ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТОМ 60 № 5 2025

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Վ. Ս. Աթաբեկյան
Կ. Լ. Ավետիսյան
Գ. Գ. Գևորգյան
Մ. Ս. Գինովյան
Ա. Ս. Դալալյան
Ն. Բ. Ենգիբարյան
Խ. Ա. Խաչատրյան
Վ. Կ. Օհանյան (գլխ. խմբագրի տեղակալ)
Գ. Ա. Կարագուլյան
Յու. Ա. Կուտոյանց
Ռ. Վ. Համբարձումյան
Ա. Հ. Հովհաննիսյան
Հ. Շահդուլյան
Ա. Շիրիկյան
Բ. Ս. Նահապետյան
Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Ահարոնյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор А. А. Саакян

К. Л. Аветисян
Р. В. Амбарцумян
В. С. Атабекян
Г. Г. Геворкян
М. С. Гиновян
А. С. Далалян
Н. Б. Енгибарян
В. К. Оганян (зам. главного редактора)
Б. С. Нахапетян
Г. А. Карагулян
Ю. А. Кутоянц
А. О. Оганнисян
Б. М. Погосян
Х. А. Хачатрян
А. Шахгулян
А. Ширикян

Ответственный секретарь Н. Г. Агаронян

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 5, 2025, стр. 3 – 19.

ВЗВЕШЕННЫЕ ГРАНД ПРОСТРАНСТВА ГЕРЦА-МОРРЕЯ-ЛИЗОРКИНА-ТРИБЕЛЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

С. ВАНГ, П. ГУО, ДЖ. СЮЙ

Хайнаньский педагогический университет, Хайкоу, Китай[1]
Университет электронных технологий Гуйлинь, Гуйлинь, Китай
Центр прикладной математики Гуанси (GUET), Гуйлинь, Китай
Ключевая лаборатория по анализу данных и вычислениям колледжей и университетов Гуанси, Гуйлинь, Китай
E-mails: $wang\_shengrong$@126.com; $guopf$999@163.com; $jingshixu$@126.com

АННОТАЦИЯ. Пусть векторно-значный сублинейный оператор удовлетворяет условию размера и является ограниченным в взвешенных пространствах Лебега с переменным показателем. Тогда мы получаем его ограниченность в взвешенных гранд пространствах Герца-Моррея с переменными показателями. Далее мы вводим взвешенные гранд пространства Герца-Моррея-Трибеля-Лизоркина с переменными показателями и даем их эквивалентные квазинормы через максимальные функции.

MSC2020 numbers: 42B25; 46E30; 46E35.

Ключевые слова: сублинейный оператор; вес Макенхопта; переменный показатель; гранд пространство Герца-Моррея; пространство Трибеля-Лизоркина.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория пространств функций с переменным показателем быстро развивалась после того, как Ковачик и Ракосник [1] сформулировали основные свойства пространств Лебега с переменным показателем. В частности, в [2] – [6] была изучена ограниченность максимального оператора Харди-Литтлвуда в пространствах Лебега с переменным показателем. Круз-Урибе, Фиоренца и Нойгебауэр [7] расширили классический вес Мукенхупта A_p в [8] до переменного показателя и доказали эквивалентность между условием веса $A_{p(\cdot)}$ и ограниченностью максимального оператора Харди-Литтлвуда в соответствующем взвешенном пространстве Лебега с переменным показателем.

Ограниченность некоторых сублинейных операторов, в том числе максимального оператора Харди-Литтлвуда, в последнее время рассматривалась многими авторами. Более того, ограниченность некоторых сублинейных операторов в взвешенных переменных пространствах Герца-Моррея была получена

[1]Работа поддержана Национальным фондом естественных наук Китая (гранты № 12161022 и 12061030) и Научно-техническим проектом Гуанси (Guike AD23023002).

Вангом и Шу в [9]. Затем ограниченность векторно-значных сублинейных операторов в взвешенных пространствах Герца-Моррея с переменными показателями была доказана в [10]. Далее были введены гранд пространства Герца с переменной, и ограниченность сублинейных операторов в них была получена Нафисом, Рафейро и Зайгумом в [11]. Наконец, были введены взвешенные гранд пространства Герца-Моррея, и ограниченность сублинейных операторов и их многолинейных коммутаторов в них была получена Чжаном, Хэ и Чжаном в [12].

