^{M_n^*-1} \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x), \quad M_n^* = 2^{m_n},$$

$$(3.3) \quad U_n^{(*)}(x) = \sum_{k=M_n^*}^{M_{2n}-1} b_k^{(n)} W_k(x), \quad M_{2n} = 2^{4n} M_n^*, \quad \sum_{k=M_n^*}^{M_{2n}-1} b_k^{(n)} < 2^{-4(n+2)}$$

$$(3.4) \quad U_n^{(2)}(x) = \sum_{k=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} a_k^{(n)} W_k(x), \quad Q_n^{(2)}(x) = \sum_{k=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x),$$

которые для каждого $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям:

$$(3.5) \quad M_{2n-1} < M_n^* < M_{2n} = 2^{4n} M_n^* < M_{2n+1}, \quad \delta_k^{(n)} = 1, \quad k \in [M_n^*, M_{2n}),$$

$$(3.6) \quad \delta_k^{(n)} = \pm 1, \quad k \in [M_{2n-1}, M_n^*) \cup [M_{2n}, M_{2n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} 0 < a_{M_{2n+1}}^{(n+1)} < a_{M_{2n+1}-1}^{(n)} < \dots < a_{j+1}^{(n)} < a_j^{(n)} < \dots < \\ < a_{M_{2n}}^{(n)} < b_{M_{2n}-1}^{(n)} < \dots < b_{k+1}^{(n)} < b_k^{(n)} < \dots < b_{M_n^*}^{(n)} < \end{aligned}$$

$$(3.7) \quad < a_{M_1^*-1}^{(n)} < \dots < a_{s+1}^{(n)} < \dots < a_s^{(n)} < \dots < a_{M_{2n-1}}^{(n)} < a_{M_{2n-1}-1}^{(n-1)},$$

где $j \in [M_{2n}, M_{2n+1})$, $k \in [M_n^*, M_{2n})$, $s \in [M_{2n-1}, M_n^*)$.

$$(3.8) \quad \sum_{k=M_n^*}^{M_{2n}-1} b_k^{(n)} < 2^{-6(n+1)} < 2^{-4(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(3.9) \quad \int_0^1 |U_n^{(1)}(x)| dx \leq \max_{m \in [M_{2n-1}, M_{2n})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n-1}}^m a_k^{(n)} W_k(x) \right| dx < 2^{-5(n+1)}.$$

$$(3.10) \quad \int_0^1 |U_n^{(2)}(x)| dx \leq \max_{m \in [M_{2n}, M_{2n+1})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n}}^m a_k^{(n)} W_k(x) \right| dx < 2^{-5(n+1)},$$

$$(3.11) \quad \int_0^1 \left| \left\{ f_n(x) - \sum_{j=1}^n \left(U_j^{(1)}(x) + U_j^{(*)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right\} \mu(x) \right| dx < 2^{-3n},$$

$$(3.12) \quad \int_0^1 \left| \left\{ f_n(x) - Q_n^{(1)}(x) \right\} \mu(x) \right| dx < 2^{-4(n+4)},$$

$$(3.13) \quad \max_{m \in [M_{2n-1}, M_{2n})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n-1}}^m \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x) \right| \mu(x) dx < 5 \int_0^1 |f_n(x)| \mu(x) dx.$$

Положим

$$(3.14) \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_k = a_k^{(n)}, \quad k \in [M_{2n-1}, M_n^*) \cup [M_{2n}, M_{2n+1}),$$

$$a_k = b_k^{(n)}, \quad k \in [M_n^*, M_{2n}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad U_0(x) = 2W_0(x) + W_1(x).$$

Из (3.3), (3.8) – (3.10) следует

$$(3.15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \left| U_n^{(1)}(x) + U_n^{(*)}(x) + U_n^{(2)}(x) \right| dx \right) < \infty.$$

Определим функцию $U(x)$ следующим образом:

$$(3.16) \quad U(x) = U_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(U_n^{(1)}(x) + U_n^{(*)}(x) + U_n^{(2)}(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x).$$

Из (3.14) и (3.15) вытекает $U(x) \in L^1[0, 1]$.

Учитывая соотношения (3.2), (3.4), (3.14) – (3.16) получим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x)$ сходится к $U(x)$ по $L^1[0, 1]$ норме, и, следовательно,

$$(3.17) \quad a_k = c_k(U) = \int_0^1 U(x) W_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В силу (3.7) и (3.14) – (3.17) будем иметь $\{c_k(U)\}_{n=1}^{\infty} \searrow$.

Положим

$$\delta_k = \delta_k^{(n)}, \quad k \in [M_{2n-1}, M_n^*) \cup [M_{2n}, M_{2n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(3.18) \quad \delta_0 = \delta_1 = 1; \quad \delta_k = 1, \quad k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [M_n^*, M_{2n}).$$

Из (3.3), (3.6) и (3.18) следует

$$(3.19) \quad \frac{\#\{k \in \mathbf{N}, \quad k \leq M_{2n}; \quad \delta_k = 1\}}{M_{2n}} \geq \frac{M_{2n} - M_n^*}{M_{2n}} = \frac{2^{4n} M_n^* - M_n^*}{2^{4n} M_n^*} = 1 - \frac{1}{2^{4n}}.$$

В силу (3.18) и (3.19) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\#\{k \in \mathbf{N}, \quad k \leq n; \quad \delta_k = 1\}}{n} = 1,$$

т.е. утверждение б) теоремы 1.2 доказано.

Теперь докажем, что ряд

$$(3.20) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$$

универсален в пространстве $L_{\mu}^1[0, 1]$. Пусть $f(x) \in L_{\mu}^1[0, 1]$. Легко видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{n_k=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) такую, что

$$(3.21) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(x) - U_0(x) - f_{n_k}(x)| \mu(x) dx = 0, \quad n_1 \geq n^{\nabla}.$$

Обозначая через $N_k = M_{2n_k+1} - 1$, $k = 1, 2, \dots$, из (3.2) – (3.4), (3.11) и (3.21) будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| \sum_{s=0}^{N_k} \delta_s c_s(U) W_s(x) - f(x) \right| \mu(x) dx \leq \int_0^1 |f(x) - U_0(x) - f_{n_k}(x)| \mu(x) dx \leq \\ & \leq \int_0^1 \left| f_{n_k}(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \left(U_j^{(1)}(x) + U_j^{(*)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-n_k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что $\delta_k = \pm 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (см. (3.6) и (3.18)) будем иметь, что функция $U(x)$ и последовательность знаков $\delta = \{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ образуют универсальную пару (U, δ) .

Для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось проверить, что функция $U(x)$ универсальна для $L_{\mu}^1[0, 1]$ относительно системы Уолша в смысле знаков.

Пусть $f(x)$ произвольная функция из $L_{\mu}^1[0, 1]$. Из последовательности функций (3.1) выберем такую функцию $f_{\nu_1}(x)$, $\nu_1 \geq 2$, что

$$\int_0^1 |f^*(x) - f_{\lambda_1}(x)| \mu(x) dx < 2^{-2(n+4)}, \quad f^*(x) = f(x) - U_0(x).$$

Отсюда и из (3.12) вытекает

$$\int_0^1 \left| f^*(x) - Q_{\lambda_1}^{(1)}(x) \right| \mu(x) dx < 2^{-2(n+3)}.$$

Предположим, что уже определены числа $1 < \lambda_1 < \dots < \lambda_q$ функции $f_{\lambda_1}(x)$, ..., $f_{\lambda_q}(x)$, и полиномы $\{Q_{\lambda_r}^{(1)}(x)\}_{r=1}^q$, $\{\Lambda_n(x)\}_{n=1}^q$, удовлетворяющие условиям:

$$(3.22) \quad \Lambda_q(x) = \sum_{n=\lambda_{q-1}+1}^{\lambda_q} \left(U_j^{(1)}(x) + U_j^{(*)}(x) + U_j^{(2)}(x) \right), \quad f^*(x) = f(x) - U_0(x),$$

$$(3.23) \quad \int_0^1 \left| f_{\lambda_q}(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2q}, \quad q > 1,$$

$$(3.24) \quad \int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^q \left[\Lambda_j(x) - U_{\lambda_j}^{(1)}(x) + Q_{\lambda_j}^{(1)}(x) \right] \right\} \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2(q+1)}.$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\lambda_{q+1} > \lambda_q + q$, функцию $f_{\lambda_{q+1}}(x)$ из последовательности (3.1) таким образом, чтобы

$$(3.25) \quad \int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^q \left[\Lambda_j(x) - U_{\lambda_j}^{(1)}(x) + Q_{\lambda_j}^{(1)}(x) \right] \right\} - f_{\lambda_{q+1}}(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2(q+5)}.$$

Отсюда и из (3.12) и (3.25) вытекает

$$(3.26) \quad \int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^q \left[\Lambda_j(x) - U_{\lambda_j}^{(1)}(x) + Q_{\lambda_j}^{(1)}(x) \right] \right\} - Q_{\lambda_{q+1}}^{(1)}(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2(q+4)}$$

$$(3.27) \quad \int_0^1 \left| f_{\lambda_{q+1}}(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2(q+5)} + 2^{-2(q+5)} \leq 2^{-2(q+1)}, \quad q > 1.$$

Положим

$$(3.28) \quad \Lambda_{q+1}(x) = \sum_{n=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} \left(U_j^{(1)}(x) + U_j^{(2)}(x) + U_j^{(*)}(x) \right).$$

Отсюда и из (3.3), (3.8) – (3.10), (3.26) и (3.28) следует

$$(3.29) \quad \int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^{q+1} \left[\Lambda_j(x) - U_{\lambda_j}^{(1)}(x) + Q_{\lambda_j}^{(1)}(x) \right] \right\} \right| \mu(x) dx \leq$$

$$\leq 2^{-2(q+4)} + \int_0^1 \left| \Lambda_{q+1}(x) \right| \mu(x) dx + \int_0^1 \left| U_{\lambda_{q+1}}^{(1)}(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2(q+3)}.$$

Положим

$$(3.30) \quad \varepsilon_k = \delta_k^{(n)}, \quad k \in [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_q}); \quad \varepsilon_k = 1, \quad k \notin \bigcup_{q=1}^{\infty} [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_q}).$$

В силу (3.13), (3.7) и (3.30) имеем

$$(3.31) \quad \begin{aligned} & \max_{m \in [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_q})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2\lambda_q-1}}^m \varepsilon_k c_k(U) W_k(x) \right| \mu(x) dx = \\ & = \max_{m \in [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_q})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2\lambda_q-1}}^m \delta_k^{(\lambda_q)} a_k^{(\lambda_q)} W_k(x) \right| \mu(x) dx \leq \\ & \leq 5 \int_0^1 |f_{\lambda_q}(x)| \mu(x) dx \leq 5 \cdot 2^{-2q}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (3.3), (3.8) – (3.10), (3.14), (3.17), (3.30) и (3.31) для любых $N \in [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_{q+1}-1})$ и $q > 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^N \varepsilon_k c_k(U) W_k(x) \right| \mu(x) dx \leq \\ & \int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^q [\Lambda_j(x) - U_{\lambda_j}^{(1)}(x) + Q_{\lambda_j}^{(1)}(x)] \right\} \right| \mu(x) dx + \\ & + \sum_{n=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} \left(\max_{m \in [M_{2n-1}, M_n^*)} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n-1}}^m c_k(U) W_k(x) \right| \mu(x) dx + \right. \\ & \quad \left. \max_{s \in [M_n^*, M_{2n})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n-1}}^s c_k(U) W_k(x) \right| \mu(x) dx \right) + \\ & + \max_{s \in [M_{2n}, M_{2n+1})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n}}^s c_k(U) W_k(x) \right| \mu(x) dx + \\ & + \max_{m \in [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_q})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2\lambda_q-1}}^m \delta_k^{(\lambda_q)} a_k^{(\lambda_q)} W_k(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-q+3}. \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что $q \rightarrow \infty$ когда $N \rightarrow \infty$ заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x)$ сходится к $f(x)$ по норме в метрике $L_{\mu}^1[0, 1)$. Теорема 1.2 доказана. $\square$

Abstract. In this paper it is proved that there exists a weighted space $L_{\mu}^1[0, 1)$ for which it is possible to construct a universal pair (U, δ) with respect to the Walsh system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, “On the universal function for the class $L^p[0, 1], p \in (0, 1)$ ”, journal of Func. Anal. **270**, no. 8, 3111 – 3133 (2016).
- [2] A. A. Sargsyan, M. G. Grigorian, “Universal function for a weighted space”, Positivity **21**, 1457 – 1482 (2017).
- [3] М. Г. Григорян, “Функции, с универсальными рядами Фурье-Уолша”, Матем. Сб., **211**, no. 6, 107 – 131 (2020).
- [4] М. Г. Григорян, “Об универсальных (в смысле знаков) рядах Фурье по системе Уолша”, Матем. Сб. **215**, no. 6, 717 – 742 (2024).
- [5] A. A. Sargsyan, “On the existence of universal functions with respect to the double Walsh system for classes of integrable functions”, Colloquium Mathematicum, **161**, 111 – 129 (2020).
- [6] Д. Е. Меньшов, “О частичных суммах тригонометрических рядов”, Мат. Сборник, **20**, no. 2, 197 – 238 (1947).
- [7] А. А. Талалян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов”, Изв. АН Арм. ССР, **10**, no. 3, 17 – 34 (1957).
- [8] G. D. Birkhoff, “Démonstration d’un théorème élémentaire sur les fonctions entières”, C. R. Acad. Sci. Paris. **189**, 473 – 475 (1929).
- [9] J. Marcinkiewicz, “Sur les nombres derives”, Fund. Math. **24**, 305 – 308 (1935).
- [10] V. G. Krotov, “Smoothness of the universal Marcinkiewicz functions and universal trigonometric series”, Izv. universities. Mat., **8**, 26 – 35 (1991).
- [11] G. R. MacLane, “Sequences of derivatives and normal families”, J. Anal. Math. **2**, 72 – 87 (1952).
- [12] K. G. Grosse-Erdmann, “Holomorphe Monster und Universelle Funktionen”, Mitt. Math., Semin. Giessen, **176**, 1 – 84 (1987).
- [13] W. Luh, “Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets”, Analysis 6, 191 – 207 (1986).
- [14] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, Изв. АН. Росс., **632**:1, 41 – 60 (1999).
- [15] A. A. Sargsyan, “Quasiuniversal Fourier-Walsh series for the classes $L^p[0, 1], p > 1$ ”, Math. Notes, **104**:2, 278 – 292 (2018).
- [16] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On Fourier series that are universal modulo signs”, Studia Mathematica, **249**(2), 215 – 231 (2019).
- [17] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, универсальные относительно тригонометрической системы”, Изв. РАН. Сер. матем., **85**, **2**, 73 – 94 (2021).
- [18] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On the universal functions”, Journal of Approximation Theory, **225**, 191 – 208 (2018).
- [19] M. G. Grigorian, T. M. Grigorian, A. A. Sargsyan, “On the universal function for weighted spaces $L^p_\mu[0, 1], p \geq 1$ ”, Banach J. Math. Anal. **12**, no. 1, pp. 104 – 125 (2018).
- [20] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On Fourier series that are universal modulo signs”, Studia Mathematica, **249**(2), 215 – 231 (2019).
- [21] M. G. Grigorian, “On universal Fourier series in the Walsh system”, Siberian Mathematical Journal, **63**:3, 868 – 882 (2022).

Поступила 08 ноября 2024

После доработки 05 февраля 2025

Принята к публикации 22 февраля 2025

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПОРТФЕЛИ: БАЙЕСОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

А. КЕЧЕДЖЯН, В. К. ОГАНЯН, В. БАРДАХЧЯН

*Фрипоинт Комодитис, Стамфорд, Коннектикут, США
Ереванский государственный университет¹*

E-mails: *hkechejian@hotmail.com ; victoohanyan@ysu.am;
vardan.bardakchyan@ysu.am*

Аннотация. Универсальный портфель — рекурсивно конструируемая модель, предложенная Кавером. Несмотря на то, что изначально предложенный портфель разнится с наилучшим постоянно ребалансируемым портфелем, в конечном итоге средние доходности портфелей приблизительно одинаковы. Главная проблема с универсальными портфелями заключается в требуемой вычислительной мощности. Мы предлагаем другой взгляд на конструкцию портфеля. Мы утверждаем, что специально выбранного байесовского процесса может быть достаточно для сходимости к тем же результатам. Мы показываем, как эмпирически, так и теоретически, что байесовский процесс обновления, независимо от конкретного распределения процессов цен акций, будет воспроизводить то же поведение, что и универсальный портфель. Мы также показываем эмпирически, что универсальные портфели с ограничениями также могут обрабатываться этим механизмом.

MSC2020 numbers: 60J65; 65C30; 60H35; 97M30; 91B24.

Ключевые слова: универсальный портфель; распределение Дирихле; Байесовский вывод.

1. Введение

Теория универсальных портфелей была разработана Т. Кавером в [1]. Идея универсальных портфелей возникла из желания максимально приблизиться к лучшему постоянно ребалансированному (т. е. сохраняющему начальные веса) портфелю для любой заданной группы активов. Для получения последнего не существует известных механизмов, и пока мы предполагаем, что детерминистический сценарий невозможен.

Один из способов получить портфель с такой же или близкой доходностью — это универсальный портфель. Стоит отметить, что универсальный портфель не является постоянно ребалансированным портфелем и не дает возможности восстанавливать желаемые постоянные веса.

¹Настоящее исследование второго автора частично поддержано Центром Математических исследований Ереванского Государственного Университета.

Сначала напомним основную концепцию универсальных портфелей и ее отношение к наилучшему постоянно ребалансированному портфелю.

2. Построение универсальных портфелей

Универсальный портфель — это портфель, чьи веса задаются по следующей рекурсивной формуле

$$(2.1) \quad \widehat{b}_k = \frac{\int b S_{k-1}(b) db}{\int S_{k-1}(b) db}$$

здесь b и $\widehat{b}_k$ являются m -мерными векторами, где b выступает в качестве переменной интегрирования, а $\widehat{b}_k$ представляет собой предполагаемые веса в k -время, m - это количество рассматриваемых активов ($k \geq 1$), и (см. [1])

$$(2.2) \quad b_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right).$$

Таким образом $b = (b_1, \dots, b_m)$, при

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^m b_i = 1, \quad b_i \geq 0; \quad i = \overline{1, m}$$

Оба интеграла берутся по $(m - 1)$ -мерному симплексу, и

$$(2.4) \quad S_k(b) = \prod_{j=1}^k \sum_{i=1}^m b_i x_j(i)$$

где x_j — следующий m -вектор

$$(2.5) \quad x_j = (x_j(1), \dots, x_j(m)); \quad x_j(i) = \frac{S_i(j)}{S_i(j-1)},$$

а $S_i(t)$ обозначает стоимость i -го актива в момент времени t .

Таким образом, $S_k(b)$ показывает накопленное богатство портфеля для не зависящих от времени весов в период k (т.е. веса фиксируются раз и навсегда с $t = 0$, и портфель постоянно ребалансируется с этими начальными весами).

(2.1) — это средневзвешенное значение весовых векторов, где веса являются накопленным богатством, когда b берется как вектор констант для всех k периодов.

Эта проблема требует больших вычислительных затрат, поскольку добавление еще одного актива увеличивает требуемые симуляции на одну степень.

Этот вопрос рассматривался в значительной части соответствующей литературы. Мы хотели бы подчеркнуть, что некоторые работы были сосредоточены на сокращении

необходимых вычислений и симуляции (см. [2-6]). Большинство из них сосредоточены на улучшении оценки интегралов в (2.1). Однако некоторые, как, например, [5], пытаются изменить процесс получения выборки для лучшего моделирования.