Смешав пространства Герца, пространства Бесова и пространства Трибеля-Лизоркина, Ян и третий автор статьи [13, 14] ввели пространства Бесова типа Герца и пространства Трибеля-Лизоркина. Затем Ши и третий автор статьи [15] расширили их до переменных показателей и получили их эквивалентные квазинормы.

Вдохновленные упомянутыми работами, в данной статье мы рассматриваем ограниченность векторно-значных сублинейных операторов в взвешенных гранд пространствах Герца-Моррея с переменными показателями и вводим взвешенные гранд пространства Герца-Моррея-Трибеля-Лизоркина с переменными показателями. План статьи следующий. В разделе 2 мы собираем некоторые обозначения. В разделе 3 мы даем ограниченность векторно-значных сублинейных операторов в взвешенных гранд пространствах Герца-Моррея с переменными показателями. В разделе 4, мы представляем взвешенные гранд пространства Герца-Моррея-Трибеля-Лизоркина с переменным показателем и получаем их эквивалентные квазинормы с помощью максимальных операторов Питре.

Теперь дадим некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел и $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел. Пусть $\mathbb{R}^n$ n-мерное евклидово пространство, где $n \in \mathbb{N}$. В дальнейшем C обозначает положительные константы, но может меняться от строки к строке. Для любых величин A и B, если существует константа $C > 0$ такая, что $A \leq CB$, запишем $A \lesssim B$. Если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$, запишем $A \sim B$. Для любого $k \in \mathbb{Z}$, мы определяем $B_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$, $D_k := B_k \backslash B_{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} < |x| \leq 2^k\}$, $\chi_k := \chi_{D_k}$, $\widetilde{\chi}_m = \chi_m$, $m \geq 1$, $\widetilde{\chi}_0 = \chi_{B_0}$. Для измеримой функции $q(\cdot)$ в $\mathbb{R}^n$, принимающей значения в $(0, \infty)$, обозначим $q^- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$, $q^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} q(x)$. Множество $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех $q(\cdot)$, удовлетворяющих $q^- > 1$ и $q^+ < \infty$; $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех $q(\cdot)$, удовлетворяющих $q^- > 0$ и $q^+ < \infty$.

2. Обозначения и предварительные замечания

В этом разделе мы сначала вспомним некоторые определения и обозначения. Пусть $q(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда пространство Лебега с переменным показателем $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех измеримых функций f , таких что

$$\|f\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{q(x)} \mathrm{d}x \leq 1\right\} < \infty.$$

Пусть $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ и w — вес, который является неотрицательной измеримой функцией в $\mathbb{R}^n$. Тогда взвешенное пространство Лебега с переменным показателем $L^{q(\cdot)}(w)$ является множеством всех комплекснозначных измеримых функций f таких, что $fw \in L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Пространство $L^{q(\cdot)}(w)$ является банаховым пространством, обладающим нормой

$$\|f\|_{L^{q(\cdot)}(w)} := \|fw\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $q(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. Множество $L^{q(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(w)$ состоит из всех измеримых функций f ,таких что $f\chi_K \in L^{q(\cdot)}(w)(\mathbb{R}^n)$ для всех компактных подмножеств $K \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ множество всех измеримых функций f , таких что $\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}^n} |f(y)| < \infty$.

Пусть $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда стандартная максимальная функция Харди-Литтлвуда f определяется следующим образом:

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{B\ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\mathrm{d}y, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

где супремум берется по всем шарам, содержащим x в $\mathbb{R}^n$. Мы также определяем $\mathcal{M}_t(f) := (\mathcal{M}(|f|^t))^{1/t}$, $t \in (0,\infty)$.

Определение 2.1. Пусть $\alpha(\cdot)$ — вещественная измеримая функция в $\mathbb{R}^n$.