Мы собираемся оценить (2.1) косвенным образом, используя байесовскую интерпретацию проблемы. Однако следует отметить, что мы делаем это для дискретной структуры исходных универсальных портфелей и стремимся предложить формулу в замкнутой форме, которая может быть не идентична прогнозам универсального портфеля, но все же достаточно близка, чтобы быть предпочтительнее, чем более вычислительно требовательная модель (2.1).

В статье [6] была рассмотрена основная идеология байесовского подхода, и предложены его интерпретации. В [6] показано, что универсальный портфель в непрерывной временной структуре похож (в их интерпретации идентичен, хотя они показали это только для частного случая) на байесовское построение портфеля. Последнее основано на портфеле Марковица, с перебалансировкой исторических данных (как в Блэке-Литтермане) или переоценкой распределения посредством байесовского обновления. Мы будем называть портфель с вектором весов, определяемым (2.1), универсальным портфелем (УП).

Отметим, что эта работа является продолжением наших работ, посвященных оценкам цен различных финансовых инструментов [8-11].

В следующем разделе рассмотрено основное соотношение из статьи Ковера [1] о постоянно ребалансируемых портфелях. 3-й и 4-й разделы посвящены байесовской интерпретации и реконструкции байесовских универсальных портфелей (БУП) с помощью сопряженной априорной. В 5-м разделе развиваются идеи включения дополнительных ограничений на веса в универсальные портфели.

Сначала мы показываем, что байесовское приближение справедливо в эмпирическом смысле, затем доказываем результат сходимости для сопряженной априорной вероятности Дирихле с мультиномиальным правдоподобием и, наконец, строим байесовский универсальный портфель с дополнительными ограничениями на веса.

3. Сравнение максимальных постоянно ребалансируемых и универсальных портфелей

Согласно Т. Каверу и формулам (2.1) и (2.4) можно получить, что

$$(3.1) \quad \widehat{S}_k := S_k(\widehat{b}_k) = \int b S_k(b) db$$

Имея

$$(3.2) \quad S_k(\widehat{b}_k) = \prod_{j=1}^k \widehat{b}_k \cdot x_j$$

и сделав следующие упрощения, получаем результат

$$\begin{aligned} \widehat{b}_k x_k &= \frac{\int (b \cdot x_k) S_{k-1}(b) db}{\int S_{k-1}(b) db} = \frac{\int (b \cdot x_k) \prod_{j=1}^{k-1} (b \cdot x_j) db}{\int \prod_{j=1}^{k-1} (b \cdot x_j) db} = \frac{\int \prod_{j=1}^k (b \cdot x_j) db}{\int \prod_{j=1}^{k-1} (b \cdot x_j) db} \\ S_k(\widehat{b}_k) &= \prod_{j=1}^k \widehat{b}_k \cdot x_j = \prod_{j=1}^k \frac{\int \prod_{j=1}^k (b \cdot x_j) db}{\int \prod_{j=1}^{k-1} (b \cdot x_j) db} \\ &= \frac{\int \prod_{j=1}^k (b \cdot x_j) db}{\int db} = \frac{\int b S_k(b) db}{\int db} = \int b S_k(b) db \end{aligned}$$

В некотором смысле $S_k(\widehat{b}_k)$ — это усредненный портфель по всем возможным портфелям.

В то время как наилучший постоянно ребалансируемый портфель по времени k , обозначаемый S_k^* — это максимально возможное значение всех постоянно ребалансируемых портфелей, то есть

$$(3.3) \quad S_k^* = \max_b S_k(b).$$

Результат, заявленный Т. Ковером, асимптотически $\widehat{S}_k \sim S_k^* \cdot M(k, m)$, и

$$(3.4) \quad \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\widehat{S}_k}{S_k^*} \right) \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0,$$

где предел берется по времени (т.е. по k), а $M(k, m)$ — некоторая константа, зависящая только от k и m . В какой-то степени она может также зависеть от k .

Замечание 3.1. В некотором смысле S_k^* невыполнимо, поскольку задача максимизации может быть решена только тогда, когда достигнуто время k и все реализации известны. Однако к ней можно приблизиться асимптотически, путем последовательного построения универсального портфеля (см. [1]).²

4. Байесовский подход

Очевидно, что $\widehat{b}_k$ трудно вычислить для больших m и k . Один из способов упростить вычисления — предоставить (возможно, рекурсивный) алгоритм или формулу для $\widehat{b}_k$.

²Может показаться неразумным ожидать, что среднее значение функции сойдется к максимуму функции в долгосрочной перспективе. Поэтому теория сосредоточена на логарифмах функций и только на первом члене разложения Тейлора. Это отчасти связано с методом приближения Лапласа.

Байесовский подход основан на рассмотрении b как вектора случайных переменных и постоянном обновлении апостериорного распределения с использованием формулы Байеса с известной функцией правдоподобия.

Проще говоря, в байесовской теории обновление работает следующим образом:

$$(4.1) \quad f(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n|\theta) f(\theta)}{\int P(x_1, \dots, x_n|\theta) f(\theta) d\theta}$$

где θ — неизвестный параметр (или в нашем случае вектор параметров), смоделированный как случайная величина, а $(x_1, \dots, x_n)$ — случайная выборка, $f(\theta)$ — априорная функция плотности.

Одной из важнейших особенностей байесовского обновления является то, что его можно выполнять в пакете или одной реализацией за один шаг, получая тот же результат, т.е.

$$(4.2) \quad f(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_{k+1}, \dots, x_n|\theta, x_1, \dots, x_k) f(\theta|x_1, \dots, x_k)}{\int P(x_{k+1}, \dots, x_n|\theta, x_1, \dots, x_k) f(\theta|x_1, \dots, x_k) d\theta}$$

Для любого $k = \overline{1, n-1}$ с $f(\theta|x_1, \dots, x_k)$ вычисляемым согласно (4.1).

Одинаково сложно вычислить, имея n интегралов для n реализаций. Поэтому, можно использовать те априорные распределения, для которых апостериорное распределение (т.е. $f(\theta|x_1, \dots, x_n)$) останется в том же классе или семействе распределений, что и априорное.

Для известной функции правдоподобия можно будет получить классы распределений с этим свойством. Такие априорные распределения называются сопряженными.

В пределах этого класса только параметры распределения изменяются от априорного к апостериорному. И как только они получены, можно восстановить (рекурсивно) следующие апостериорные параметры для заданных наблюдений.

После этого, если задача требует оценки параметров, есть несколько способов получения $\hat{\theta}$. Три из них берут моду, среднее и медиану апостериорного распределения. В дальнейшем мы ограничимся этими оценками.

5. Байесовский метод для универсальных портфелей

Очевидно, в нашем случае искомые параметры — компоненты вектора b , поэтому у нас есть m — параметров, и функция правдоподобия должна быть m -параметрической. Кроме того, априорное и апостериорное распределения являются векторными распределениями.

Поскольку b — вектор в m -мерном симплексе, наиболее подходящим распределением является распределение Дирихле. К сожалению, функция правдоподобия имеет ограниченный спектр, поскольку мы хотим, чтобы Дирихле сопрягал априорное.

Лучшими соответствиями являются 1) категориальное распределение и 2) мультиномиальное распределение для функции правдоподобия. Для первого из них мы используем следующую конструкцию.

5.1. Категориальное распределение (Победитель среди активов). Каждая категория индексируется в соответствии с рассматриваемыми акциями. Так категория i обозначает i -ю акцию. Поскольку реализуется только одна из категорий, мы должны определить алгоритм взятия y_i -s.

Категориальное распределение должно быть одномерным, так что следует брать только одну реализацию в каждый момент времени k .

То есть, мы должны определить $g(x_k) = g(x_k(1), \dots, x_k(m))$ который принимает одно из m значений $g(x_k) \in \{1, \dots, m\}$.

Способ, который мы предлагаем для построения, таков

$$(5.1) \quad g(x_k) = \text{index}(\max(x_k(1), \dots, x_k(m))).$$

Этот метод довольно хорош и показателен. Его сравнение с общими универсальными портфелями можно оценить эмпирически.

Интуиция, лежащая в основе этого метода, настолько ясна, что даже при низкой результативности этот метод может быть предпочтен другим методам, даже универсальным портфелям. Однако есть некоторая потеря информации. Один из недостатков этого метода заключается в том, что мы игнорируем большую часть информации относительно величин.

Предположим, в один из дней наилучший результат был достигнут s -й акцией. Это означает, что только эта категория реализовалась, таким образом, она увеличит вероятность s -й категории (т.е. вероятность того, что s -я акция будет лучшей на следующий день, вырастет, в то время как вероятности других категорий будут одновременно (без изменения пропорциональности) снижены).

Однако предположим, что s -я акция лишь незначительно лучше, чем r -я акция (любая фиксированная акция). Этот метод намеренно игнорирует этот факт.

Второй недостаток в том, что каждый раз можно определить лучшую категорию, но мы отбрасываем вторую лучшую, третью лучшую и так далее.

Поскольку акции-победители могут резко меняться каждый раз (т.е. никакая чувствительность не может быть даже последовательно измерена), гораздо более разумно использовать другие формы вероятности, которые будут рассматривать относительные величины или относительные преимущества.

5.2. Мультиномиальное правдоподобие. Для мультиномиальной функции правдоподобия при фиксированном параметре N реализация каждого эксперимента суммируется до N . Таким образом, для каждой из m категорий и каждого дня k мы имеем

$$(5.2) \quad g(x_k) = (w_k(1), w_k(2), \dots, w_k(m))$$

Так что $\sum_{j=1}^m w_k(j) = N$.

Количество реализаций - w_{jk} -s должно определяться компонентами вектора x_k . Здравый смысл заключается в том, что наилучшему результату должно быть предписано большее количество, второму лучшему - второе большее и так далее. При этом следует отметить, что относительная величина также должна играть решающую роль в определении количества. Если наилучший результат значительно лучше всех других результатов, в то время как последние более или менее равны и очень малы, наилучшему результату должно быть предписано количество N , в то время как другие количества должны быть установлены на 0.

На данный момент мы используем следующий метод.

Задаем некоторое число $\bar{x}_k$. Мы делаем следующий промежуточный шаг,

$$(5.3) \quad v_{jk} = \begin{cases} \frac{x_{jk} - \bar{x}_k}{\min_i x_{ik} - \bar{x}_k}; & \min_i x_{ik} - \bar{x}_k > 0 \\ x_{jk} - \min_i x_{ik}; & \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, что одному из членов дано значение 1, тогда как другим теоретически даны более высокие значения, когда $\bar{x}_k$ достаточно мал.

И на следующем шаге мы выбираем достаточно большое число N и

$$w_{jk} = \left\lfloor N \cdot \frac{v_{jk}}{\sum_{j=1}^m v_{jk}} \right\rfloor,$$

где скобки обозначают целую часть, или округление вниз до ближайшего целого числа. Если нам повезет, сумма подсчетов действительно даст N . На практике, однако, мы получаем $N - 1$.

Более того, есть некоторые причины взять $\bar{x}_k = \bar{x}$, т. е. не зависящее от времени. И в этом случае, если не выбирать мудро, можно получить отрицательные значения для случаев, где для лучших результатов следует назначить меньшие значения.

Замечание 5.1. Обратите внимание, что в приведенной выше формуле v -s знаменатель не играет решающей роли в w -s. Поэтому мы можем определить $v_{jk} = x_{jk} - \bar{x}_k$. Однако, следует учесть, что $\bar{x}_k \leq \min_i x_{ik}$.

Экспериментально, в некоторых случаях лучше сохранять отрицательные значения устанавливать $\bar{x}_k$ как можно ближе к 1. В долгосрочной перспективе просчеты исчезнут.

Вот некоторые эмпирические результаты по универсальным портфелям.

	Весовые коэффициенты универсального портфеля	Байесовское среднее ($\bar{x} \ll \min$)	Байесовские весовые коэффициенты ($\bar{x} \approx$ $\min(1, \min_{i,k} x_{ik})$)
1 год/ 2 актива			
b_0	0.7942882	0.5054	0.7968937
b_1	0.2057118	0.4946	0.2031063
1 год/ 4 актива			
b_0	0.24372	0.25064	0.24143
b_1	0.22312	0.24881	0.20233
b_2	0.36963	0.26055	0.35117
b_3	0.16353	0.23999	0.205075

Таблица 1:Пример портфелей из 2 и 4 акций (взяты случайным образом).

Обратите внимание, что чем ближе мы берем $\bar{x}$ к 1, тем более близкие значения мы получаем. Хотя это требует некоторых вычислений (по одному для каждого временного интервала). В противном случае, если мы берем $\bar{x}$ малым, портфель будет разделен поровну.

Конструктивно можно показать, используя биномиальные приближения нормальных распределений, что указанный выше портфель должен сходиться к универсальному.

Теорема 5.1. С мультиномиальным правдоподобием и сопряженным Дирихле априорным распределением, начиная с вектора равных коэффициентов, верно, что при $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{k} E \left(\ln (S_k (\operatorname{argmax}_{\theta} (f (\theta | x_1, \dots, x_k)))) - \ln \widehat{S}_k \right) \rightarrow 0$$

С $f (\theta | x_1, \dots, x_k)$ и $\widehat{b}_k$ как в (3.4) и (2.1) соответственно.

Замечание 5.2. *Байесовское универсальное обновление преследует универсальный портфель в бесконечности. Нельзя утверждать, что байесовское универсальное находит в непосредственной близости от универсального портфеля на каждом шаге, как показывает эмпирика.*

Набросок доказательства: Согласно теореме Бернштейна-фон Мизеса, байесовское обновление будет сходиться к истинным моделям параметров, независимо от того, какое априорное значение взято.

Однако, если модель указана неверно, сходимость все равно может быть установлена, но смещена. Эта неправильная спецификация может быть вызвана неверной функцией правдоподобия.

В нашем случае нет правильных значений весов. Поэтому мы не можем сказать, что модель имеет истинные параметры модели, и в долгосрочной перспективе истинные параметры остаются нераскрытыми до желаемой конечной точки. Точнее, изменение k изменит аргумент b^* решения (3.2).

Однако сходимость все еще может быть установлена как сходимость в стохастических процессах в среднеквадратичном смысле.

Можно утверждать, что метод Ковера действительно похож на метод Бернштейна-фон Мизеса с зависящей от времени обратной матрицей информации Фишера, называемой матрицей чувствительности.

Замечание 5.3. *Наш процесс несколько связан с процессом Дирихле, см. [10]. Главное отличие состоит в том, что построение процесса Дирихле обычно определяется на связном подмножестве. В нашем случае рассматриваемое множество само по себе дискретно (в нашем случае это число рассматриваемых активов).*

Итак, по результату Ковера мы имеем, что

$$E \left(\frac{1}{k} \ln \left(\frac{\widehat{S}_k}{S_k^*} \right) \right) \rightarrow 0$$

Это верно для любой (неслучайной) последовательности результатов. Однако, с другой стороны, известно, что согласно теореме Бернштейна-фон Мизеса апостериорное распределение сходится к гауссовскому распределению с правильным (в обсуждаемом выше смысле) средним. Таким образом,

$$E \left(\ln (S_k (\operatorname{argmax}_{\theta} (f(\theta|x_1, \dots, x_k)))) - \ln S_k^* \right) \rightarrow 0$$

Или

$$\frac{1}{k} E \left(\ln (S_k (\operatorname{argmax}_{\theta} (f (\theta | x_1, \dots, x_k)))) - \ln S_k^* \right) \rightarrow 0$$

В таком случае, имеем

$$E \left(\frac{1}{k} \ln \left(\frac{S_k (\operatorname{argmax}_{\theta} (f (\theta | x_1, \dots, x_k)))}{\hat{S}_k} \right) \right) \rightarrow 0$$

Замечание 5.4. Обратите внимание, что выбор $\bar{x}$ не имеет значения с теоретической точки зрения. Но при неразумном выборе мы можем оказаться вне процесса Дирихле, и, таким образом, сделать приведенную выше теорему неприменимой. С другой стороны, при выборе слишком малого значения мы просто делаем обновление слишком медленным, что сильно затрудняет процесс обновления.

6. Байесовские универсальные портфели с ограничениями

Хотя добавление ограничений к универсальным портфелям напрямую может быть сложным и может затруднить оценку. Также трудно понять, обеспечит ли ограниченная версия какую-либо сходимость или будет сходиться к лучшим постоянно перебалансированным портфелям с теми же ограничениями на веса.

В байесовской структуре, описанной выше, мы используем байесовский подход, чтобы включить эти ограничения непосредственно в портфель.

Самый оптимальный способ сделать это — ограничить функцию правдоподобия желаемыми областями. Хотя это хорошая стратегия, она нарушает свойство сопряженности предварительного распределения, что затрудняет прямой вывод окончательной формулы. Тем не менее, можно использовать рекурсивную формулу.

Еще один способ — обновить апостериорное распределение только с помощью элемента выборки, который будет ограничиваться заданными границами. В этом случае эмпирические распределения желательны близки.

Вот краткое изложение эмпирических результатов

	Весовые коэффициенты универсального портфеля	Байесовские весовые коэффициенты ($\bar{x} \approx$ $\min(1, \min_{i,k} x_{ik})$)	Ограничения
1 year/ 4 stocks			
b_0	0.2774	0.3097	[0.2, 0.4]
b_1	0.1954	0.1799	[0.1, 0.25]
b_2	0.1525	0.1561	[0.1, 0.2]

	Весовые коэффициенты универсального портфеля	Байесовские весовые коэффициенты ($\bar{x} \approx$ $\min(1, \min_{i,k} x_{ik})$)	Ограничения
b_3	0.3747	0.3542	

Table 2: Пример портфеля из 4 акций (взяты случайным образом).

Abstract. Universal portfolio, is recursively constructive portfolio. Though different initially, eventually the portfolio average return remains close to that of best constantly rebalanced portfolio. For that purpose, recursive update of weights was obtained by Cover. The main problem with universal portfolios is the required computational power. In this paper we provide different look at the portfolio construction. We argue that some sort of Bayesian process may be enough to converge to same results. We show, both empirically and theoretically, that Bayesian update process, without regard to particular distribution of stocks' prices processes, will replicate the same behavior as universal portfolio. We also show empirically that universal portfolios with constraints maybe also treated by this mechanism.

Список литературы

- [1] T. M. Cover, "Universal portfolios", *Mathematical finance*, **1**(1), 1 – 29 (1991).
- [2] T. M. Cover, D. H. Gluss, "Empirical Bayes stock market portfolios", *Advances in applied mathematics*, **7**, no. 2, 170 – 181 (1986).
- [3] E. Ordentlich, T. M. Cover, "The cost of achieving the best portfolio in hindsight", *Mathematics of Operations Research*, **23**(4), 960 – 982 (1998).
- [4] A. T. Kalai, S. Vempala, "Efficient algorithms for universal portfolios", *Journal of Machine Learning Research*, 423 – 440 (2002).
- [5] H. Ishijima, "Numerical methods for universal portfolios", *Proceedings of the Quantitative Methods in Finance Conference* (2001, December).
- [6] H. Ishijima, "Bayesian Interpretation of Continuous-time Universal Portfolios (Special Issue on Theory", *Methodology and Applications in Financial Engineering*, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**(4), 362 – 372 (2002).
- [7] S. T. Rachev, J.S. Hsu, B. S. Bagasheva, F.J. Fabozzi, *Bayesian Methods in Finance*, John Wiley & Sons (2008).
- [8] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, "Monte Carlo method for geometric average options on several futures", *Modeling of Artificial Intelligence*, (2), 88 – 93 (2016).
- [9] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, "Curran's method for approximating arithmetic average option for several futures", *Modeling of Artificial Intelligence*, (4-1), 14 – 20 (2017).
- [10] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, "Algorithm of calculation of combined commodity options value", *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **57**(1), 59 – 65 (2022).
- [11] S. Ghosal, A. W. van der Vaart, *Fundamentals of Nonparametric Bayesian Inference*, **44**, Cambridge University Press (2017).