(i) Функция $\alpha(\cdot)$ является локально лог-Гёльдерово непрерывная, если существует константа $C_{\log}(\alpha)$, такая что

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq \frac{C_{\log}(\alpha)}{\log(e + 1/|x-y|)}, \ x, y \in \mathbb{R}^n, \ |x - y| < \frac{1}{2}.$$

Обозначим через $C^{\log}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ множество всех локально лог-Гёльдерово непрерывных функций.

(ii) Функция $\alpha(\cdot)$ является лог-гёльдеровской непрерывной в начале, если существует константа C_0 такая, что

$$|\alpha(x) - \alpha(0)| \leq \frac{C_0}{\log(e + 1/|x|)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через $C^{\log}_0(\mathbb{R}^n)$ множество всех локально лог-Гёльдерово непрерывных функций в начале.

(iii) Функция $\alpha(\cdot)$ является лог-гёльдеровской непрерывной в бесконечности, если существует $\alpha_\infty \in \mathbb{R}$ и константа C_∞ такие, что

$$|\alpha(x) - \alpha_\infty| \leq \frac{C_\infty}{\log(e + |x|)},\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через $C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$ множество всех локально лог-Гёльдерово непрерывных функций в бесконечности.

(iv) Функция $\alpha(\cdot)$ является глобально лог-гёльдеровской непрерывной, если $\alpha(\cdot)$ являются как локально лог-Гёльдерово непрерывными, так и лог-Гёльдерово непрерывными в бесконечности. Обозначим через $C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ множество всех локально лог-Гёльдерово непрерывных функций.

Определение 2.2. Пусть $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, а неотрицательная измеримая функция w говорят, что она принадлежит $A_{q(\cdot)}$, если

$$\|w\|_{A_{q(\cdot)}} := \sup_{\text{all ball } B\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|} \|w\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|w^{-1}\chi_B\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Определение 2.3. Пусть w - веса в $\mathbb{R}^n$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\theta > 0$. Однородное взвешенное пространство Герца-Моррея $M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)$ определяется следующим образом:

$$M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w) := \Big\{ f \in L_{\text{loc}}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, w) : \|f\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)} < \infty \Big\},$$

где

$$\|f\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)} := \sup_{\delta>0} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} \big\|2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Лемма 2.1 (см. [12, Лемма 4.1])**.** *Пусть w - вес в $\mathbb{R}^n$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\theta > 0$. Если $\alpha(\cdot) \in C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, тогда для всех $f \in L_{\text{loc}}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}, w)$,*

$$\begin{aligned}
\|f\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)} \sim \max\Bigg\{ &\sup_{\delta>0} \sup_{k_0\leq 0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)} \big\|f\chi_k\big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}, \\
&\sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \Bigg(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)} \big\|f\chi_k\big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \\
&\quad + \delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \big\|f\chi_k\big\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \Bigg)^{\frac{1}{p(1+\delta)}} \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Следующая лемма была доказана Ноем и Идзуки в [16].

Лемма 2.2. *Если $q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ и $w \in A_{q(\cdot)}$, тогда существуют константы δ_1, $\delta_2 \in (0,1)$ и $C > 0$, такие, что для всех шаров B из $\mathbb{R}^n$ и для* *всех измеримых подмножеств* $S \subset B$,

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{q(\cdot)}(w)}}{\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(w)}} \leq C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_1} \text{ и } \frac{\|\chi_S\|_{L^{q'(\cdot)}(w^{-1})}}{\|\chi_B\|_{L^{q'(\cdot)}(w^{-1})}} \leq C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_2}.$$

3. Ограниченность векторно-значного сублинейного оператора в взвешенных пространствах Герца-Моррея

В этом разделе мы приводим ограниченность векторно-значных сублинейных операторов в взвешенных пространствах Герца-Моррея с переменными показателями.