Поступила 19 декабря 2024

После доработки 20 января 2025

Принята к публикации 12 февраля 2025

КРИТЕРИИ СТРОГО И ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско-Армянский университет, Армения¹
Институт математики Национальной академии наук Армении
E-mails: *vachagan.margaryan@yahoo.com; haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Найдены условия строгой гипоеллиптичности и почти гипоеллиптичности для одного класса линейных дифференциальных операторов. Условия даны в терминах элементарных центральных линий символов (характеристических многочленов), соответствующих этим операторам.

MSC2020 numbers: 12E10; 35H10; 35E20.

Ключевые слова: строго (почти) гипоеллиптический оператор (полином); линейное преобразование переменных; элементарная центральная линия.

1. Введение и предварительные факты

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ — множество всех n -мерных мультииндексов, т. е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ ($j = 1, \dots, n$), $\mathbb{R}^n$ - n -мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\mathbb{C}^n := \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$, ($i^2 = -1$).

Для $\xi \in \mathbb{C}^n$, обозначим $||\xi|| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2}$, а для $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial \xi_j$ ($j = 1, \dots, n$).

Пусть $P(D) = P(D_1, \dots, D_n) := \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ - его символ (характеристический многочлен), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов ($P) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$. Мы также обозначим через $m = m(P) = \deg P := \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|$ - степень многочлена P , $\mathfrak{D}(P) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n, P(\zeta) = 0\}$, $d_P(\xi) := \inf_{\zeta \in \mathfrak{D}(P)} ||\xi - \zeta||$ и представим многочлен P в виде суммы однородных многочленов

$$(1.1) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^m P_{m-j}(\xi) = \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=m-j} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}.$$

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитетом по высшему образованию и науке в рамках научного проекта № 25PG-1A205.

Для однородного многочлена $R(\xi) = \sum_{|\alpha|=r} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ степени r обозначим $\Sigma(R) = \{\tau \in \mathbb{R}^n; |\tau| = 1, R(\tau) = 0\}$, а для точки $\tau \in \Sigma(R)$ обозначим через $l = l_R(\tau)$ кратность корня τ , который определяется из условия $\sum_{|\alpha|<l} |R^{(\alpha)}(\tau)| := \sum_{|\alpha|<l} |D^\alpha R(\tau)| = 0$, $\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha R(\tau)| \neq 0$, где l – натуральное число.

Лемма 1.1. Пусть R – однородный многочлен порядка r , $\tau^1, \tau^2 \in \Sigma(R)$ и $l_R(\tau^1) = l_R(\tau^2) = r$. Тогда $R(t_1 \tau^1 + t_2 \tau^2) = 0$ для любых действительных чисел t_1 и t_2 , при этом $l_R(t_1 \tau^1 + t_2 \tau^2) = r$.

Прежде чем доказать лемму, отметим следующее: легко видеть, что однородный многочлен $R(\xi) = R(\xi_1, \dots, \xi_n)$ может иметь не более $n - 1$ линейно независимых корней кратности r .

Доказательство леммы. Так как для любого мультииндекса $\beta \in \mathbb{N}_0^n : |\beta| \leq r$

$$R^{(\beta)}(\xi) = \sum_{\alpha \in (R), \alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} \gamma_\alpha \xi^{\alpha - \beta} = \sum_{|\delta|=r-|\beta|, \delta + \beta \in (R)} \frac{(\delta + \beta)!}{\delta!} \gamma_{\delta + \beta} \xi^\delta, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

По формуле Тейлора, в силу однородности многочленов $R^{(\beta)}$; $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1$, $\beta \in \mathbb{N}_0^n : |\beta| < r$ имеем

$$\begin{aligned} R^{(\beta)}(t_1 \tau^1 + t_2 \tau^2) &= \sum_{\delta} \frac{1}{\delta!} R^{(\beta + \delta)}(t_1 \tau^1)(t_2 \tau^2)^\delta \\ &= \sum_{|\delta|=r-|\beta|, \delta + \beta \in (R)} \frac{(\delta + \beta)!}{\delta!} \gamma_{\delta + \beta} (t_2 \tau^2)^\delta = R^{(\beta)}(t_2 \tau^2) = t_2^{r-|\beta|} R^{(\beta)}(\tau^2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $R(t_1 \tau^1 + t_2 \tau^2) = 0$ и $l_R(t_1 \tau^1 + t_2 \tau^2) \geq r$.

Пусть $\beta^0 \in (R)$. Тогда, очевидно, $R^{(\beta^0)}(\xi) = \beta^0! \gamma_{\beta^0} \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Следовательно $l_R(t_1 \tau^1 + t_2 \tau^2) = r$ для любых действительных чисел t_1 и t_2 . $\square$

Замечание 1.1. Используя математическую индукцию, легко получить аналог леммы 1.1 для точек $\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^k \in \Sigma(R)$ для любого $k \geq 2$ если $l_R(\tau^j) = r$ ($j = 1, \dots, k$).

Определение 1.1. Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ размерности k ($0 < k \leq n - 1$) назовем элементарным множеством многочлена P , если существует постоянное σ такое, что $P(\xi) = \sigma$ для всех $\xi \in F$. Если $\sigma = 0$, то множество F назовем тривиальным элементарным множеством многочлена P (сокращенно — тривиальным множеством P).

Из леммы 1.1 (см. также замечание 1.1) немедленно следует

Следствие 1.1. Пусть R однородный многочлен степени r , $k \geq 2$, $\tau^1, \dots, \tau^k \in \Sigma(R)$ и $l_R(\tau^j) = r$ ($j = 1, \dots, k$). Тогда линейная оболочка векторов $\{\tau^1, \dots, \tau^k\}$ — тривиальное множество многочлена R .

Предложение 1.1. Пусть P — многочлен с постоянными коэффициентами, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное обратимое отображение $Q(\eta) := P(T\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Тогда 1) $\deg Q = \deg P$, 2) если $P(\tau) = 0$, ($\tau \in \mathbb{R}^n$), то $l_Q(T^{-1}\tau) = l_P(\tau)$.

Доказательство первого утверждения очевидно. Второй пункт непосредственно следует из следующей легко проверяемой оценки: существует число $c > 1$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}_0$ выполняется следующее неравенство:

$$(1.2) \quad c^{-1} \sum_{|\alpha|=l} |Q^{(\alpha)}(\eta)| \leq \sum_{|\alpha|=l} |P^{(\alpha)}(T\eta)| \leq c \sum_{|\alpha|=l} |Q^{(\alpha)}(\eta)| \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 1.2. Пусть R — ненулевой однородный многочлен степени r , $k \geq 2$, векторы $\tau^1, \dots, \tau^k \in \Sigma(R)$ линейно независимы и $l_R(\tau^j) = r$ ($j = 1, \dots, k$). Если $R(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\tau^1, \dots, \tau^k\}$, то существует линейное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что 1) многочлен $Q(\eta) := R(T\eta)$ является однородным степени r , 2) $Q(\eta) \equiv Q(\eta_1, \dots, \eta_{n-k}, 0, \dots, 0) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n$, 3) $Q(\eta) \neq 0$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta_1| + \dots + |\eta_{n-k}| \neq 0$, т.е. многочлен $Q(\eta)$, рассматриваемый как многочлен от переменных $\eta_1, \dots, \eta_{n-k}$, является однородным эллиптическим многочленом на $\mathbb{R}^{n-k}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. Без потери общности можно считать, что векторы $\tau^1, \dots, \tau^k$ взаимно ортогональны. Дополняем набор векторов $\{\tau^j\}_1^k$ до ортонормированного базиса $\{\theta^1, \dots, \theta^{n-k}, \tau^1, \dots, \tau^k\}$ в $\mathbb{R}^n$ (обратите внимание, что лемма подразумевает, что $k < n$).

Обозначим через T следующую матрицу $T = (\theta^1, \dots, \theta^{n-k}, \tau^1, \dots, \tau^k)$, а через $\{e^j\}_1^n$ обозначим стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, где $e_i^j = 1$ если $i = j$ и $e_i^j = 0$ если $i \neq j$. Очевидно, что T является обратимой матрицей, причем $Te^j = \theta^j \quad j = 1, \dots, n-k$ и $Te^j = \tau^{j-n+k} \quad j = n-k+1, \dots, n$.

Представим r -однородный многочлен Q (см. утверждение 1) в виде

$$(1.3) \quad Q(\eta) = \sum_{j=0}^r \eta_n^j \left[\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}; |\beta|=r-j} \delta_{(\beta,j)} \eta_1^{\beta_1} \dots \eta_{n-1}^{\beta_{n-1}} \right],$$

где числа $\{\delta_{(\beta,j)}\}$ однозначно определяются коэффициентами многочлена P .

Согласно предложению 1.1 имеем $l_Q(e^n) = l_R(\tau^k) > 0$, $0 = Q(e^n) = \delta_{0, \dots, 0, r}$. Применяя метод индукции по убыванию $j : j \leq r$, покажем, что $\delta_{(\beta,j)} = 0$ для любых пар (β, j) таких, что $\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, $|\beta| + j = r$. Пусть $\delta_{(\beta,j)} = 0$ для пары (β, j) : так,

что $\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, $|\beta| + j = r$, $j \geq p \geq 2$. Покажем, что $\delta_{(\beta, p-1)} = 0$. По предположению индукции многочлен Q представляется в виде

$$Q(\eta) = \sum_{j=0}^{p-1} \eta_n^j \left[\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}; |\beta|=r-j} \delta_{(\beta, j)} \eta_1^{\beta_1} \dots \eta_{n-1}^{\beta_{n-1}} \right].$$

Так как (в условиях этой леммы), по Предложению 1.1 $l_Q(e^n) = l_R(\tau^k) = r$, и при $p \geq 2$, $\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, $|\beta| = r - p + 1$ (т.е. $|\beta| < r$), то $0 = Q^{(\beta)}(e^n) = \beta! \delta_{(\beta, p-1)}$. Следовательно, $\delta_{(\beta, p-1)} = 0$ для всех $\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, $|\beta| = r - p + 1$. Отсюда согласно индукции получим, что многочлен $Q(\eta)$ можно представить в виде

$$Q(\eta) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}; |\beta|=r} \delta_{(\beta, 0)} \eta_1^{\beta_1} \dots \eta_{n-1}^{\beta_{n-1}} = Q(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, 0).$$

Проводя аналогичные рассуждения и принимая во внимание тот факт, что $l_Q(e^j) = l_R(\tau^{j-n+k})$ ($j = n-1, \dots, n-k+1$), получаем утверждение части 2) леммы.

Докажем утверждение 3). Предположим противное, что при условии леммы существует точка $\eta^0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ такая, что $|\eta_1^0| + \dots + |\eta_{n-k}^0| \neq 0$ и $Q(\eta^0, 0, \dots, 0) = 0$. Обозначим $\tilde{\eta}^0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_{n-k}^0, 0, \dots, 0)$. Так как вектор $\tilde{\eta}^0$ ортогонален векторам $e^{n-k+1}, \dots, e^n$, то $T\tilde{\eta}^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\tau^1, \dots, \tau^k\}$. Но $R(T\tilde{\eta}^0) = Q(\tilde{\eta}^0) = 0$. Это противоречит условию леммы и доказывает часть 3). Лемма 1.3 доказана. $\square$

Нам также необходимо следующее легко проверяемое утверждение:

Лемма 1.3. Пусть $\alpha^1, \dots, \alpha^K$ — вершины многогранника Ньютона $\mathfrak{R}(P)$ многочлена P степени $m(P)$. Тогда существуют постоянные $0 < C_1 \leq C_2$ такие, что

$$|P(\xi)| \leq C_1 \left[1 + \sum_{k=1}^K |\xi^{\alpha^k}| \right] \leq C_2 [1 + \|\xi\|^{m(P)}] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

2. Условия строгой гипоеллиптичности и почти гипоеллиптичности

Для многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ обозначим через $d_P(\xi)$ расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до поверхности $\{\zeta; \zeta \in \mathbb{C}^n, P(\zeta) = 0\}$. В [3, Лемма 11.1.4] доказано, что существует константа $C = C(n, m) > 0$ такая, что для любого многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ степени не более m , справедлива следующая оценка:

$$(2.1) \quad C^{-1} \leq d_P(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|} \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, P(\xi) \neq 0.$$

Поскольку, очевидно, что $d_P(\xi) = 0$, при $P(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{R}^n$, то из неравенства (2.1) следует, что с некоторой константой $C_1 > 0$ справедливо неравенство

$$(2.2) \quad d_P(\xi) \leq C_1 |P(\xi)|^{1/m(P)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 2.1. (см. [3], Определение 11.1.2 и Теорема 11.1.3). Многочлен P называется гипозеллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий: 1) $d_P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$, 2) существуют положительные постоянные δ и c такие, что

$$(2.3) \quad 1 + d_P(\xi) \geq c \|\xi\|^\delta \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание 2.1. 1) Из оценки (2.3) немедленно следует, что если многочлен P гипозеллиптичный, то число δ из (2.3) принадлежит множеству $(0, 1]$, 2) существуют числа $\delta \in (0, 1]$, $c > 0$, и $M > 0$ такие, что

$$(2.4') \quad d_P(\xi) \geq c |P(\xi)|^{\delta/m(P)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| \geq M.$$

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждается только второй пункт. По определению гипозеллиптичности P (см. первый пункт Определения 2.1) существуют положительные числа M_0 , C и δ такие, что $d_P(\xi) \geq C \|\xi\|^\delta$ для $\|\xi\| \geq M_0$. С другой стороны, из леммы 1.3 следует существование положительных констант C_1 и C_2 таких, что для $|P(\xi)| \leq C_1 [1 + \|\xi\|]^{m(P)} \leq C_2 \|\xi\|^{m(P)}$ если $\|\xi\| \geq 1$. Предполагая, что $M \geq \max\{M_0, 1\}$, при $\|\xi\| \geq M$ имеем

$$\begin{aligned} d_P(\xi) &\geq C \|\xi\|^\delta = C [\|\xi\|^{m(P)}]^{\delta/m(P)} \\ &\geq C [|P(\xi)|/C_2]^{\delta/m(P)} = C_3 |P(\xi)|^{\delta/m(P)}. \end{aligned}$$

Определение 2.2. (см. [2]) Многочлен P называется почти гипозеллиптическим, если для некоторой константы $C > 0$ $\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C [|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 2.1. Пусть многочлен P степени $m = m(P)$ представлен в виде (1.1) и существуют числа $C > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$(2.4) \quad d_P(\xi) \geq C |P(\xi)|^{1/m(P)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\| \geq M.$$

Тогда $l_{P_m}(\tau) = m(P)$ для всех $\tau \in \Sigma(P_m)$.

Доказательство. Пусть $\tau \in \Sigma(P_m)$ — любая фиксированная точка. Легко проверить, что для любого $s \in \mathbb{N} : s \geq M + 1$ найдется точка $\eta^s \in \mathbb{R}^n : |\eta^s| \leq 1$ такая, что $P(\xi^s) := P(s\tau + \eta^s) \neq 0$. Тогда, по условию леммы и на основании оценки (2.1), найдется константа $C_1 > 0$ такая, что для всех натуральных чисел $k : k \leq m(P)$ и для всех $s \geq M + 1$ имеем

$$(2.5) \quad \sum_{|\alpha|=k} |P^{(\alpha)}(\xi^s)| \leq C_1 |P(\xi^s)|^{1-k/m(P)}.$$

Представляя многочлен P в виде (1.1), и применяя формулу Тейлора, для левой части неравенства (2.5) при $s \geq M + 1$, когда $k = l_{P_m}(\tau)$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=l_{P_m}(\tau)} |P^{(\alpha)}(\xi^s)| &\geq \sum_{|\alpha|=l_{P_m}(\tau)} [|P_m^{(\alpha)}(\xi^s)| - \sum_{j=1}^m |P_{m-j}^{(\alpha)}(\xi^s)|] \\ &= \sum_{|\alpha|=l_{P_m}(\tau)} \left\| \sum_{\beta} \frac{1}{\beta!} |P_m^{(\alpha+\beta)}(s\tau)(\eta^s)^\beta| - \sum_{j=1}^m |P_{m-j}^{(\alpha)}(s\tau + \eta^s)| \right\| \\ &\geq \sum_{|\alpha|=l_{P_m}(\tau)} \left\| |P_m^{(\alpha)}(s\tau)| - \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{\beta!} |P_m^{(\alpha+\beta)}(s\tau)(\eta^s)^\beta| - \sum_{j=1}^m |P_{m-j}^{(\alpha)}(s\tau + \eta^s)| \right\|. \end{aligned}$$

Так как кратность нуля многочлена P_m в точке τ равна $l_{P_m}(\tau)$, то степень многочленов $P_m^{(\alpha+\beta)}$ и $P_{m-j}^{(\alpha)}$ ($j = 1, \dots, m$) для $|\alpha| = l_{P_m}(\tau)$, $\beta \neq 0$ не превышает число $m - l_{P_m}(\tau) - 1$. Следовательно, при некоторых положительных константах C_2 и C_3 для любого $s \geq M + 1$ имеем

$$(2.6) \quad \sum_{|\alpha|=l_{P_m}(\tau)} |P^{(\alpha)}(\xi^s)| \geq C_2 s^{m-l_{P_m}(\tau)} - C_3 s^{m-l_{P_m}(\tau)-1}.$$

Теперь оценим многочлен P . Снова применяя формулу Тейлора с некоторой константой $C_4 > 0$, для любого $s \geq M + 1$ получим

$$\begin{aligned} |P(\xi^s)| &\leq |P_m(\xi^s)| + \sum_{j=1}^m |P_{m-j}(\xi^s)| = \left| \sum_{|\alpha| \geq l_{P_m}(\tau)} \frac{1}{\alpha!} P_m^{(\alpha)}(s\tau)(\eta^s)^\alpha \right| \\ &\quad + \sum_{j=1}^m |P_{m-j}(s\tau + \eta^s)| \leq C_4 s^{m-1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (2.6) в силу (2.5), имеем

$$C_2 s^{m-l_{P_m}(\tau)} - C_3 s^{m-l_{P_m}(\tau)-1} \leq C_5 s^{\frac{m-1}{m} [m-l_{P_m}(\tau)]}.$$

Откуда следует, что $m - l_{P_m}(\tau) \leq \frac{m-1}{m} [m - l_{P_m}(\tau)]$. Так как $1 \leq l_{P_m}(\tau) \leq m$ последнее неравенство имеет место тогда и только тогда, когда $l_{P_m}(\tau) = m$. Что и доказывает лемму. $\square$

Следствие 2.1. Пусть многочлен P удовлетворяет условиям леммы 2.1. Тогда существует линейное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и натуральное число $k : k \leq n$ такое, что если многочлен $Q(\eta) := P(T\eta)$ представить в виде (1.1), то 1) $m(Q) = m(P)$, 2) $Q_{m(Q)}(\eta) = Q_{m(Q)}(\eta_1, \dots, \eta_k, 0, \dots, 0) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n$, 3) многочлен $Q_{m(Q)}$, рассматриваемый в $\mathbb{R}^k$, является эллиптическим.

Доказательство следует непосредственно из леммы 2.1.

Определение 2.3. Гипоэллиптические многочлены, удовлетворяющие неравенству (2.4') при $\delta = 1$ называются **строго гипоэллиптическими** (см. [3] [4]).

Легко проверить, что такими являются, например, эллиптические многочлены. М. Лангенбрух в [6] доказал гипотезу Комуры - Зилезни (см. [5], [8]) о том, что если неэллиптический дифференциальный оператор $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$ является строго гипоэллиптическим, то функциональная размерность множества $\{u \in C(\Omega), P(D)u = 0\}$ больше, чем n .

Предложение 2.1. Пусть многочлен P удовлетворяет условию (2.4'), а $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное обратимое отображение. Тогда многочлен $Q(\eta) := P(T\eta)$ также удовлетворяет условию (2.4') с некоторыми константами $C = C(Q) > 0$ и $M = M(Q) > 0$.

Доказательство. Так как при условиях предположения $\|T\eta\| \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\|\eta\| \rightarrow \infty$, то утверждения предположения непосредственно следует из оценки (1.2).

Пусть $\delta \in [0, 1]$. Обозначим через $\mathcal{A}_\delta(n)$ множество многочленов $\{P\}$, удовлетворяющих условию (2.4').

Пример 2.1. Пусть $n = 2$ и $P(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^6 + \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^2 + 1$. Тогда $m(P) = m_0(P) = 6$, $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 0$, $P_6(\xi) = \xi_1^6$, $P_4(\xi) = \xi_1^2 \xi_2^2$, $P_2(\xi) = \xi_2^2$, $P_0(\xi) = 1$.

Легко видеть, что многочлен P почти гипоэллиптический и $P \in \mathcal{A}_0(2)$.

Пример 2.2. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^2$. Здесь $m(P) = 4$. Покажем, что $P \in \mathcal{A}_1(2)$, т. е. существуют положительные константы C_1 , M_1 такие, что $d_P(\xi) \geq C_1 P^{1/4}(\xi) \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \|\xi\| \geq M_1$. В силу леммы 11.1.4 из монографии [3] достаточно показать существование положительных констант C_1 , M_1 таких, что

$$(2.7) \quad P^{1/4}(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq C_1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \|\xi\| \geq M_1.$$

Так как $|\xi_2^{2-j}|/(\xi_1^4 + \xi_2^2)^{1-j/4} \leq 1 \quad j = 1, 2$ то простые вычисления при $\|\xi\| \geq 2$, показывают, что

$$(2.8) \quad P^{1/4}(\xi) \sum_{j=1}^2 \left| \frac{D_2^j P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/j} \leq \sum_{j=1}^2 \left[\frac{2!}{(2-j)!} \right]^{1/j} := \kappa_1.$$

Так как $P^{(\alpha)}(\xi) \equiv 0$ при $\alpha_1 > 4$, $\alpha_2 > 2$, $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ и

$$P^{1/4}(\xi) \sum_{j=1}^4 \left| \frac{D_1^j P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/j} = \sum_{j=1}^4 \left| \frac{\frac{4!}{(4-j)!} \xi_1^{4-j}}{(\xi_1^4 + \xi_2^2)^{1-j/4}} \right|^{1/j} \leq \sum_{j=1}^4 \left(\frac{4!}{(4-j)!} \right)^{1/j} := \kappa_2,$$

то отсюда и из (2.8) получаем оценку (2.7) для $C_1 = \kappa_1 + \kappa_2$ и $M_1 = 2$, т.е. многочлен P является строго гипоеллиптическим.

Можно доказать больше, а именно, что этот многочлен удовлетворяет оценке

$$C_2^{-1} d_P(\xi) \leq P^{1/4}(\xi) \leq C_2 d_P(\xi)$$

для любого $C_2 > 0$. Действительно, так как для $\|\xi\| \geq 2$

$$P^{1/4}(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \geq P^{1/4}(\xi) \left| \frac{D_1^4 P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/4} = |D_1^4 P(\xi)|^{1/4} = (4!)^{1/4}.$$

Отсюда и из оценки (2.8) в силу указанной выше леммы получаем требуемую оценку.

Лемма 2.2. Пусть $\delta \in [0, 1]$ и $P \in \mathcal{A}_\delta(n)$. Тогда многочлен P почти гипоеллиптический.

Доказательство. В условиях леммы, по определению множества $\mathcal{A}_\delta(n)$ и правой части неравенства (2.1), для любого натурального числа $l : l \leq m(P)$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=l} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C |P(\xi)|^{1-\frac{l\delta}{m(P)}} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| \geq M(P), P(\xi) \neq 0.$$

Отсюда, в силу непрерывности многочленов, получаем то же неравенство для тех точек $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| \geq M(P)$, для которых $P(\xi) = 0$.

Используя арифметическое неравенство $|t|^\varepsilon \leq |t| + 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \varepsilon \in [0, 1]$, и принимая во внимание, что многочлены $\{P^{(\alpha)}; |\alpha| = l\}$ ограничены при $\|\xi\| \leq M(P)$ и их число конечно, отсюда с некоторой постоянной $C_1 > 0$ получим $\sum_{|\alpha|=l} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_1 [|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, что доказывает лемму. $\square$

Далее, будем говорить, что а) многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ по существу зависит от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, если для любого линейного обратимого преобразования $T : \xi = T\eta$ пространства $\mathbb{R}^n$, многочлен $Q(\eta) = P(T\eta)$ зависит от переменных $\eta_1, \dots, \eta_n$. Или, что то же самое, выражение $\prod_{j=1}^n D_j Q(\eta)$ отличается от тождественного нуля, б) $P \in \mathbb{I}_n$, если $|P(\xi)| \rightarrow \infty$ для $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Например, очевидно, что для любого $m > 1$ многочлен $P_1(\xi) = P_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^{2m} + \xi_2^{2m} + \xi_1^2 + \xi_2^2$ от двух переменных существенно зависит от переменных ξ_1, ξ_2 , а многочлен $P_2(\xi) = P_2(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 + \xi_2)^{2m} + (\xi_1 + \xi_2)^2$, не существенно зависит от переменных ξ_1, ξ_2 , так как при замене переменных $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$, P переходит в многочлен $Q(\eta) = \eta_1^{2m} + \eta_1^2$, который не зависит от переменной η_2 . В этом случае $P_1 \in \mathbb{I}_n$, $P_2 \notin \mathbb{I}_n$.

Теорема 2.1. а) Если $P \in \mathbb{I}_n$, то P существенно зависит от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, б) если $P \in \mathcal{A}_\delta(n)$, $\delta \in [0, 1]$, то для этого также необходимо условие $P \in \mathbb{I}_n$.

Доказательство. Пункт а) Предположим обратное, что для многочлена $P \in \mathbb{I}_n$ существует линейное обратимое преобразование $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ для которого $Q(\eta) := P(T\eta)$ не зависит (например) от η_n , т. е. $Q(\eta) = Q(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, 0) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n$. Тогда $P[T(0', s)] = Q(0', s) = Q(0)$ для всех $s = 1, 2, \dots$. Так как $\|(0', s)\| = s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то это противоречит условию $P \in \mathbb{I}_n$ теоремы и доказывает пункт а).

Пункт б). В [4, лемма 3.1] доказано, что если почти гипоеллиiptический многочлен R существенно зависит от своих переменных, тогда $R \in \mathbb{I}_n$. Так как любой многочлен $P \in \mathcal{A}_\delta(n)$, $\delta \in [0, 1]$ по лемме 2.2 является почти гипоеллиiptическим, то согласно вышеизложенному, $P \in \mathbb{I}_n$, если P существенно зависит от своих переменных. $\square$

Определение 2.4. Прямую в $\mathbb{R}^n$, проходящую через начало координат, будем называть центральной.

Теорема 2.2. Пусть многочлен P удовлетворяет условию (2.4') для некоторых чисел $\delta \in (0, 1]$, $C > 0$ и $M > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны: а) P является гипоеллиiptическим, б) P существенно зависит от своих переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, в) центральные линии в $\mathbb{R}^n$ не могут быть элементарными для многочлена P .

Доказательство. Докажем, что а) $\implies$ с) $\implies$ б) $\implies$ а). Пусть P гипоеллиiptичен в $\mathbb{R}^n$. Тогда $P \in \mathbb{I}_n$. Следовательно, очевидно, что центральные прямые в $\mathbb{R}^n$ не могут быть элементарными для многочлена P , то есть а) $\implies$ с).

Покажем, что из с) следует б). Пусть, наоборот, существует многочлен P , не имеющий элементарной центральной линии в $\mathbb{R}^n$, но который существенно не зависит от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда существует линейное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\prod_{j=1}^n D_j Q(\eta) \equiv 0$, где $Q(\eta) := P(T\eta)$. Так как нули конечного числа ненулевых многочленов не могут покрыть все пространство, то отсюда следует, что для некоторого индекса $j : 1 \leq j \leq n$ (пусть, для определенности, $j = n$), где $D_n Q(\eta) \equiv 0$. Тогда $Q(\eta) = Q(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, 0)$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Очевидно, что линия $\{t e^n : t \in \mathbb{R}^1, e^n = (0, 0, \dots, 1)\}$ является центральной в $\mathbb{R}^n$, при этом $Q(t e^n) = Q(0)$. Поскольку $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное обратимое отображение, то $\theta := T e^n \neq 0$.

Рассмотрим многочлен P на центральной прямой $\{t \theta : t \in \mathbb{R}^1\}$. По определению отображения T , имеем $P(t \eta) = P(t [T e^n]) = P(T[t e^n]) = Q(t e^n) = Q(0)$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Это означает, что центральная прямая $\{t \theta : t \in \mathbb{R}^1\}$ является элементарной для многочлена P . Мы получили противоречие, которое доказывает, что с) следует из б).

Наконец, покажем, что из б) следует а). Согласно следствию 2.1 и предложению 2.1 существует линейное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что многочлен $Q(\eta) := P(T\eta)$ принадлежит множеству $\mathcal{A}_\delta(n)$, для $\delta \in (0, 1]$. Из условия существенной зависимости от $\xi_1, \dots, \xi_n$, многочлена P имеем, что Q существенно зависит от $\eta_1, \dots, \eta_n$. Тогда, по теореме 2.1 получим, что $Q \in \mathbb{I}_n$. Следовательно, в силу обратимости отображения T , $P \in \mathbb{I}_n$. Так как многочлен P удовлетворяет условию (2.4'), то $d_P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$, т. е. многочлен P гипоеллиптичен. $\square$

Следствие 2.2. Пусть при условиях теоремы 2.2 $\delta = 1$. Многочлен P строго гипоеллиптичен тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий: 1) P существенно зависит от своих переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, 2) никакая центральная линия в $\mathbb{R}^n$ не является элементарной для P .

Пример 2.3. Пусть $n = 3$, $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)^6 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Здесь $m(P) = 6$. Покажем, что этот многочлен является строго гипоеллиптическим, т. е. существует положительное число C такое, что $d_P(\xi) \geq C P(\xi)^{1/6}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\|\xi\| \geq 3$. По лемме 11.1.4 из монографии [3] достаточно показать существование положительных чисел C_1 и M таких, что

$$(2.9) \quad Q(\xi) := P^{1/6}(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq C_1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \|\xi\| \geq 3.$$

Так как для $\|\xi\| \geq 3$, либо $|\xi_2| \geq 1$, либо $|\xi_3| \geq 1$, либо $|\xi_1 - \xi_2 - \xi_3| \geq 1$, то простые вычисления показывают, что

$$(2.10) \quad P^{1/6}(\xi) \sum_{j=1}^2 \left[\frac{|\xi_2|^{2-j} + |\xi_3|^{2-j}}{P(\xi)} \right]^{1/j} = \sum_{j=1}^2 \left[\frac{|\xi_2|^{2-j} + |\xi_3|^{2-j}}{P(\xi)^{1-j/6}} \right]^{1/j} \leq \sum_{j=1}^2 2^{1/j}$$

С другой стороны, для некоторой константы $C_2 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} Q(\xi) &= \sum_{\alpha \neq 0} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)^{1-|\alpha|/6}} \right|^{1/|\alpha|} \leq \\ &\leq C_2 \left[\sum_{|\alpha|=1}^6 \frac{(\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)^{6-|\alpha|}}{[(\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)^6 + \xi_2^2 + \xi_3^2]^{1-|\alpha|/6}} \right]^{1/|\alpha|} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \frac{|\xi_2|^{2-j} + |\xi_3|^{2-j}}{[(\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)^6 + \xi_2^2 + \xi_3^2]^{1-j/6}} \leq \\ &\leq C_2 \left[\sum_{|\alpha|=1}^6 1 + \sum_{j=1}^2 \left| \frac{|\xi_2|^{2-j} + |\xi_3|^{2-j}}{[(\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)^6 + \xi_2^2 + \xi_3^2]^{1-j/6}} \right|^{1/j} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.10) для $||\xi|| \geq 3$ имеем, что $Q(\xi) \leq C_2 \left[\sum_{|\alpha|=1}^6 1 + \sum_{j=1}^2 2^{1/j} \right] := \kappa$, откуда, в свою очередь, следует оценка (2.9) для $C_1 = \kappa$.

Пример 2.4. Применяя результаты [7], простые вычисления показывают, что многочлен $P(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^6 + \xi_1^4 \xi_2^4 + \xi_2^6$ принадлежит $\mathcal{A}_{2/3}(2)$.

Abstract. Conditions for strictly hypoellipticity and almost hypoellipticity are found for a class of linear differential operators. Conditions are given in terms of elementary center lines of symbols (characteristic polynomials) corresponding to these operators.

Список литературы

- [1] L. Hörmander, The Analysis of linear Partial Differential Operators 2, Springer-Verlag (1983).
- [2] G. G. Ghazaryan, “On almost hypoelliptic polynomials”, Dokl. Ross. Acad. Nauk, **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).
- [3] G. G. Kazaryan, “Strictly hypoelliptic operators with constant coefficients”, Math. USSR Sb., **183**(2), 121 – 133 (1992).
- [4] M. Langenbruch, “On the functional dimension of solutions spaces of hypoelliptic PDE”, Math. Ann., **272**, 217 – 229 (1985).
- [5] Y. Komura, “Die Nukliäritet der Lösungsräume der Hypoelliptischen Gleichungen”, Funcialaj Ekvacioj, **9**, 313 – 324 (1966).
- [6] Z. Zilezny, “On the functional dimension of the space of solution of PDE”, J. Differential Equations, **18**, 340 – 345 (1975).
- [7] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, “On increase at infinity of almost hypoelliptic polynomials”, Eurasian Math. Journal, **4**, no.4, 30 – 42 (2013).
- [8] V. N. Margaryan, G. O. Hakobyan, “On the weight of hypoellipticity of polynomials”, Inter - university collection of scientific works, no. 4, 108 – 122 (1986).

Поступила 18 сентября 2024

После доработки 20 декабря 2024

Принята к публикации 12 февраля 2025

**СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ
ДЛЯ ДРОБНЫХ p -ЛАПЛАСОВСКИХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{R}^N$,
ИМЕЮЩИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РОСТ**

Р. ПЕИ, К. МА

Тяньшуйский педагогический университет, Тяньшуй, Китай¹
E-mails: *prc211@163.com*; *macaoch@163.com*

Аннотация. Изучаются суперлинейные дробные уравнения p -Лапласиана в $\mathbb{R}^N$ с периодическим потенциалом. Когда нелинейности удовлетворяют критическому экспоненциальному росту (субкритический полиномиальный рост или субкритический экспоненциальный рост) на ∞ без удовлетворения классического условия Амброзетти-Рабиновича, с помощью теоремы о горном перевале и методов многообразия Нехари, в сочетании с дробным неравенством Мозера-Трудингера устанавливаются несколько результатов существования для решений основного состояния.

MSC2020 numbers: 35A15; 35J60; 35R11.

Ключевые слова: дробное уравнение p -Лапласиана; критический экспоненциальный рост; основное состояние; вариационные методы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы рассматриваем следующее дробное уравнение Шредингера:

$$(1.1) \quad \begin{cases} (-\Delta)_p^s u(x) + V(x)|u|^{p-2}u = f(x, u), & \text{в } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

где $p \in (1, +\infty)$, $s \in (0, 1)$, $N \geq 2$, а $(-\Delta)_p^s$ дробный p -оператор Лапласа:

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Предположения, накладываемые на потенциальную функцию V и нелинейность f , будут перечислены позже.

В последнее время проблемы, связанные с нелокальными операторами, привлекают достаточно много внимания. Фактически, дробные пространства Соболева и нелокальные проблемы играют основную роль в изучении различных наук, таких как финансы, проблема препятствий, фазовые переходы, оптимизация, волны на воде, конформная геометрия и минимальные поверхности.

¹Это исследование поддерживается NSFC (№№ 11661070, 12161077), NSF провинции Ганьсу (№ 22JR11RE193) и Группой инноваций в области нелинейных математических уравнений физики (№ TDJ2022-03).

Изучение проблемы (1.1) с $p = 2$ было стимулировано отчасти поиском стоячих волн для дробных уравнений Шредингера вида

$$(1.2) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-\Delta)^s \psi + (V(x) + \omega) \psi - f(x, \psi).$$

Волны обычно представляются в виде $\psi(x, t) = e^{-i\omega t} u(x)$, где u обозначает действительную функцию. По этой причине f имеет вид $cf(x, e^{-i\omega t} u) = e^{-i\omega t} f(x, u)$. Фактически, (1.2) имеет особое значение в изучении дробной квантовой механики (см. [1, 2]).

В последние годы появилось множество работ, посвященных изучению проблемы (1.2). Например, с использованием различных вариационных инструментов, результаты существования или кратного существования решений стоячей волны для (1.2) изучались в работах [3] – [13]. Хорошо известно, что при решении таких задач компактность вложения Соболева не выполняется из-за неограниченности области. Одним из полезных средств для восстановления компактности является взятие некоторого рабочего пространства со свойствами компактного вложения, например, радикально симметричного функционального пространства (см. [10, 11]). Другой способ — позволить потенциальной функции быть коэрцитивной на бесконечности, что все еще приводит к компактным свойствам вложения рабочего пространства (см. [5, 9, 13]). Авторы [14] исследовали существование решений основного состояния, применяя вариационный метод в сочетании с методом многообразий Нехари при различных гипотезах о нелинейности и потенциале, когда V и f являются периодическими и асимптотически периодическими по x на бесконечности.

Если положить $s = 1$, $p = 2$, (1.1) эквивалентно следующему нелинейному уравнению Шредингера

$$(1.3) \quad -\Delta u + V(x)u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

В последние несколько лет появилось много классических работ, посвященных исследованию существования нетривиальных решений, таких как [15, 16, 17] и ссылки в них. В этих и многих других работах часто предполагается следующее известное условие (AR) Амбросетти и Рабиновича [18] :

(AR) существует $\theta > 2$ такое, что $0 < \theta F(x, t) \leq tf(x, t)$, для любых $x \in \mathbb{R}^N$, $t \neq 0$, где $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$.

Когда $f(x, t)$ периодична по x , мы можем вывести, что существуют $\xi_1, \xi_2 > 0$ такие, что $F(x, t) \geq \xi_1 |t|^\theta - \xi_2$ для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Это означает, что

задача (1.3) является суперквадратичной на бесконечности. Это неудовлетворительно, поскольку есть многочисленные нелинейные члены, которые имеют суперлинейный рост в ∞ , но не удовлетворяют условию (AR), например $f(x, t) = t \ln(1 + |t|^2)$.