Теорема 3.1. *Пусть* $r, p \in (1,\infty)$, $q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\theta > 0$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0),\ \alpha_\infty < n\delta_2$, *где* $\delta_1,\ \delta_2 \in (0,1)$ *— константы Леммы 2.2 для* $q(\cdot)$. *Предположим, что* T *является сублинейным оператором, удовлетворяющим условию размера,*

$$|Tf(x)| \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-n}|f(y)|\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

для всех $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *и п.в.* $x \notin \operatorname{supp} f$. *Если сублинейный оператор* T *удовлетворяет векторно-значному неравенству в* $L^{q(\cdot)}(w)$,

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|Tf_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \leq C\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \tag{3.2}$$

для всех последовательностей локально интегрируемых функций $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ *в* $\mathbb{R}^n$, *тогда*

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|Tf_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)} \leq C\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}. \tag{3.3}$$

где константа $C > 0$ *не зависит от* $\{f_j\}_{j=1}^\infty$.

Лемма 3.1 (см. [17, Следствие 3.2])**.** *Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *и* w *- вес. Если максимальный оператор* $\mathcal{M}$ *ограничен в* $L^{q(\cdot)}(w)$ *и* $L^{q'(\cdot)}(w^{-1})$ *и* $r \in (1,\infty)$, *то существует положительная константа* C *такая, что*

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\mathcal{M}f_j)^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \leq C\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}.$$

Из Теоремы 3.1 и Леммы 3.1 получаем следующее следствие.

Следствие 3.1. *Пусть* $r, p \in (1,\infty)$, $q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\theta > 0$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0),\ \alpha_\infty < n\delta_2$, *где* $\delta_1,\ \delta_2 \in (0,1)$ *константы Леммы 2.2 для* $q(\cdot)$. *Тогда*

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\mathcal{M}f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)} \leq C\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)},$$

где константа $C > 0$ *не зависит от локально интегрируемых функций* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство Теоремы 3.1. Поскольку ограниченные функции с компактной поддержкой являются плотными в $M\dot{K}_{q_2(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)$, мы рассматриваем только f как ограниченную функцию с компактной поддержкой и записываем

$$f_j(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_j^l \chi_l =: \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_j^l, \quad j \in \mathbb{N}.$$

По Лемме 2.1 имеем

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)} \sim \max \Bigg\{ \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \le 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \times \\
&\left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} Tf_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}, \\
&\quad \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 > 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} Tf_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right. \\
&\qquad \left. + \delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} Tf_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}} \Bigg\} \\
&\quad =: \max\{E, F + G\}.
\end{aligned}$$

Поскольку оценка F аналогична оценке E, то достаточно получить, что E и G ограничены в взвешенных гранд пространствах Герца-Моррея с переменными показателями. Легко видеть, что

$$E \lesssim \sum_{i=i}^{3} E_i \text{ и } G \lesssim \sum_{i=i}^{3} G_i,$$

где

$$E_1 := \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \le 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{k-2} Tf_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}},$$

$$E_2 := \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \le 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k-1}^{k+1} Tf_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}},$$

$$E_3 := \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \le 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k+2}^{\infty} Tf_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}},$$

$$G_1 := \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 > 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=-\infty}^{k-2} Tf_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

$$G_2 := \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 > 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k-1}^{k+1} Tf_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

$$G_3 := \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty \left| \sum_{l=k+2}^\infty T f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Если $l \le k-2$, то мы делаем вывод, что $|x-y| \ge |x|-|y| > 2^{k-1}-2^l \ge 2^{k-2}$, $x \in D_k$, $y \in D_l$. Тогда из (3.1) для $\forall x \in D_k$, имеем

$$|Tf_j^l(x)| \lesssim 2^{-kn} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j^l(y)| \mathrm{d}y.$$

Таким образом, согласно неравенству Минковского, неравенству Гельдера, Определению 2.2 и Лемме 2.2, получаем

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\sum_{j=1}^\infty \left| \sum_{l=-\infty}^{k-2} T f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \\
&\quad \lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j^l(y)| \mathrm{d}y \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \\
&\quad \lesssim \left\| \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^\infty |f_j^l(y)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \mathrm{d}y \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \\
&\quad \lesssim \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} \|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty |f_j^l|^r \right)^{\frac{1}{r}} w\chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_l w^{-1}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad \lesssim \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{-kn} |B_k| \|\chi_{B_k}\|^{-1}_{L^{q'(\cdot)}(w^{-1})} \|\chi_{B_l}\|_{L^{q'(\cdot)}(w^{-1})} \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \\
&\quad \lesssim \sum_{l=-\infty}^{k-2} 2^{(l-k)n\delta_2} \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Если $l \ge k+2$, то мы делаем вывод, что $|x-y| \ge |y|-|x| > 2^{l-2}$, $x \in D_k$, $y \in D_l$. Для $\forall x \in D_k$, поскольку сублинейный оператор T удовлетворяет (3.1), то имеем

$$|Tf_j^l(x)| \lesssim 2^{-ln} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j^l(y)| \mathrm{d}y.$$