Условие (AR) играет важную роль в доказательстве ограниченности последовательностей Пале-Смейла. За последние два десятилетия многие стремились изучить проблему (1.3), ослабляя условие (AR). Вместо этого они рассматривали более слабое условие:

(WSQC)

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, t)}{t^2} = +\infty, \quad \text{равномерно для } x \in \mathbb{R}^N.$$

Очевидно, (AR) влечет (WSQC). Лю и Ван [19] первыми предложили условие (WSQC), которое применялось в работах [20, 21]. В частности, когда $\sigma(-\Delta + V) \subset (0, +\infty)$, Ли, Ван и Цзэн [21] установили существование решения основного состояния для f , удовлетворяющее некоторым подходящим предположениям и следующему важному условию типа Нехари:

(Ne) $t \mapsto \frac{f(x, t)}{|t|}$ строго возрастает на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Стоит отметить, что их результаты улучшили соответствующий результат, полученный Рабиновичем [17] в 1992 году.

Вдохновленные вышеуказанными работами и совсем недавней статьей [22], посвященной дробному неравенству Мозера-Трудингера, целью данной статьи является исследование существования решений основного состояния для (1.1) с $1 < p \leq \frac{N}{s}$, где нелинейный член $f(x, \cdot)$ включает субкритический или критический экспоненциальный рост (стандартный субкритический полиномиальный рост) на бесконечности.

Теперь представим наши результаты: Предположим, что потенциал $V(x)$ и нелинейность $f(x, u)$ удовлетворяют:

(V₁) $V \in C(\mathbb{R}^N)$ 1-периодична относительно $x_1, \dots, x_N$, и $V(x) > 0$.

(H₁) $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ 1-периодична относительно $x_1, \dots, x_N$.

(H₂) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{|t|^{p-2}t} = 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$.

(H₃) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(x, t)}{|t|^p} = +\infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$.

(H₄) $f(x, t)t - pF(x, t) \geq 0$ при $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Наш первый результат относится к проблеме (1.1) при стандартном докритическом полиномиальном росте

$$(\text{SCP}) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{|t|^{q-1}} = 0$$

равномерно для всех $x \in \mathbb{R}^N$, где $q \in (p, p^*)$ ($p^* = \frac{Np}{N-sp}$). В этом случае теорема Соболева о компактном вложении не выполняется из-за неограниченности области. Наша работа заключается в рассмотрении проблемы (1.1), где нелинейный член f не удовлетворяет (AR)-условию ($\theta > p$). Наш нелинейный член имеет больше свободы, т. е. нам требуется только, чтобы $f(x, t)$ удовлетворял условию (H₃) параллельно с (WSQC) ($p = 2$, $s = 1$) в ∞ в некотором смысле без других ограничений. Следовательно, наши классы функций $f(x, t)$ более общие, чем классы предыдущих работ (см., например, [15, 16, 21, 23, 17]). Используя пересмотренную теорему о горном перевале, мы стремимся получить решения основного состояния для задачи (1.1) с $1 < p < \frac{N}{s}$. Наше доказательство ограниченности последовательности (PS) отличается от такового в [24], поскольку мы умело использовали теорему резонанса, объединенную с принципом компактности концентрации Лионса. Фактически, эта новая идея, которая заключается в использовании теоремы резонанса, чтобы гарантировать ограниченность последовательности (PS) для изучения задач Дирихле в ограниченной области, вытекает из [25]. В [26] мы разработали этот метод для изучения дробных p -лапласовских уравнений, определенных в ограниченной области, включающих критический экспоненциальный рост.

Теорема 1.1. Пусть $1 < p < \frac{N}{s}$ и предположим, что (V₁) и (H₁)-(H₄) выполняются, если f удовлетворяет условию (SCP), то задача (1.1) имеет основное состояние, т. е. нетривиальное решение u_* такое, что

$$\mathcal{J}(u_*) = \inf\{\mathcal{J}(u) : u \neq 0 \text{ и } \mathcal{J}'(u) = 0\},$$

где определение функционала $\mathcal{J}$ в следующем разделе.

Замечание 1.1. Условие (H₃) означает, что наш нелинейный член f весьма универсален.

В частности, наш нелинейный член f не должен удовлетворять условию Нехари (Ne). Таким образом, наша теорема 1.1 улучшает результаты, включенные в [21].

Теперь мы рассмотрим граничный случай теорем вложения Соболева, обычно называемый случаем Мозера-Трудингера, т. е. $ps = N$. Нам понадобится следующее

Утверждение 1.1. (see [22]). Пусть $s \in (0, 1)$, и $ps = N$. Пусть $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ – пространство, определенное как пополнение $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ относительно нормы

$$u \mapsto \left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда существует $\alpha_* > 0$ такая, что

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \mid u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 1 \right\} < +\infty$$

для $\alpha \in [0, \alpha_*)$, и

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \mid u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 1 \right\} = +\infty$$

для $\alpha \in (\alpha_{s,N}^*, +\infty)$, где $\Phi_{N,s}(t) = e^t - \sum_{i=0}^{j_p-2} \frac{t^i}{i!}$, $j_p := \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$ и

$$\alpha_{s,N}^* := N \left(\frac{2(N\omega_N)^2 \Gamma(p+1)}{N!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N+k-1)!}{k!} \frac{1}{(N+2k)^p} \right)^{\frac{s}{N-s}}.$$

Далее мы определяем субкритический экспоненциальный рост и критический экспоненциальный рост соответственно следующим образом:

(SCE): f удовлетворяет субкритическому экспоненциальному росту на $\mathbb{R}^N$, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(x, t)|}{\exp \left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}} \right)} = 0$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$ для всех $\alpha > 0$.

(CG): f удовлетворяет критическому экспоненциальному росту на $\mathbb{R}^N$, если существует $\alpha_0 > 0$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(x, t)|}{\exp \left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}} \right)} = 0, \quad \text{равномерно по } x \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha > \alpha_0$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(x, t)|}{\exp \left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}} \right)} = +\infty, \quad \text{равномерно по } x \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha < \alpha_0.$$

В случае $ps = N$, когда f удовлетворяет условию (SCE), мы все еще имеем дело с проблемой (1.1), где нелинейный член f не должен удовлетворять условию (AR) ($\theta > p$) на бесконечности. Насколько нам известно, существует мало работ, посвященных изучению этой проблемы с дробным оператором p -Лапласа, определенным во всем пространстве. Следовательно, наши методы являются техническими, а наш результат является новым, поскольку мы успешно использовали теорему о резонансе, объединенную с дробным неравенством Мозера-Трудингера, установленным во всем пространстве, для проверки ограниченности последовательности (PS). Мы формулируем наш результат следующим образом:

Теорема 1.2. Пусть $sp = N$ и предположим, что (V_1) и (H_1) – (H_4) выполняются. Если f удовлетворяет условию (SCE), то задача (1.1) имеет решение в основном состоянии.

В случае $ps = N$, когда f удовлетворяет критическому экспоненциальному росту, изучение проблемы (1.1) сложнее, чем в случае субкритического экспоненциального роста (CG), поскольку функционал Эйлера-Лагранжа больше не удовлетворяет условию компактности на всех уровнях. Для стандартной эллиптической задачи авторы [27] применили последовательности экстремальных функций, соответствующие неравенству Мозера-Трудингера, чтобы восстановить компактность функционала Эйлера-Лагранжа на некотором уровне. Здесь, принимая способ выбора тестовых функций, впервые возникших в [28] для оценки некоторого уровня горного перевала, мы по-прежнему имеем дело с проблемой (1.1). Мы формулируем наш результат следующим образом:

Теорема 1.3. Пусть $sp = N$, и пусть (V_1) и (H_1) – (H_4) выполняются. Допустим, что:

(H₅) $\lim_{u \rightarrow \infty} f(x, u) \exp(-\alpha_0 \frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_*} |u|^{\frac{N}{N-s}}) u \geq \beta > \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} / (\omega_N \mathcal{M})$, равномерно по $(x, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, где ω_N обозначает объем единичного шара в $\mathbb{R}^N$, и

$$\mathcal{M} = \lim_{n \rightarrow \infty} N \ln n \int_0^1 \exp \left(N t^{\frac{N}{N-s}} \ln n - t N \ln n \right) dt,$$

(H₆) Существует $C_0 > 0$ такое, что для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$,

$$F(x, t) \leq C_0 |t|^{\frac{N}{s}} + C_0 |f(x, t)|.$$

Если f удовлетворяет условию (CG), тогда проблема (1.1) имеет решение основного состояния.

Замечание 1.2. Лам и Лу [24] недавно получили нетривиальное неотрицательное решение для стандартных задач Лапласа, определенных в ограниченной области, когда нелинейный член f удовлетворяет критическому экспоненциальному росту и удовлетворяет некоторому слабому суперлинейному условию. Кроме того, для задачи N -Лапласа существует много работ, касающихся нелинейностей с критическим экспоненциальным ростом в $\mathbb{R}^N$, см., например, [29] – [31]. Однако для задачи (1.1) с $p > 2$, определенной во всем пространстве, включающем критический экспоненциальный рост, есть редкие работы, в которых рассматриваются ее основные состояния.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем некоторые предварительные знания. В разделе 3 мы доказываем некоторые полезные леммы. В Разделе 4 мы докажем нашу основную теорему.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Во-первых, мы формулируем формулу вариации для задачи (1.1). Пусть $1 \leq r \leq \infty$ и представим через $|\cdot|_r$ норму $L^r(\mathbb{R}^N)$. Пусть $0 < s < 1 < p < \infty$ и определим $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : [u]_{s,p} < \infty\}$ со следующей нормой

$$\|u\|_{s,p} = \left(|u|_p^p + [u]_{s,p}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Полунорма Гальярдо обозначается как

$$[u]_{s,p} = \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

для всех измеримых функций $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Можно проверить, что $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ — равномерно выпуклое банахово пространство. Определим дробный критический показатель Соболева следующим образом:

$$p^* = \frac{Np}{N - sp}, \quad \text{если } sp < N; \quad p^* = \infty, \quad \text{если } sp = N.$$

Кроме того, дробное вложение Соболева показывает, что $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ непрерывно при $p \leq \gamma \leq p^*$, если $sp < N$, и $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ непрерывно при $p \leq \gamma < \infty$, если $sp = N$. Для общего введения в свойства $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ мы отсылаем читателя к [32].

Для удобства с этого момента мы будем писать $X = W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Используя условие (V_1) , мы определяем другую норму $\|\cdot\|$ на $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ следующим образом

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx + [u]_{s,p}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in X.$$

Ясно, что новая норма $\|\cdot\|$ эквивалентна стандартной $\|u\|_{s,p}$ в X . Теперь нелинейный оператор $A : X \rightarrow X^*$ определяется для всех $u, \varphi \in X$ как

$$\begin{aligned} \langle A(u), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \left[\frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+sp}} \right] dx dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2} u \varphi dx. \end{aligned}$$

Будем говорить, что функция $u \in X$ является слабым решением задачи (1.1), если

$$(2.1) \quad \langle A(u), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) \varphi dx$$

для любого $\varphi \in X$. Очевидно, что A является $(p-1)$ -однородным, нечетным и удовлетворяет

$$\langle A(u), u \rangle = \|u\|^p, \quad \|A(u)\|_* \leq \|u\|^{p-1}$$

для всех $u \in X$. Поскольку X равномерно выпуклое, то из предложения 1.3 [33] вытекает, что A удовлетворяет условию компактности.

Если $\{u_n\} \subset X$ такая, что $u_n \rightharpoonup u$ в X и $\langle A(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$, то $u_n \rightarrow u$ в X . Из условия (SCP)(или (CG)) следует, что (2.1) является уравнением Эйлера-Лагранжа функционала

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx.$$

Напомним некоторые определения, связанные с условием компактности и версией теоремы о горном перевале.

Определение 2.1. (см. [34]) Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — действительное банахово пространство с сопряженным пространством $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ и $\mathcal{J} \in C^1(X, \mathbb{R})$. Для $c \in \mathbb{R}$, мы говорим, что $\mathcal{J}$ удовлетворяет условию (PS)_c, если для любой последовательности $\{u_n\} \subset X$ с

$$\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c, \quad \mathcal{J}'(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{в } X^*,$$

существует подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ сильно сходящаяся в X .

Теперь мы формулируем теорему о горном перевале:

Утверждение 2.1. (см. [18, 34]) Пусть X — это действительное банахово пространство, и предположим, что $\mathcal{J} \in C^1(X, \mathbb{R})$ удовлетворяет условию

$$\max\{\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(u_1)\} \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\|u\|=\rho} \mathcal{J}(u),$$

для некоторых $\alpha < \beta$, $\rho > 0$ и $u_1 \in X$ с $\|u_1\| > \rho$. Пусть $c \geq \beta$ характеризуется как

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \mathcal{J}(\gamma(t)),$$

где $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\}$ — множество непрерывных путей, соединяющих 0 и u_1 . Тогда, существует последовательность $\{u_n\} \subset X$ такая, что

$$\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c \geq \beta \quad \text{и} \quad \|\mathcal{J}'(u_n)\|_{X^*} \rightarrow 0$$

3. НЕКОТОРЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 3.1. Пусть $1 < p < \frac{N}{s}$ и условия (H₁)-(H₃) и (SCP) выполнены. Тогда

- (i) существуют $\rho, \alpha > 0$ такие, что $\mathcal{J}(u) \geq \alpha$ для всех $u \in X$ с $\|u\| = \rho$,
- (ii) Существует $\phi \in X$ такое, что $\mathcal{J}(t\phi) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. В силу (SCP) и (H₁)-(H₃), для любого $\epsilon > 0$, существуют $A_1^* = A_1^*(\epsilon)$, $B_1^* = B_1^*(\epsilon)$ и M^* такие, что для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$,

$$(3.1) \quad F(x, t) \leq \frac{\epsilon}{p} |t|^p + A_1^* |t|^q,$$

$$(3.2) \quad F(x, t) \geq \frac{M^*}{p} |t|^p - B_1^*.$$

Применив неравенство Соболева: $|u|_p^p \leq K_p \|u\|^p$ и $|u|_q^q \leq K_q \|u\|^q$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &\geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\epsilon}{p} |u|_p^p - A_1^* |u|_q^q \\ &\geq \frac{1}{p} (1 - K_p \epsilon) \|u\|^p - A_1^* K_q \|u\|^q, \end{aligned}$$

где K_p и K_q – положительные константы.. Значит (i) имеет место при $\epsilon < \frac{1}{K_p}$ и достаточно малом $\|u\| = \rho > 0$.

С другой стороны, выбрав ненулевую $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и применив (3.2), при достаточно большом M^* будем иметь

$$\mathcal{J}(t\phi) \leq \frac{1}{p} (1 - M^* K_p) |t|^p \|\phi\|^p + B_1^* |\text{supp } \phi| \rightarrow -\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где $|\text{supp } \phi|$ – объем $\text{supp } \phi$. Значит (ii) имеет место.

Замечание 3.1. Фактически, из (H_2) вытекает, что при $\|u\| \rightarrow 0$,

$$\langle \mathcal{J}'(u), u \rangle = \|u\|^p + o(\|u\|^p), \quad \mathcal{J}(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p + o(\|u\|^p).$$

Поэтому,

(i) Существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любой нетривиальной критической точки u для $\mathcal{J}$, имеет место $\|u\| \geq \rho_0$.

(ii) Для любого $c > 0$, существует $\rho_c > 0$ такое, что если $\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c$, тогда $\|u_n\| \geq \rho_c$.

Лемма 3.2. Пусть $ps = N$ и допустим, что условия (H_1) – (H_3) и (SCE) (или (CG)) выполнены. Тогда:

(i) Существуют $\rho, \alpha > 0$ такие, что $\mathcal{J}(u) \geq \alpha$ для всех $u \in X$ с $\|u\| = \rho$.

(ii) Существует $\phi \in X$ такое, что $\mathcal{J}(t\phi) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. В силу (SCE) (или (CG)) и (H_1) – (H_3) , для любого $\epsilon > 0$, существуют $A_1^{**} = A_1(\epsilon)^{**}$ и достаточно большое M^{**} , а также $B_1^{**} = B_1(\epsilon)^{**}$, $\kappa > 0$ и $q_2 > \frac{N}{s}$ такие, что для всех $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$,

$$(3.3) \quad F(x, s) \leq \frac{s}{N} \epsilon |s|^{\frac{N}{s}} + A_1^{**} \Phi_{N,s} \left(\kappa |s|^{\frac{N}{N-s}} \right) |s|^{q_2},$$

$$(3.4) \quad F(x, s) \geq \frac{s M^{**}}{N} |s|^{\frac{N}{s}} - B_1^{**}.$$

Применив (3.3), неравенство Гелдера, дробное неравенство вложения Мозера-Трудингера и неравенства вложения Соболева, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &\geq \frac{s}{N} \|u\|^{\frac{N}{s}} - \frac{\epsilon}{N} |u|^{\frac{N}{s}} - A_1^{**} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\kappa |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) |u|^{q_2} dx \\ &\geq \frac{s}{N} \left(1 - \epsilon K_{\frac{N}{s}} \right) \|u\|^{\frac{N}{s}} - A_1^{**} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\kappa r \|u\|^{\frac{N}{N-s}} \left(\frac{|u|}{\|u\|} \right)^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{r' q_2} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \geq \frac{s}{N} \left(1 - \epsilon K_{\frac{N}{s}} \right) \|u\|^{\frac{N}{s}} - C \|u\|^{q_2}, \end{aligned}$$

где $r > 1$ достаточно близко к 1, C – положительная константа, $\|u\| \leq \sigma$ и $\kappa r \sigma^{\frac{N}{N-s}} < \alpha_*$. Значит (i) имеет место, если $\epsilon < \frac{1}{K_{\frac{N}{s}}}$ и $\|u\| = \rho > 0$ достаточно малы.

С другой стороны, выбрав ненулевое $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и используя (3.4), мы получаем

$$\mathcal{J}(t\phi) \leq \frac{s}{N} (1 - M^{**} K_{\frac{N}{s}}) |t|^{\frac{N}{s}} \|\phi\|^{\frac{N}{s}} + B_1^{**} |\text{supp } \phi| \rightarrow -\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где $|\text{supp } \phi|$ – объем $\text{supp } \phi$ и M^{**} достаточно большое число. Таким образом, часть (ii) верна.

Замечание 3.2. На самом деле, (H_2) и (SCE) (или (CG)) подразумевают, что при $\|u\| \rightarrow 0$ мы имеем

$$\langle \mathcal{J}'(u), u \rangle = \|u\|^{\frac{N}{s}} + o(\|u\|^{\frac{N}{s}}), \quad \mathcal{J}(u) = \frac{s}{N} \|u\|^{\frac{N}{s}} + o(\|u\|^{\frac{N}{s}}).$$

Поэтому легко видеть, что

(i) Существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любой нетривиальной критической точки u функции $\mathcal{J}$ выполняется $\|u\| \geq \rho_0$.

(ii) Для любого $c > 0$ существует $\rho_c > 0$ такое, что если $\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c$, то $\|u_n\| \geq \rho_c$.

Лемма 3.3. Пусть $1 < p < \frac{N}{s}$ и предположим, что (V_1) и (H_1) – (H_4) выполняются. Если f удовлетворяет стандартному субкритическому полиномиальному росту на $\mathbb{R}^N$ (условие (SCP)), то любая $(PS)_c$ последовательность $\mathcal{J}$ ограничена.

Доказательство. Пусть $\{u_n\} \subset X$ – последовательность $(PS)_c$ такая, что

$$(3.5) \quad \frac{\|u_n\|^p}{p} - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \rightarrow c,$$

$$(3.6) \quad \langle A(u_n), \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) \varphi dx = o(1) \|\varphi\|, \quad \varphi \in X.$$

Допустим противное, $\|u_n\| \rightarrow \infty$ и положим

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Тогда $\{v_n\}$ ограничено. Мы можем предположить, что $\{v_n\}$ слабо сходится к v в X , локально сильно сходится в $L^p(\mathbb{R}^N)$ и сходится к v для п. в. $x \in \mathbb{R}^N$. Теперь мы покажем, что $v = 0$. Разделив обе части (3.5) на $\|u_n\|^p$, мы получим

$$(3.7) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^p} dx \rightarrow \frac{1}{p}.$$

Пусть

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : v(x) \neq 0\}.$$

В силу (H_3) , имеем

$$(3.8) \quad \frac{F(x, u_n)}{|u_n|^p} |v_n|^p \rightarrow \infty, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Если $|\mathcal{A}|$ положительна, то из (H_2) и (H_4) , имеем

$$F(x, t) \geq 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^p} dx \geq \int_{\mathcal{A}} \frac{F(x, u_n)}{|u_n|^p} |v_n|^p dx \rightarrow \infty,$$

что противоречит (3.7).

По условиям (V_1) , (H_1) , аналогично доказательству леммы 2.2 (ii) в [21], можно вывести, что

$$(3.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_2(y)} |v_n|^p dx = 0.$$

В силу (3.9), применяя лемму Лионса [35, Лемма 1.1] получаем

$$(3.10) \quad v_n \rightarrow 0 \quad \text{в } L^\gamma(\mathbb{R}^N), \quad \forall \gamma \in (p, p^*).$$

С другой стороны, разделив обе части (3.6) на $\|u_n\|^{p-1}$ и устремив $n \rightarrow \infty$, мы получим

$$(3.11) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} \varphi dx \rightarrow 0, \quad \varphi \in X.$$

Мы следуем идее доказательства леммы 3.4, появившейся в нашей предыдущей работе [26], чтобы завершить доказательство этой леммы.

Пусть

$$\mathbf{f}_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} \varphi dx, \quad \varphi \in X.$$

Тогда с помощью (SCP) мы можем доказать, что $\{\mathbf{f}_n\}$ — семейство ограниченных линейных функционалов, определенных на X .

По (3.11) мы заключаем, что $\{\mathbf{f}_n(\varphi)\}$ ограничено для любого $\varphi \in X$. Кроме того, поскольку X является банаховым пространством, то из (см. теорему 2.2

в [36]) мы получаем, что $\{|\mathbf{f}_n|\}$ ограничено, где $|\mathbf{f}_n|$ обозначает норму $\mathbf{f}_n$. Это означает, что существует положительная константа C_1 такая, что

$$(3.12) \quad |\mathbf{f}_n| \leq C_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $X \subset L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, то (см. следствие 1.2 в [36]) существует непрерывный функционал $\hat{\mathbf{f}}_n$, определенный на $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ такой, что $\hat{\mathbf{f}}_n$ является расширением $\mathbf{f}_n$, и

$$(3.13) \quad \hat{\mathbf{f}}_n(\varphi) = \mathbf{f}_n(\varphi), \quad \varphi \in X,$$

$$(3.14) \quad \|\hat{\mathbf{f}}_n\|_{p^{**} \vee q^*} = |\mathbf{f}_n|,$$

где $\|\hat{\mathbf{f}}_n\|_{p^{**} \vee q^*}$ представляет норму $\hat{\mathbf{f}}_n(\varphi)$ в $L^{p^{**}}(\mathbb{R}^N) + L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$, которая определена на $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$; p^{**} и q^* являются соответственно двойственными числами p и q .

По определению функционала на $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, получаем, что существует функция $S_n(x) \in L^{p^{**}}(\mathbb{R}^N) + L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$ такая, что

$$(3.15) \quad \hat{\mathbf{f}}_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} S_n(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N).$$

Из (3.13) и (3.15) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_n(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} \varphi dx, \quad \varphi \in X,$$

что означает, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(S_n(x) - \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} \right) \varphi dx = 0, \quad \varphi \in X.$$

По основной лемме вариационных методов можно получить

$$S_n(x) = \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Из (3.12) и (3.14) имеем

$$(3.16) \quad \|\hat{\mathbf{f}}_n\|_{p^{**} \vee q^*} = \|S_n\|_{p^{**} \vee q^*} = |\mathbf{f}_n| < C_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

По (3.6) и (3.11), и выбрав $\varphi = v_n - v$, мы получаем

$$(3.17) \quad \langle A(v_n), v_n - v \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} v_n \rightarrow 0.$$

Применив неравенство Гелдера, (H_1) , (3.10) и (3.16) объединив доказательство теоремы А.4 в [34], мы получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} v_n \rightarrow 0.$$

Тогда из (3.17) вытекает, что $v_n \rightarrow v$ в X . Это приводит к противоречию, так как $\|v_n\| = 1$ и $v = 0$. Таким образом, $\{u_n\}$ ограничено в X .

Лемма 3.4. Пусть $ps = N$ и предположим, что (V_1) и (H_1) – (H_4) выполняются. Если f имеет субкритический экспоненциальный рост на $\mathbb{R}^N$ (условие (SCE)), то любая последовательность $(PS)_c \mathcal{J}$ ограничена.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность $(PS)_c$ такая, что выполняются формулы (3.5) и (3.6). На основе предыдущего раздела доказательства леммы 3.3 мы также получаем, что выполняется формула (3.11). Положим

$$\mathbf{f}_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{\frac{N}{s}-1}} \varphi dx, \quad \varphi \in X.$$

Тогда для любого $u \in X$, $\Phi_{N,s}(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ для всех $\alpha > 0$, можно заключить, что $\{\mathbf{f}_n\}$ — это семейство ограниченных линейных функционалов, определенных на X . Из (3.11) и теоремы резонанса, получаем, что $\{|\mathbf{f}_n|\}$ ограничено, где $|\mathbf{f}_n|$ обозначает норму $\mathbf{f}_n$. Это означает, что справедлива формула (3.12) (см. доказательство леммы 3.5).

Так как $X \subset L^{\frac{N}{s}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_3}(\mathbb{R}^N)$, то для некоторого $q_3 > \frac{N}{s}$, существует непрерывный функционал $\hat{\mathbf{f}}_n$, определенный на $L^{\frac{N}{s}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_3}(\mathbb{R}^N)$ такой, что $\hat{\mathbf{f}}_n$ является расширением $\mathbf{f}_n$, и

$$(3.18) \quad \hat{\mathbf{f}}_n(\varphi) = \mathbf{f}_n(\varphi), \quad \varphi \in X,$$

$$(3.19) \quad \|\hat{\mathbf{f}}_n\|_{\frac{N}{s}^{**} \vee q_3^*} = |\mathbf{f}_n|,$$

где $\|\hat{\mathbf{f}}_n\|_{\frac{N}{s}^{**} \vee q_3^*}$ представляет норму $\hat{\mathbf{f}}_n(\varphi)$ в $L^{\frac{N}{s}^{**}}(\mathbb{R}^N) + L^{q_3^*}(\mathbb{R}^N)$, которая определена на $L^{\frac{N}{s}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_3}(\mathbb{R}^N)$; $\frac{N}{s}^{**}$ и q_3^* являются соответственно двойственными числами $\frac{N}{s}$ и q_3 .

По определению функционала на $L^{\frac{N}{s}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_3}(\mathbb{R}^N)$, получаем, что существует функция $S_n(x) \in L^{\frac{N}{s}^{**}}(\mathbb{R}^N) + L^{q_3^*}(\mathbb{R}^N)$ такая, что

$$(3.20) \quad \hat{\mathbf{f}}_n(\varphi) = \int_{\Omega} S_n(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in L^{\frac{N}{s}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_3}(\mathbb{R}^N).$$

Аналогично последнему разделу доказательства леммы 3.3, мы можем доказать, что $(PS)_c$ последовательность $\{u_n\}$ ограничена в X .

Далее, мы заинтересованы в оценке минимаксного уровня c , введенного в предложении 2.2.

Лемма 3.5. Пусть $ps = N$ и предположим, что (H_1) , (H_2) , (H_4) и (H_5) выполняются. Тогда

$$(3.21) \quad c < \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} \frac{s}{N}.$$

Доказательство. Чтобы получить более точную информацию об уровне минимакса c , обозначим через B единичный шар и рассмотрим следующую последовательность неотрицательных функций:

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} |\ln \epsilon|^{\frac{N-s}{N}}, & \text{если } |x| \leq \epsilon, \\ \frac{|\ln |x||}{|\ln \epsilon|^{\frac{s}{N}}}, & \text{если } \epsilon < |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Положим

$$\omega_n(x) = \frac{u_{\epsilon_n}}{\|u_{\epsilon_n}\|},$$

где $\epsilon_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $\|\omega_n\| = 1$, как в доказательстве леммы 3.2, имеем, что $\mathcal{J}(t\omega_n) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, существует некоторое t^* такое, что $u_1 = t^*\omega_n$ в предложении 2.1. Таким образом, имеем $c \leq \max_{t>0} \mathcal{J}(t\omega_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом, достаточно показать, что $\max_{t>0} \mathcal{J}(t\omega_n) < \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0}\right]^{\frac{N-s}{s}} \frac{s}{N}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Допустим, что это не так. Тогда для всех n этот максимум больше или равен $\left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0}\right]^{\frac{N-s}{s}} \frac{s}{N}$. Пусть $t_n > 0$ будет таким, что

$$(3.22) \quad \mathcal{J}(t_n\omega_n) = \max\{\mathcal{J}(t\omega_n) : t \geq 0\} \geq \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0}\right]^{\frac{N-s}{s}} \frac{s}{N}.$$

Из (H_1) , (H_2) , (H_4) и (3.22), заключаем, что

$$(3.23) \quad t_n^{\frac{N}{s}} \geq \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0}\right]^{\frac{N-s}{s}}.$$

Кроме того, при $t = t_n$, имеем

$$t_n^{\frac{N}{s}-1} - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, t_n\omega_n)\omega_n dx = 0,$$

что означает

$$(3.24) \quad t_n^{\frac{N}{s}} = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n dx.$$

Более того, из (H_5) следует, что для данного $\epsilon > 0$ существует $R_\epsilon > 0$ такое, что

$$tf(x, t) \geq (\beta - \epsilon) \exp\left(\alpha_0 \frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_*} |t|^{\frac{N}{N-s}}\right), \quad \forall t \geq R_\epsilon.$$

Тогда, в силу (3.24), имеем

$$\begin{aligned}
 t_n^{\frac{N}{s}} &= \int_{B_1(0)} f(x, t_n \omega_n) t_n \omega_n dx \\
 &\geq \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} f(x, \frac{t_n}{\|u_{\frac{1}{n}}\|} (\ln n)^{\frac{N-s}{N}}) \frac{t_n}{\|u_{\frac{1}{n}}\|} (\ln n)^{\frac{N-s}{N}} dx \\
 &\geq (\beta - \epsilon) \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \exp(\alpha_0 \frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_*} t_n^{\frac{N}{N-s}} \frac{\ln n}{\|u_{\frac{1}{n}}\|^{\frac{N}{N-s}}}) dx \text{ (for large } n) \\
 &= (\beta - \epsilon) \omega_N (\frac{1}{n})^N \exp(\alpha_0 \frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_*} t_n^{\frac{N}{N-s}} \frac{\ln n}{\|u_{\frac{1}{n}}\|^{\frac{N}{N-s}}}).
 \end{aligned}$$

Следовательно, при больших n ,

$$(3.25) \quad t_n^{\frac{N}{s}} \geq (\beta - \epsilon) \omega_N \exp \left(\frac{\alpha_0 \frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_*} t_n^{\frac{N}{N-s}}}{N \|u_{\frac{1}{n}}\|^{\frac{N}{N-s}}} - 1 \right) N \ln n,$$

где ω_N – объем единичного шара, и $\|u_{\frac{1}{n}}\| \rightarrow (\alpha_{s,N}^*/N)^{\frac{N-s}{N}}$ (см. [22]). Теперь из (3.25), находим, что $\{t_n\}$ ограничено. Тогда, в силу (3.23), получим

$$(3.26) \quad t_n^{\frac{N}{s}} \rightarrow \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}}.$$

Пусть

$$A_n = \{x \in B : t_n \omega_n(x) \geq R_\epsilon\}, \quad B_n = B \setminus A_n.$$

представим интеграл в (3.24) в виде суммы двух интегралов по A_n и B_n . Аналогично доказательству (3.25), получим

$$(3.27) \quad \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} \geq (\beta - \epsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \exp \left[\alpha_{s,N}^* \omega_n^{\frac{N}{N-s}} \right] dx - (\beta - \epsilon) \omega_N.$$

Последний интеграл в (3.27), обозначим через I_n и посчитаем следующим образом:

$$I_n = \left\{ \omega_N + N \omega_N \ln n \int_0^1 \exp \left(N t^{\frac{N}{N-s}} \ln n - t N \ln n \right) dt \right\}.$$

Тогда, в силу (3.27) имеем

$$\left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} \geq (\beta - \epsilon) \omega_N \mathcal{M},$$

откуда вытекает, что $\beta \leq \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} / (\omega_N \mathcal{M})$. Это противоречит (H_5) .

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1.1. Доказательство состоит из двух шагов.

Шаг 1. Мы утверждаем, что задача (1.1) имеет нетривиальное решение $\tilde{u}^*$. По лемме 3.1 для $c > 0$, указанного в предложении 2.1, существует последовательность $(PS)_c$ для функционала $\mathcal{J}$. Из леммы 3.3 последовательность $\{u_n\}$ ограничена в X . Пусть

$$(4.1) \quad \delta^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_2(y)} |u_n|^p dx.$$

Если $\delta^* = 0$, снова применив лемму Лиона [35],

$$u_n \rightarrow 0 \text{ в } L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^N), \quad \forall \gamma_1 \in (p, p^*).$$

Итак, из (H_1) , (H_2) и (SCP) , следует, что

$$(4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx = 0$$

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx = 0.$$

Из (3.5) и (3.6) мы знаем, что $c = 0$. Это приводит к противоречию. Следовательно, $\delta^* > 0$. По (4.1) мы можем взять $\{\tilde{z}_n\} \subset \mathbb{R}^N$ такую, что

$$\int_{B_2(\tilde{z}_n)} |u_n|^p dx \geq \frac{\delta^*}{2}.$$

Можно заметить, что количество точек в $\mathbb{Z}^N \cap B_2(\tilde{z}_n)$ меньше 4^N . Итак, существует $\tilde{y}_n \in \mathbb{Z}^N \cap B_2(\tilde{z}_n)$ такая, что

$$(4.4) \quad \int_{B_2(\tilde{y}_n)} |u_n|^p dx \geq m^* > 0.$$

Положим $\tilde{u}_n = u_n(\cdot + \tilde{y}_n)$. Используя условия (V_1) и (H_1) , имеем $\|\tilde{u}_n\| = \|u_n\|$ и

$$(4.5) \quad \int_{B_2(0)} |\tilde{u}_n|^p dx = \int_{B_2(\tilde{y}_n)} |u_n|^p dx \geq m^* > 0.$$

Переходя к подпоследовательности, мы имеем $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}^*$ в X , $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}^*$ в $L_{loc}^\gamma(\mathbb{R}^N)$; и из (4.5) имеем, что $\tilde{u}^* \neq 0$. Кроме того, по инвариантности задачи относительно трансляции $\mathbb{Z}^N$, мы выводим, что $\{\tilde{u}_n\}$ также является последовательностью $(PS)_c$ для $\mathcal{J}$. Итак, для любого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, мы получаем $\langle \mathcal{J}'(\tilde{u}^*), \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{J}'(\tilde{u}_n), \varphi \rangle = 0$. Следовательно, $\mathcal{J}'(\tilde{u}^*) = 0$ и $\tilde{u}^*$ — нетривиальное решение (1.1).

Шаг 2. Покажем, что задача (1.1) имеет решение основного состояния. Пусть

$$(4.6) \quad m = \inf\{\mathcal{J}(u) : u \neq 0 \text{ и } \mathcal{J}'(u) = 0\}.$$

Предположим, что u — произвольная критическая точка $\mathcal{J}$. Из (H_4) имеем

$$(4.7) \quad \mathcal{J}(u) = \mathcal{J}(u) - \frac{1}{p} \langle \mathcal{J}'(u), u \rangle \geq 0$$

и, таким образом, $m \geq 0$. Следовательно, $0 \leq m \leq \mathcal{J}(\tilde{u}^*) < +\infty$. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность нетривиальных критических точек $\mathcal{J}$ такая, что $\mathcal{J}(u_n) \rightarrow m$. По замечанию 3.1 (i) мы знаем, что

$$(4.8) \quad \|u_n\| \geq \rho_0$$

для некоторого $\rho_0 > 0$. Поскольку u_n — критическая точка, мы также получаем

$$(1 + \|u_n\|)\|\mathcal{J}'(u_n)\| \rightarrow 0.$$

Таким образом, $\{u_n\}$ является последовательностью $(PS)_c$ на уровне m . Из леммы 3.3 следует, что $\{u_n\}$ ограничено в X . Для этой последовательности $\{u_n\}$ определим δ^* , как в (4.1). Если $\delta^* = 0$, аналогично (4.3) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx = 0$$

и

$$\|u_n\|^p = \langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \rightarrow 0.$$

Это противоречит (4.8). Следовательно, $\delta^* > 0$. Теперь, используя инвариантность задачи (1.1) относительно трансляции $\mathbb{Z}^N$, мы можем показать, что подходящий сдвиг $\{u_n\}$, обозначаемый как $\{\tilde{u}_n\}$, удовлетворяет

$$\mathcal{J}'(\tilde{u}_n) = 0, \quad \mathcal{J}(\tilde{u}_n) = \mathcal{J}(u_n) \rightarrow m,$$

и $\{\tilde{u}_n\}$ слабо сходится к некоторому $u_* \neq 0$. Более того, из (H_4) , применяя лемму Фату, можно вывести, что

$$\mathcal{J}(u_*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\mathcal{J}(u_n) - \frac{1}{p} \langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle \right) = m.$$

Следовательно, u_* является нетривиальной критической точкой $\mathcal{J}$ с $\mathcal{J}(u_*) = m$, и доказательство теоремы 1.1 завершено.

Доказательство теоремы 1.2. Доказательство состоит из двух шагов.

Шаг 1. Мы утверждаем, что задача (1.1) имеет нетривиальное решение $\tilde{u}^*$. По Лемме 3.2 для $c > 0$, заданной в Предложении 2.1, существует последовательность $(PS)_c$ для функционала $\mathcal{J}$. В силу леммы 3.4, последовательность $\{u_n\}$ ограничена в X , т. е. существует $\beta > 0$ такое, что $\|u_n\| \leq \beta$. Пусть

$$(4.9) \quad \delta^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_2(y)} |u_n|^{\frac{N}{s}} dx.$$

Если $\delta^* = 0$, снова используя лемму Лионса [35],

$$(4.10) \quad u_n \rightarrow 0 \quad \text{в } L^\gamma(\mathbb{R}^N), \quad \forall \gamma \in \left(\frac{N}{s}, +\infty\right).$$

Поскольку f удовлетворяет субкритическому экспоненциальному росту (SCE) на $\mathbb{R}^N$, в силу (H_2) для любого $\epsilon > 0$ можно найти константу $C_\beta > 0$, которая

зависит только от β и ϵ так, что

$$|f(x, t)| \leq \epsilon |t|^{\frac{N}{s}-1} + C_\beta \Phi_{N,s} \left(\frac{\alpha_*}{2k\beta^{\frac{N}{N-s}}} |t|^{\frac{N}{N-s}} \right), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Таким образом, из дробного неравенства Мозера-Трудингера (см. Предложение 1.1),

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \right| &\leq C_\beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\frac{\alpha_*}{2\beta^{\frac{N}{N-s}}} |u_n|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{k}} |u_n|_{k'} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \\ &= C_\beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\frac{\alpha_*}{2\beta^{\frac{N}{N-s}}} \|u_n\|^{\frac{N}{N-s}} \left| \frac{u_n}{\|u_n\|} \right|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{k}} |u_n|_{k'} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \\ &\leq C_2 |u_n|_{k'} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $k > 1$, C_2 — положительная константа, а k' — двойственное число k . Аналогично получим, что (4.2) выполняется. Оставшееся доказательство полностью аналогично последнему разделу доказательства теоремы 1.1. Мы опускаем его.