Таким образом, согласно неравенству Минковского, неравенству Гельдера, Определению 2.2 и Лемме 2.2, получаем

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=k+2}^{\infty}Tf_j^l\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{l=k+2}^{\infty}2^{-ln}\int_{\mathbb{R}^n}|f_j^l(y)|\mathrm{d}y\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim\left\|\sum_{l=k+2}^{\infty}2^{-ln}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j^l(y)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}y\chi_k\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\\
&\quad\lesssim\sum_{l=k+2}^{\infty}2^{-ln}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}w\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_l w^{-1}\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad\lesssim\sum_{l=k+2}^{\infty}2^{-ln}|B_l|\|\chi_{B_k}\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\|\chi_{B_l}\|^{-1}_{L^{q(\cdot)}(w)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}
\end{aligned}$$

$$\lesssim\sum_{l=k+2}^{\infty}2^{(k-l)n\delta_1}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}. \tag{3.5}$$

Оценим E_1. Поскольку $\varepsilon_1=n\delta_2-\alpha(0)>0$ и (3.4) и неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned}
&\left(\delta^\theta\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha(0)p(1+\delta)}\left(\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{(l-k)n\delta_2}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}\\
&\lesssim\left(\delta^\theta\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{\alpha(0)l}2^{(l-k)\varepsilon_1}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}\\
&\lesssim\left(\delta^\theta\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{\alpha(0)lp(1+\delta)}2^{(l-k)\varepsilon_1p(1+\delta)/2}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)\right.\\
&\quad\left.\times\left(\sum_{l=-\infty}^{k-2}2^{(l-k)\varepsilon_1(p(1+\delta))'/2}\right)^{\frac{p(1+\delta)}{(p(1+\delta))'}}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}\\
&\lesssim\left(\delta^\theta\sum_{l=-\infty}^{k_0}2^{\alpha(0)lp(1+\delta)}\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\chi_l\right\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.
\end{aligned}$$

Следовательно

$$E_1\lesssim\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}.$$

Оценим E_2. Для $k-1 \le l \le k+1$, $\forall x \in D_k$, поскольку T удовлетворяет (3.2), то по неравенству Минковского получаем

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{l=k-1}^{k+1} T f_j^l \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \lesssim \left\| \sum_{l=k-1}^{k+1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |T f_j^l|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \\
&\lesssim \sum_{l=k-1}^{k+1} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |T f_j^l|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_k \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \lesssim \sum_{l=k-1}^{k+1} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Таким образом, из (3.6) получаем

$$\begin{aligned}
E_2 &\lesssim \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \le 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)} \sum_{l=k-1}^{k+1} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}} \\
&\lesssim \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \le 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{l=-\infty}^{k_0+1} 2^{l\alpha(0)p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}} \\
&\lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)}.
\end{aligned}$$

Оценим E_3. Из (3.5) получаем

$$E_3 \lesssim \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \le 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} E_{3,1} + \sup_{\delta>0} \sup_{k_0 \le 0, k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} E_{3,2},$$

где

$$E_{3,1} := \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)} \left(\sum_{l=k+2}^{-1} 2^{(k-l)n\delta_1} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \right)^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