Доказательство теоремы 1.3. Из леммы 3.2 и леммы 3.5 следует, что существует последовательность Пале-Смейла $\{u_n\}$ на уровне $0 < c < \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} \frac{s}{N}$. Аналогично доказательству леммы 3.4, мы можем доказать, что $(PS)_c$ последовательность $\{u_n\}$ ограничена в X . Далее, следуя доказательству теоремы 1.2, нам нужно только показать, что $\delta^* > 0$ в (4.9). Действительно, допустим противное, что $\delta^* = 0$, тогда (4.10) выполняется. Применяя (H_2) и (H_6) , аналогично доказательству предложения 5.2 в [37], мы получаем

$$(4.11) \quad \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \rightarrow 0.$$

Тогда, в силу (4.11)

$$(4.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^{\frac{N}{s}} = \frac{N}{s} c < \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}}.$$

Так как f имеет критический экспоненциальный рост (CG) в $\mathbb{R}^N$, то из (H_2) следует, что для любых $\epsilon > 0$, $\alpha > \alpha_0$, существует $C_3 = C_3(\epsilon, \alpha) > 0$ такое, что

$$|f(x, t)| \leq \epsilon |t|^{\frac{N}{s}-1} + C_3 \Phi_{N,s} \left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}} \right), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Тогда, из дробного неравенства Мозера-Трудингера (см. теорему 1.3 в [22]),

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \right| &\leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(k_1 \alpha |u_n|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{k_1}} |u_n|_{k'_1} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \\ &\leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(k_1 \alpha \|u_n\|^{\frac{N}{N-s}} \left| \frac{u_n}{\|u_n\|} \right|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{k_1}} |u_n|_{k'_1} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \\ &\leq C_4 |u_n|_{k'_1} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $k_1 > 1$ достаточно близко к 1, α близко к α_0 , C_4 — положительная константа, а k'_1 — двойственное число k_1 . Таким образом,

$$\|u_n\|^{\frac{N}{s}} = \langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \rightarrow 0.$$

Это приводит к противоречию с (4.12). Доказательство завершено.

Благодарность. Авторы благодарят рецензента за ценные замечания и предложения по улучшению этой статьи.

Abstract. We study superlinear fractional p -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with periodic potential. When nonlinearities satisfy critical exponential growth (subcritical polynomial growth or subcritical exponential growth) at ∞ without satisfying the classical Ambrosetti-Rabinowitz condition, by using mountain pass theorem and Nehari manifold methods combined with the fractional Moser-Trudinger inequality, several existence results for ground state solutions are established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Laskin, “Fractional quantum mechanics”, *Phys. Rev. E* **62**, 31 – 35 (2000).
- [2] N. Laskin, “Fractional quantum mechanics and Levy path integrals”, *Phys. Lett. A* **268**, 298 – 305 (2000).
- [3] V. Ambrosio, T. Isernia, “Multiplicity and concentration results for some nonlinear Schrödinger equations with the fractional p -Laplacian”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **38** (11), 5835 – 5881 (2018).
- [4] V. Ambrosio, “Concentrating solutions for a class of nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ ”, *Rev. Mat. Iberoam.* **35**(5), 1367 – 1414 (2019).
- [5] V. Ambrosio, “Nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ ”, *Front. Elliptic Parabol. Probl.* Birkhäuser/Springer, Cham, xvii+662 pp. ISBN: 978-3-030-60219-2; 978-3-030-60220-8 (2021).
- [6] V. Ambrosio, G. M. Figueiredo, T. Isernia, “Sign-changing solutions for a class of zero mass nonlocal Schrödinger equations”, *Adv. Nonlinear Stud.* **19**(1), 113 – 132 (2019).
- [7] V. Ambrosio, “Concentration phenomenon for a fractional Schrödinger equation with discontinuous nonlinearity”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **16**(11), 2919 – 2944 (2023).
- [8] T. Isernia, “On a nonhomogeneous sublinear-superlinear fractional equation in $\mathbb{R}^N$ ”, *Riv. Math. Univ. Parma (N.S.)* **10**(1), 167 – 186 (2019).
- [9] X. J. Chang, “Ground state solutions of asymptotically linear fractional Schrödinger equations”, *J. Math. Phys.* **54**, 061504 (2013).
- [10] X. J. Chang, Z. Q. Wang, “Ground state solutions of scalar field equations involving fractional Laplacian with general nonlinearity”, *Nonlinearity* **26**, 479 – 494 (2013).
- [11] P. Felmer, A. Quaas, J. Tan, “Positive solutions of nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **142**, 1237 – 1262 (2012).
- [12] G. Molica Bisci, Rădulescu, D.V.: Ground state solutions of scalar field fractional Schrödinger equations”, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **54**, 2985 – 3008 (2015).
- [13] S. Secchi, “Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ ”, *J. Math. Phys.* **54**, 031501 (2013).
- [14] W. Zhang, J. Zhang, H. L. Mi, “On fractional Schrödinger equation with periodic and asymptotically periodic conditions”, *Comput. Math. Appl.* **174**, 1321 – 1332 (2017).
- [15] T. Bartsch, Z. Q. Wang, “Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$ ”, *Comm. Partial Differential Equations* **20**, 1725 – 1741 (1995).
- [16] V. Coti Zelati, P. H. Rabinowitz, “Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$ ”, *Comm. Pure Appl. Math.* **XIV**, 1217 – 1269 (1992).

- [17] P. H. Rabinowitz, “On a class of nonlinear Schrödinger equations”, *Z. Angew. Math. Phys.* **43**, 270 – 291 (1992).
- [18] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, “Dual variational methods in critical point theory and applications”, *J. Funct. Anal.* **14**, 349 – 381 (1973).
- [19] Z. L. Liu, Z. Q. Wang, “On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition”, *Adv. Nonlinear Stud.* **4**, 563 – 574 (2004).
- [20] Y. Ding, C. Lee, “Multiple solutions of Schrödinger equations with indefinite linear part and super or asymptotically linear terms”, *J. Differential Equations* **222**, 137 – 163 (2006).
- [21] Y. Q. Li, Z. Q. Wang, J. Zeng, “Ground state of nonlinear Schrödinger equation with potentials”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non Linéaire* **23**, 829 – 837 (2006).
- [22] C. F. Zhang, “Trudinger-Moser inequalities in fractional Sobolev-Slobodeckij spaces and multiplicity of weak solutions to the fractional-Laplacian equation”, *Adv. Nonlinear Stud.* **19**, 197 – 218 (2019).
- [23] S. B. Liu, “On ground states of superlinear p -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ ”, *J. Math. Anal. Appl.* **361**, 48 – 58 (2010).
- [24] L. Lam, G. Z. Lu, “N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with subcritical and critical growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition”, *Adv. Nonlinear Stud.* **13**, 289 – 308 (2013).
- [25] Y. M. Zhang, Y. T. Shen, “Existence of solutions for elliptic equations without superquadraticity condition”, *Front. Math. China* **7**, 587 – 595 (2012).
- [26] R. C. Pei, “Fractional p -Laplacian equations with subcritical and critical exponential growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition”, *Mediterr. J. Math.* **15**, Art. 66, 15pp (2018).
- [27] D. G. de Figueiredo, J. M. doÓ, B. Ruf, “Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **3**, 139 – 153 (1995).
- [28] H. Brezis, L. Nirenberg, “Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents”, *Comm. Pure Appl. Math.* **36**, 437 – 477 (1983).
- [29] Adimurthi, Y. Yang, “An interpolation of Hardy inequality and Trudinger- Moser inequality in $\mathbb{R}^N$ and its applications”, *International Mathematics Research Notices* **13**, 2394 – 2426 (2010).
- [30] J. M. doÓ, E. Medeiros, U. Severo, “On a quasilinear nonhomogeneous elliptic equation with critical growth in $\mathbb{R}^N$ ”, *J. Differential Equations* **246**, 1363 – 1386 (2009).
- [31] Y. Yang, “Existence of positive solutions to quasi-linear elliptic equations with exponential growth in the whole Euclidean space”, *J. Funct. Anal.* **262**, 1679 – 1704 (2012).
- [32] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, “Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces”, *Bull. Sci. Math.* **136**, 521 – 573 (2012).
- [33] K. Perera, R. P. Agarwal, D. O’Regan, “Morse theoretic aspects of p -Laplacian operators”, *Mathematical Surveys and Monographs* **161**, American mathematical Society, Providence, RI (2010).
- [34] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser (1996).
- [35] P. L. Lions, “The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part2”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non Linéaire* **1**, 223 – 283 (1984).
- [36] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin (2011).
- [37] L. Lam, G. Z. Lu, “Existence and multiplicity of solutions to equations of N -Laplacian type with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$ ”, *J. Funct. Anal.* **262**, 1132 – 1165 (2012).

Поступила 14 августа 2024

После доработки 04 декабря 2024

Принята к публикации 06 декабря 2024

ИЗБЫТОЧНОСТЬ БИФРЕЙМОВ

М. А. ХАСАНХАНИ ФАРД

Университет Валиаср Рафсанджана, Рафсанджан, Иран
E-mail: *m.hasankhani@vru.ac.ir*

Аннотация. В данной статье рассматривается избыточность бифреймов в сепарабельных гильбертовых пространствах и представлены некоторые свойства верхней и нижней избыточности бифреймов.

MSC2020 numbers: 32C15; 42C15.

Ключевые слова: Фрейм, бифрейм, функция избыточности; нижняя избыточность; верхняя избыточность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Концепция фреймов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ была первоначально введена Даффином и Шеффером в контексте негармонического ряда Фурье [1]. За последнее десятилетие были предложены различные обобщения фреймов, такие как фреймы подпространств, псевдофреймы, косые фреймы, непрерывные фреймы, фреймы слияния, g -фреймы и т. д. Концепция фреймов Парсеваля с равной нормой на конечномерных гильбертовых пространствах была впервые введена Касаццей и Леонардом в [2, 3] и очень быстро развивалась в течение последних десяти лет, особенно в контексте вейвлетов и систем Габора.

Если задано сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и счетным множеством индексов I , то последовательность $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ в $\mathcal{H}$ называется фреймом для $\mathcal{H}$, если существуют константы $A > 0$, $B < \infty$ такие, что для всех $x \in \mathcal{H}$

$$(1.1) \quad A \|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle|^2 \leq B \|x\|^2,$$

где A, B — соответственно нижняя и верхняя границы фрейма. Второе неравенство условия фрейма (1.1) также известно как условие Бесселя для $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$. Фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ называется A -жестким фреймом, если $A = B$. Жёсткий фрейм с $\|f_i\| = c$ для всех $i \in I$ называется жёстким фреймом с c -равной нормой, а жёсткий фрейм с границами 1 называется фреймом Парсеваля.

Ограниченный линейный оператор $S_{\mathcal{F}}$, определяемый равенством

$$S_{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad S_{\mathcal{F}}x = \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle f_i$$

называется фрейм оператором $\mathcal{F}$. Известно, что фрейм оператор S является положительным, самосопряженным и обратимым оператором.

Два фрейма $\{f_i\}_{i \in I}$ и $\{g_i\}_{i \in I}$ являются дуальными фреймами для $\mathcal{H}$, если

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, g_i \rangle f_i, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Фрейм $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^m$, определенный $\tilde{f}_i = S^{-1}f_i$ для $i \in I$, является дуальным фреймом фрейма $\{f_i\}_{i \in I}$, и называется каноническим дуальным фреймом $\{f_i\}_{i \in I}$. Более подробную информацию о фреймах см. в [4] – [9].

Фреймы — это избыточные наборы векторов в гильбертовом пространстве, которые дают естественное представление каждого вектора в пространстве, но могут иметь бесконечно много различных представлений для любого данного вектора. Именно эта избыточность делает фреймы полезными в приложениях. В обработке сигналов эта концепция стала очень полезной при анализе полноты и устойчивости линейных дискретных представлений сигналов.

Соотношение количество векторов фрейма и измерения определяется как избыточность фрейма в конечномерном случае, что является удовлетворительным определением. Более точное количественное понятие избыточности для конечных фреймов (нижняя и верхняя избыточности) было введено в [10]. Это количественное понятие избыточности обобщено на бесконечные фреймы в [11]. В этой статье мы обобщили количественное понятие избыточности на бифреймы [12] и представили некоторые из его свойств.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Бифреймы определены в [12] следующим образом.

Определение 2.1. Пара последовательностей $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ в $\mathcal{H}$ называется бифреймом для $\mathcal{H}$ если существуют положительные константы A и B такие, что для всех $x \in \mathcal{H}$

$$(2.1) \quad A \|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq B \|x\|^2.$$

A, B называются, соответственно верхним и нижним границами бифрейма. Бифрейм $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ называется A -жестким фреймом, если $A = B$. Жесткий бифрейм с границей A , с $\|f_i\| = c$ и $\|g_i\| = d$, для всех $i \in I$, называется A -жестким

бифреймом с (c, d) -нормой, а жесткий бифрейм с границой 1 называют бифреймом Парсеваля. Ограниченный линейный оператор $S_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$ определенный равенством

$$S_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad S_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}x = \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle g_i$$

называется бифрейм оператором бифрейма $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Известно, что $S_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$ является положительным, самосопряженным и обратимым оператором [12].

В случае бесконечного I ряды в (1.1) и (2.1) сходятся. Ряд в (1.1) сходится безусловно, а следующий пример показывает, что ряд в (2.1) может сходиться условно.

Пример 2.1. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ортонормальный базис в бесконечномерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Рассмотрим следующие последовательности

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^\infty &= \left\{ e_1, e_2, \frac{2^3}{2}e_2, -\frac{2^3}{2}e_2, e_3, \frac{3^3}{2}e_3, -\frac{3^3}{2}e_3, \dots, e_n, \frac{n^3}{2}e_n, -\frac{n^3}{2}e_n \dots \right\}, \\ \mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^\infty &= \{e_1, e_2, e_1, e_1, e_3, e_1, e_1, \dots, e_n, e_1, e_1 \dots\}. \end{aligned}$$

Для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$\sum_{i=1}^\infty \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle = \sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$$

следовательно, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – фрейм Парсеваля для $\mathcal{H}$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^\infty |\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle| = \sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i \rangle|^2 + \sum_{i=2}^\infty i^3 |\langle x, e_i \rangle \langle e_1, x \rangle|.$$

Теперь, для $x_0 := e_1 + \sum_{j=2}^\infty \frac{1}{j^2} e_j$, мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty |\langle x_0, f_i \rangle \langle g_i, x_0 \rangle| &= \sum_{i=1}^\infty \left| \left\langle e_1 + \sum_{j=2}^\infty \frac{1}{j^2} e_j, e_i \right\rangle \right|^2 \\ &+ \sum_{i=2}^\infty i^3 \left| \left\langle e_1 + \sum_{j=2}^\infty \frac{1}{j^2} e_j, e_i \right\rangle \left\langle e_1, e_1 + \sum_{j=2}^\infty \frac{1}{j^2} e_j \right\rangle \right| = \left| 1 + \sum_{j=2}^\infty \frac{1}{j^2} \right|^2 + \sum_{j=2}^\infty j = \infty. \end{aligned}$$

Согласно [13, Теорема 3.54], существует перестановка σ натуральных чисел $\mathbb{N}$ такая, что $\liminf S_{\sigma(n)} = 0$ и $\limsup S_{\sigma(n)} = 1$, где

$$S_{\sigma(n)} := \sum_{i=1}^n \langle x_0, f_{\sigma(i)} \rangle \langle g_{\sigma(i)}, x_0 \rangle.$$

Следовательно, ряд $\sum_{i=1}^\infty \langle x_0, f_i \rangle \langle g_i, x_0 \rangle$ сходится условно.

Бодман, Касаза и Кутинёк ввели количественное понятие избыточности для конечных фреймов, а Кэхилл, Касацца и Хайнеке обобщили его на бесконечные фреймы.

Определение 2.2. [10] Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ – фрейм в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Функция избыточности $\mathcal{F}$ определяется на единичной сфере $\mathbb{S} := \{x \in \mathcal{H}; \|x\| = 1\}$ в $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(x) := \sum_{i \in I} \|P_{\langle f_i \rangle}(x)\|^2,$$

где $P_{\langle f_i \rangle}$ – ортогональная проекция на $\langle f_i \rangle := \text{span}\{f_i\}$.

Верхняя и нижняя избыточности $\mathcal{F}$ определяются так:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+ := \sup_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(x) \quad \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^- := \inf_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(x),$$

Кроме того, $\mathcal{F}$ имеет равномерную избыточность, если $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^- = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+$.

Свойства нижней и верхней избыточности для фреймов можно найти в [10, Теорема 2.1] и [11, Теорема 3.1].

Поскольку нулевые векторы не оказывают влияния на избыточность, в этой статье мы предполагаем, что $f_i \neq 0$ для всех $i \in I$. Таким образом,

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(x) := \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle|^2}{\|f_i\|^2}.$$

Мы определяем избыточность бифреймов следующим образом.

Определение 2.3. Пусть $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$. Функция избыточности бифрейма $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ определяется на единичной сфере $\mathbb{S} := \{x \in \mathcal{H}; \|x\| = 1\}$ следующим образом

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) := \sum_{i \in I} \|P_{\langle f_i \rangle}(x)\| \|P_{\langle g_i \rangle}(x)\|,$$

где $P_{\langle f_i \rangle}$ – ортогональный проектор на $\langle f_i \rangle := \text{span}\{f_i\}$, а $P_{\langle g_i \rangle}$ – ортогональный проектор на $\langle g_i \rangle := \text{span}\{g_i\}$.

Верхняя и нижняя функции избыточности $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ определяются так

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ := \sup_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- := \inf_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x).$$

При этом, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ имеет равномерную избыточность, если $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$.

Так как нулевые векторы не влияют на избыточность, далее будем считать, что $f_i \neq 0$ и $g_i \neq 0$, для всех $i \in I$. Таким образом,

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) := \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|}.$$

Очевидно, если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ – фрейм в $\mathcal{H}$, то $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{F})}^- = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{F})}^+ = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+$. Кроме того, применив неравенство Коши-Шварца, легко видеть, что если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – такие фреймы в $\mathcal{H}$, что $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является бифремом,

то $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \leq \sqrt{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+ \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^+}$. В конечномерном Гильбертовом пространстве нижняя функция избыточности бифрейма больше нуля, а верхняя функция избыточности конечна.

Утверждение 2.1. Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифреймы в конечномерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$ достигаются, и $0 < \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ < \infty$.

Доказательство. В силу непрерывности отображения $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$ на компактное множество $\mathbb{S}$, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$ достигаются. При $x \in \mathbb{S}$

$$0 < \frac{A}{MM'} \leq \frac{1}{MM'} \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} \leq \sum_{i \in I} \frac{\|f_i\| \|g_i\|}{\|f_i\| \|g_i\|} = |I|,$$

где A – нижняя функция избыточности бифрейма $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $M = \sup_{i \in I} \|f_i\|$, и $M' = \sup_{i \in I} \|g_i\|$. Следовательно, $0 < \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ < \infty$. $\square$

Следующие два примера показывают, что это утверждение ошибочно для бесконечных бифреймов.

Пример 2.2. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ортонормальный базис в бесконечномерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Рассмотрим бифрейм $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, определенный ниже.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{f_i\}_{i=1}^\infty = \left\{ e_1, e_1, e_2, \frac{1}{2}e_1, e_3, \frac{1}{4}e_1, e_4, \frac{1}{8}e_1, \dots, e_n, \frac{1}{2^{n-1}}e_1 \dots \right\}, \\ \mathcal{G} &= \{g_i\}_{i=1}^\infty = \left\{ e_1, e_1, e_2, \frac{1}{2}e_1, e_3, \frac{1}{4}e_1, e_4, \frac{1}{8}e_1, \dots, e_n, \frac{1}{2^{n-1}}e_1 \dots \right\}. \end{aligned}$$

Для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle &= \sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i \rangle|^2 + \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right) |\langle x, e_1 \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 + \frac{4}{3} |\langle x, e_1 \rangle|^2, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^\infty \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq \frac{7}{3} \|x\|^2.$$

Таким образом, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является бифреймом в $\mathcal{H}$. Далее, для любого $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) &= \sum_{i=1}^\infty \left| \left\langle x, \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\rangle \left\langle \frac{g_i}{\|g_i\|}, x \right\rangle \right| \\ &= \sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i \rangle|^2 + |\langle x, e_1 \rangle| + |\langle x, e_1 \rangle| + |\langle x, e_1 \rangle| + \dots, \end{aligned}$$

следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \geq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(e_1) = \infty$.

Пример 2.3. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормальный базис в бесконечномерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Рассмотрим бифрейм $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, определённый ниже.

$$\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{e_1, e_2 - e_1, e_2 + e_1, e_3 - 2e_1, e_3 + 2e_1, e_4 - 3e_1, e_4 + 3e_1 \dots\},$$

$$\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^{\infty} = \{e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, e_4, e_4 \dots\}.$$

Для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle = |\langle x, e_1 \rangle|^2 + 2 \sum_{i=2}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2,$$

следовательно,

$$\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq 2 \|x\|^2.$$

Значит $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$. Для любого $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \left\langle x, \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\rangle \left\langle \frac{g_i}{\|g_i\|}, x \right\rangle \right| \\ &= |\langle x, e_1 \rangle|^2 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(i-1)^2 + 1}} |\langle x, e_i - (i-1)e_1 \rangle \langle e_i, x \rangle| \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(i-1)^2 + 1}} |\langle x, e_i + (i-1)e_1 \rangle \langle e_i, x \rangle|, \end{aligned}$$

следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}(e_n) = \frac{2}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}}$, для любого натурального $n \geq 2$. Значит $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-} = 0$.

Следующее утверждение описывает класс бифреймов с равномерной избыточностью.

Утверждение 2.2. Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – фреймы в $\mathcal{H}$ с нормами, равными, соответственно, c и d , с верхними фрейм границами A , такие что $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – бифрейм с нижней фрейм границей A , тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-} = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{+} = \frac{A}{cd}$.

Доказательство. Для всех $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{A}{cd} &\leq \frac{1}{cd} \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq \frac{1}{cd} \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle| \\ &\leq \frac{1}{cd} \left(\sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in I} |\langle x, g_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{A}{cd}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) = \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} = \frac{1}{cd} \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle| = \frac{A}{cd}.$$

Значит, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-} = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{+} = \frac{A}{cd}$. □

Следующее следствие, непосредственно вытекающее из утверждения выше описывает класс жестких фреймов с равномерной избыточностью.

Следствие 2.1. *Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ – A -жесткий фрейм с c -нормой, а $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – A -жесткий фрейм с d -нормой, такие что $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – A -жесткий бифрейм в $\mathcal{H}$, тогда, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ = \frac{A}{cd}$.*

Дуальные фреймы с единичной нормой с верхней избыточностью не более 1, образуют бифрейм с равномерной избыточностью 1.

Утверждение 2.3. *Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – дуальные фреймы с единичной нормой в $\mathcal{H}$, и $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^+ \leq 1$, тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ = 1$.*

Доказательство. Для всех $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \|x\|^2 = \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle| \\ &= \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-(x) \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \leq \sqrt{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+ \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^+} \leq 1, \end{aligned}$$

следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ = 1$. $\square$

Бифрейм, образованный биортогональной последовательностью, имеет избыточность не более 1. Если биортогональные последовательности имеют также и единичную норму, тогда верхняя избыточность бифрейма больше или равна 1.

Утверждение 2.4. *Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – биортогональные последовательности в $\mathcal{H}$, тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq 1$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \geq \sup_{i \in I} \frac{1}{\|f_i\| \|g_i\|}$.*

Доказательство. Для всех $j \in I$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-\left(\frac{f_j}{\|f_j\|}\right) &= \sum_{i \in I} \frac{\left| \left\langle \frac{f_j}{\|f_j\|}, f_i \right\rangle \left\langle g_i, \frac{f_j}{\|f_j\|} \right\rangle \right|}{\|f_i\| \|g_i\|} \\ &= \left| \left\langle \frac{f_j}{\|f_j\|}, \frac{f_j}{\|f_j\|} \right\rangle \left\langle \frac{g_j}{\|g_j\|}, \frac{f_j}{\|f_j\|} \right\rangle \right| = \frac{|\langle f_j, g_j \rangle|}{\|f_j\| \|g_j\|} \leq 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-\left(\frac{f_j}{\|f_j\|}\right) \leq 1$. Также $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \geq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+\left(\frac{f_j}{\|f_j\|}\right) = \frac{|\langle f_j, g_j \rangle|}{\|f_j\| \|g_j\|} = \frac{1}{\|f_j\| \|g_j\|}$. Значит, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \geq \sup_{i \in I} \frac{1}{\|f_i\| \|g_i\|}$. $\square$

Верхняя и нижняя избыточности бифреймов аддитивны относительно объединения ортонормальных базисов.

Утверждение 2.5. *Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$ с $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ < \infty$, и $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j \in J}$ – ортонормальный базис в $\mathcal{H}$, тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}, \mathcal{G} \cup \mathcal{E})}^- = 1 + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}, \mathcal{G} \cup \mathcal{E})}^+ = 1 + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$.*

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}, \mathcal{G} \cup \mathcal{E})}(x) = \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} + \sum_{j \in J} \frac{|\langle x, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle|}{\|e_j\| \|e_j\|} = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) + 1,$$

следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}, \mathcal{G} \cup \mathcal{E})}^- = 1 + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}, \mathcal{G} \cup \mathcal{E})}^+ = 1 + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$. $\square$

Верхняя и нижняя избыточности бифреймов, соответственно, субаддитивны и супераддитивны относительно объединения фреймов. Они также аддитивны, если избыточность равномерна.

Утверждение 2.6. Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ и $(\mathcal{F}', \mathcal{G}') = (\{f'_j\}_{j \in J}, \{g'_j\}_{j \in J})$ – бифреймы в $\mathcal{H}$ с $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ < \infty$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+ < \infty$, тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^- \geq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^+ \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+$. В частности, если $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ и $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ имеют равномерную избыточность, тогда $(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')$ также имеет равномерную избыточность $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^+ = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+$.

Доказательство. Для любых $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^-(x) &= \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} + \sum_{j \in J} \frac{|\langle x, f'_j \rangle \langle g'_j, x \rangle|}{\|f'_j\| \|g'_j\|} \\ &= \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-(x) + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-(x) \end{aligned}$$

следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-(x) + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-(x) = \mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^-(x) = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-(x) + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-(x) \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+$, откуда следует, что $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^- \geq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^+ \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+$.

Кроме того, если $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ и $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ имеют равномерную избыточность, тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^+ \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+ = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^-$. Значит $(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')$ имеет равномерную избыточность $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^+ = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+$. $\square$

Избыточность бифрейма инвариантна относительно сдвига векторов бифрейма.

Утверждение 2.7. Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$, а c_i, d_i – числа, тогда $\mathcal{R}_{(\{c_i f_i\}_{i \in I}, \{d_i g_i\}_{i \in I})}^- = \mathcal{R}_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}^-$ и $\mathcal{R}_{(\{c_i f_i\}_{i \in I}, \{d_i g_i\}_{i \in I})}^+ = \mathcal{R}_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}^+$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $c_i, d_i \neq 0$, для всех $i \in I$. Для любого $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\{c_i f_i\}_{i \in I}, \{d_i g_i\}_{i \in I})}^-(x) &= \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, c_i f_i \rangle \langle d_i g_i, x \rangle|}{\|c_i f_i\| \|d_i g_i\|} = \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} \\ &= \mathcal{R}_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}^-(x) \end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathcal{R}^-_{(\{c_i f_i\}_{i \in I}, \{d_i g_i\}_{i \in I})} = \mathcal{R}^-_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}, \quad \mathcal{R}^+_{(\{c_i f_i\}_{i \in I}, \{d_i g_i\}_{i \in I})} = \mathcal{R}^+_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}.$$

Верхняя и нижняя избыточности бифреймов с конечной верхней избыточностью инвариантны относительно перестановки векторов бифрейма, т.е., если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$ с $\mathcal{R}^+_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} < \infty$ и σ – перестановка в I , тогда

$$\mathcal{R}^-_{(\{f_{\sigma(i)}\}_{i \in I}, \{g_{\sigma(i)}\}_{i \in I})} = \mathcal{R}^-_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}, \quad \mathcal{R}^+_{(\{f_{\sigma(i)}\}_{i \in I}, \{g_{\sigma(i)}\}_{i \in I})} = \mathcal{R}^+_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}.$$

Избыточность бифреймов связана с избыточностью бифреймов, индуцированной действием обратимого оператора на векторы бифрейма. В частности, избыточность бифреймов инвариантна относительно применения унитарного оператора. Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. *Если оператор $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ обратим, тогда $\mathbb{S} = \left\{ \frac{\Lambda x}{\|\Lambda x\|}; \quad \|x\| = 1 \right\}$.*

Доказательство. Так как $\left\| \frac{\Lambda x}{\|\Lambda x\|} \right\| = 1$, для любого $x \in \mathbb{S}$, имеем, что

$$\left\{ \frac{\Lambda x}{\|\Lambda x\|}; \quad \|x\| = 1 \right\} \subseteq \mathbb{S}.$$

С другой стороны, если $x \in \mathbb{S}$, тогда $x = \frac{x}{\|x\|} = \frac{\Lambda \Lambda^{-1} x}{\|\Lambda \Lambda^{-1} x\|} = \frac{\Lambda \left(\frac{\Lambda^{-1} x}{\|\Lambda^{-1} x\|} \right)}{\left\| \Lambda \left(\frac{\Lambda^{-1} x}{\|\Lambda^{-1} x\|} \right) \right\|} = \frac{\Lambda y}{\|\Lambda y\|}$, где $y := \frac{\Lambda^{-1} x}{\|\Lambda^{-1} x\|} \in \mathbb{S}$, и следовательно $\mathbb{S} \subseteq \left\{ \frac{\Lambda x}{\|\Lambda x\|}; \quad \|x\| = 1 \right\}$. $\square$

Утверждение 2.8. *Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$ и $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – обратим, тогда $(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$ и*

$$\|V^{-1}\|^{-2} \|V\|^{-2} \mathcal{R}^-_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \leq \mathcal{R}^-_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})} \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}^-_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})},$$

$$\|V^{-1}\|^{-2} \|V\|^{-2} \mathcal{R}^+_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \leq \mathcal{R}^+_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})} \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}^+_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}.$$

Доказательство. Так как $\|x\| = \left\| (V^*)^{-1} V^* x \right\| \leq \|V^{-1}\| \|V^* x\|$, то для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$A \|V^{-1}\|^{-2} \|x\|^2 \leq A \|V^* x\|^2 \leq \sum_{i \in I} \langle x, V f_i \rangle \langle V g_i, x \rangle \leq B \|V^* x\|^2 \leq B \|V\|^2 \|x\|^2,$$

где A, B границы бифрейма $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ и следовательно, $(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$.

Далее, так как $\|x\| = \|V^{-1}Vx\| \leq \|V^{-1}\| \|Vx\|$, то для всех $x \in \mathcal{H}$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}(x) &= \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, Vf_i \rangle \langle Vg_i, x \rangle|}{\|Vf_i\| \|Vg_i\|} \leq \|V^{-1}\|^2 \sum_{i \in I} \frac{|\langle V^*x, f_i \rangle \langle g_i, V^*x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} \\ &= \|V^{-1}\|^2 \|V^*x\|^2 \sum_{i \in I} \frac{\left| \left\langle \frac{V^*x}{\|V^*x\|}, f_i \right\rangle \left\langle g_i, \frac{V^*x}{\|V^*x\|} \right\rangle \right|}{\|f_i\| \|g_i\|} = \\ &= \|V^{-1}\|^2 \|V^*x\|^2 \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \left(\frac{V^*x}{\|V^*x\|} \right) \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \left(\frac{V^*x}{\|V^*x\|} \right) \end{aligned}$$

при $x \in \mathbb{S}$. Применив лемму 2.1, находим $\mathbb{S} = \left\{ \frac{V^*x}{\|V^*x\|}; \|x\| = 1 \right\}$, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^- &= \inf_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}(x) \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \inf_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \left(\frac{V^*x}{\|V^*x\|} \right) = \\ &= \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- &= \mathcal{R}_{(V^{-1}V\mathcal{F}, V^{-1}V\mathcal{G})}^- \leq \left\| (V^{-1})^{-1} \right\|^2 \|V^{-1}\|^2 \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^- = \\ &= \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^-. \end{aligned}$$

значит $\|V^{-1}\|^{-2} \|V\|^{-2} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^-$. Итак,

$$\|V^{-1}\|^{-2} \|V\|^{-2} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^- \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-.$$

Аналогично,

$$\|V^{-1}\|^{-2} \|V\|^{-2} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \leq \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^+ \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+. \quad \square$$

Так как унитарные операторы имеют единичную норму, из утверждения непосредственно вытекает

Следствие 2.2. Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$ и оператор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ унитарен, тогда $\mathcal{R}_{(U\mathcal{F}, U\mathcal{G})}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-$ и $\mathcal{R}_{(U\mathcal{F}, U\mathcal{G})}^+ = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$.

Для любого $x \in \mathbb{R}$ наибольшее целое число не превосходящее x обозначим через $\lfloor x \rfloor$.

Теорема 2.1. Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – фреймы в конечномерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ такие, что $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$. Если $\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \right)^2 \geq \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^+$, тогда $\mathcal{F}$ можно разбить на $\lfloor \frac{(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^+} \rfloor$ множеств, а если $\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \right)^2 \geq \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+$, то $\mathcal{G}$ можно разбить на $\lfloor \frac{(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+} \rfloor$ множеств..

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}(x) &= \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} \\ &\leq \left(\sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle|^2}{\|f_i\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in I} \frac{|\langle x, g_i \rangle|^2}{\|g_i\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}} \left(\sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle|^2}{\|f_i\|^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}} \leq \sum_{i \in I} \left| \left\langle x, \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\rangle \right|^2,$$

откуда следует, что $\left\{ \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\}_{i \in I}$ – нормированный фрейм в $\mathcal{H}$ с нижней границей $\frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}}$. Если $\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2 \geq \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}$, то применив [14, Предложение 3.5], $\left\{ \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\}_{i \in I}$ можно разбить на $\lfloor \frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}} \rfloor$ множества и значит $\mathcal{F}$ можно разбить на $\lfloor \frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}} \rfloor$ множества.

Аналогично можем доказать, что если $\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2 \geq \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{+}$, то $\mathcal{G}$ можно разбить на $\lfloor \frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{+}} \rfloor$ множества. $\square$

Замечание 2.1. Последняя теорема не верна в бесконечном случае. В качестве контрпримера рассмотрим нормированный 2-жесткий фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ в ℓ_2 который нельзя разбить на два множества [11], но $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{F})}^{-} = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{F})}^{+} = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{-} = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{+} = 2$ и поэтому, $\lfloor \frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{F})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{+}} \rfloor = \lfloor \frac{\left(\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{+}} \rfloor = 2$.

Abstract. This paper is concerned with the redundancy of biframes in separable Hilbert spaces and it presents some properties of the the upper and lower redundancy of biframes.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, “A class of nonharmonic Fourier series”, Trans. Amer. Math. Soc., **72**, 341 – 366 (1952).
- [2] P. G. Casazza and M. T. Leonhard, “Existence and construction of finite tight frames”, J. Concr. Appl. Math., **4**, 277 – 289 (2006).
- [3] P. G. Casazza and M. Leon, “Existence and construction of finite frames with a given frame operator”, Int. J. Pure Appl. Math., **63**, 149 – 158 (2010).
- [4] J. J. Benedetto, Frame Decomposition, Sampling, and Uncertainty Principle Inequalities in Wavelets Mathematics and Applications, Wiley (1999).
- [5] J. Benedetto and M. Fickus, “Finite normalized tight frames”, Advances in Computational Math., **18**, 357 – 385 (2003).
- [6] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases. Birkhäuser: Boston, Basel, Berlin (2002).

- [7] C. Heil, D. Walnut, “Continuous and discrete wavelet transform”, SIAM Rev., **31**, 628 – 666 (1969).
- [8] W. Sun, “G-frames and G-Riesz bases”, J. Math. Anal. Appl., **322**, 437 — 452 (2006).
- [9] R. Young, An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York (1992).
- [10] B. G. Bodmann, P. G. Casazza, and G. Kutyniok, “A Quantitative Notion of Redundancy for Finite Frames”, Appl. Comput. Harmon. Anal., **30**, 348 – 362 (2011).
- [11] J. Cahill, P. G. Casazza, and A. Heinecke, “A quantitative notion of redundancy for infinite frames”, arXiv:1006.2678v1 [math.FA].
- [12] M. Firouzi Parizi1, A. Alijani and M. A. Dehghan, “Biframes and some of their properties”, J. Inequal. Appl. (<https://doi.org/10.1186/s13660-022-02844-7>).
- [13] W. Rudin, “Principles of mathematical analysis”, International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill (1976).
- [14] B. G. Bodmann, P. G. Casazza, V. I. Paulsen, D. Speegle, “Spanning and independence properties of frame partitions”, Proc. Am. Math. Soc., **140**, 2193 — 2207 (2012).

Поступила 30 мая 2024

После доработки 30 мая 2024

Принята к публикации 12 августа 2024

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал "Известия НАН Армении, Математика" публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата A4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
 - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
 - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
 - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы, место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала "Известия НАН Армении, Математика", пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения.
E-mail: sart@ysu.am, URL: <http://www.maik.ru>
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале "Journal of Contemporary Mathematical Analysis". URL: <http://www.springer.com>.

Заказ N1367. Тираж 150. Подписано к печати 04.03.25.

Печ. л. 4.75. Бумага офсетная. Цена договорная.

Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 60, номер 3, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, Об универсальных парах относительно системы Уолша	3
А. Кечеджян, В. К. Оганян, В. Бардахчян, Универсальные портфели: Байесовское приближение	13
В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, Критерии строго и почти гипоэллиптичности для одного класса дифференциальных операторов	24
Р. Пей, К. Ма, Существование решений основного состояния для дробных p -лапласовских уравнений в $\mathbb{R}^N$, имеющих экспоненциальный рост	35
М. А. Хасанхани Фард, Избыточность бифреймов	55 – 66

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 60, No. 3, 2025

CONTENTS

M. G. GRIGORYAN, A. A. SARGSYAN, On a universal pairs about Walsh system	3
H. KECHEJIAN, V. OHANYAN, V. BARDAKHCHYAN, Universal portfolios: Bayesian approximation	13
V. N. MARGARYAN, H. G. GHAZARYAN, Strictly and almost hypoellipticity criteria for differential operators	24
R. PEI, C. MA, Existence of ground state solutions for fractional p -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ involving exponential growth	35
M. A. HASANKHANI FARD, Redundancy of biframe	55 – 66