и

$$E_{3,2} := \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha(0)p(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{(k-l)n\delta_1} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \right)^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Оценим $E_{3,1}$. Поскольку $\varepsilon_2 = n\delta_1 + \alpha(0) > 0$ и из неравенства Гельдера, получаем

$$\begin{aligned}
E_{3,1} &\lesssim \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\sum_{l=k+2}^{-1} 2^{\alpha(0)l} 2^{(k-l)\varepsilon_2} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} \right)^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}} \\
&\lesssim \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\sum_{l=k+2}^{-1} 2^{\alpha(0)lp(1+\delta)} 2^{(k-l)\varepsilon_2 p(1+\delta)/2} \right.\right. \\
&\quad \left.\left. \times \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right) \left(\sum_{l=k+2}^{-1} 2^{(k-l)\varepsilon_2 (p(1+\delta))'/2} \right)^{\frac{p(1+\delta)}{(p(1+\delta))'}} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}} \\
&\lesssim \left(\delta^\theta \sum_{l=-\infty}^{k_0} 2^{\alpha(0)lp(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.
\end{aligned}$$

Оценим $E_{3,2}$. Поскольку $\varepsilon_3 = n\delta_1 + \alpha_\infty > 0$ и из неравенства Гельдера, получаем

$$E_{3,2} \lesssim \left(\delta^\theta \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k(\alpha(0)+n\delta_1)p(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-ln\delta_1} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty} 2^{-l\varepsilon_3} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\alpha_\infty p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\varepsilon_3 (p(1+\delta))'}\right)^{\frac{p(1+\delta)}{(p(1+\delta))'}}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Следовательно, имеем

$$E_3 \lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(w)}.$$

Оценим G_1. Из (3.4), получаем

$$G_1 \lesssim \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0, k_0\in\mathbb{Z}} G_{1,1} + \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0, k_0\in\mathbb{Z}} G_{1,2},$$

где

$$G_{1,1} := 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{(l-k)n\delta_2} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

и

$$G_{1,2} := 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \left(\sum_{l=0}^{k-2} 2^{(l-k)n\delta_2} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

Оценим $G_{1,1}$. Поскольку $\varepsilon_4 = n\delta_2 - \alpha(0) > 0$, $\alpha_\infty - n\delta_2 < 0$ и из неравенства Гельдера, получаем

$$G_{1,1} \lesssim \left(\delta^\theta \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k(\alpha_\infty - n\delta_2)p(1+\delta)} \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{ln\delta_2} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{ln\delta_2} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)} 2^{l\varepsilon_4}\right)^{p(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right) \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\varepsilon_4 (p(1+\delta))'}\right)^{\frac{p(1+\delta)}{(p(1+\delta))'}}\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}$$

$$\lesssim 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^\theta \left(\sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\alpha(0)p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|_{L^{q(\cdot)}(w)}^{p(1+\delta)}\right)\right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}}.$$

Оценим $G_{1,2}$. Используя тот же аргумент, что и для E_1 а также тот факт, что $\varepsilon_5 = n\delta_2 - \alpha_\infty > 0$, мы получаем желаемый результат. Таким образом, мы получаем

$$G_1 \lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}.$$

Оценим G_2. Из (3.6) получаем

$$\begin{aligned} G_2 &\lesssim \sup_{\delta>0} \sup_{k_0>0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^{\theta} \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha_\infty p(1+\delta)} \sum_{l=k-1}^{k+1} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}} \\ &\lesssim \sup_{\delta>0} \sup_{k_0\le 0, k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\delta^{\theta} \sum_{l=0}^{k_0+1} 2^{l\alpha_\infty p(1+\delta)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_l \right\|^{p(1+\delta)}_{L^{q(\cdot)}(w)} \right)^{\frac{1}{p(1+\delta)}} \\ &\lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}. \end{aligned}$$

Оценим G_3. Используя тот же аргумент, что и для $E_{3,1}$, а также тот факт, что $\varepsilon_6 = n\delta_1 + \alpha_\infty > 0$, мы получаем желаемый результат.

Объединяя оценки E, F и G, получаем (3.3). □

4. Характеристики пространств Герца-Моррея-Лизоркина-Трибеля

В этом разделе мы представляем взвешенные пространства Герца-Моррея-Трибеля-Лизоркина с переменным показателем и получим их эквивалентные квазинормы. Далее, для удобства, взвешенные пространства Герца-Моррея $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)$ обозначим $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}$. Для дальнейшего рассмотрения вспомним некоторые обозначения.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ пространство обобщённых функций медленного роста в $\mathbb{R}^n$. Для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, пусть $\mathcal{F}f$ или $\hat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f, определяемое следующим образом

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) \mathrm{d}x, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $f^{\vee}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ обозначает обратное преобразование Фурье от f.

Определение 4.1. Пусть ϕ_0 - функция в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяющая $\widehat{\phi}_0(x) = 1$ для $|x| \le 1$ и $\widehat{\phi}_0(x) = 0$ для $|x| \ge 2$. Положим $\widehat{\phi}(x) = \widehat{\phi}_0 - \widehat{\phi}_0(2x)$ и $\widehat{\phi}_j(x) = \widehat{\phi}(2^{-j}x)$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\{\widehat{\phi}_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ является гладким диадическим разрешением единицы и $\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\phi}_j(x) = 1 \quad$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 4.2. Пусть $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\theta > 0$, $s \in \mathbb{R}$ и $\beta \in (0,\infty)$. Более того, пусть $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ будет системой, как в Определении 4.1 и w - весом. Взвешенное пространство Герца-Моррея-Трибеля-Лизоркина с переменными показателями $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, таких что

$$\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \|\{2^{js}\phi_j * f\}_{j=0}^\infty\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}(\ell^\beta)} < \infty.$$

Определение 4.3. Пара функций (ϕ, Φ) называется допустимой, если $\phi, \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют

$$\operatorname{supp}\widehat{\phi} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \le |\xi| \le 2\} \text{ и } |\widehat{\phi}| \ge C > 0 \text{ когда } \frac{3}{5} \le |\xi| \le \frac{5}{3} \tag{4.1}$$

и

$$\operatorname{supp}\widehat{\Phi} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \le 2\} \text{ и } |\widehat{\Phi}| \ge C > 0 \text{ когда } |\xi| \le \frac{5}{3}, \tag{4.2}$$

где C — положительная константа, независимая от $\xi \in \mathbb{R}^n$. Во всей статье мы устанавливаем $\tilde{\phi}(x) := \overline{\phi(-x)}$.

Следующие две леммы взяты из [18, Леммы 2.41 и 2.45].

Лемма 4.1. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $N > 0$, $m > n$ и $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует положительная константа C , независимая от N и x, такая, что для всех $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $|\omega_N * f(x)| \le C\mathcal{M}f(x)$, где $\omega_N = N^n\omega(N\cdot)$.*

Лемма 4.2. *Пусть $r, R, N > 0$, $m > n$ и $\vartheta, \omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ с $\operatorname{supp}\mathcal{F}\omega \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \le 2\}$. Тогда существует $C = C(r, m, n) > 0$, такая, что для всех $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,*

$$|\vartheta_R * \omega_N * g(x)| \le C \max\{1, (N/R)^m\}(\eta_{N,m} * |\omega_N * g|^r(x))^{1/r}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\vartheta_R = R^n\vartheta(R\cdot)$, $\omega_N = N^n\omega(N\cdot)$ и $\eta_{N,m} = N^n(1 + N|\cdot|)^{-m}$.

В соответствии с [19], при заданной допустимой паре (ϕ, Φ) мы можем выбрать другую допустимую пару (ψ, Ψ) таким образом, что

$$\mathcal{F}\tilde{\Phi}(\xi)\mathcal{F}\Psi(\xi) + \sum_{\nu=1}^\infty \mathcal{F}\tilde{\phi}(2^{-\nu}\xi)\mathcal{F}\psi(2^{-\nu}\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3}$$

Следующая Лемма является формулой воспроизведения Кальдерона; см. [20, (12.4)] и [21, Лемма 2.3].

Лемма 4.3. *Пусть $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (4.1) и $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (4.2) так, что выполняется (4.3) . Тогда для всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,*

$$\begin{aligned} f &= \tilde{\Phi} * \Psi * f + \sum_{k=1}^\infty \tilde{\phi}_k * \psi_k * f \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \tilde{\Phi} * f(m)\Psi_m + \sum_{k=1}^\infty 2^{-kn/2} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \tilde{\phi}_k * f(2^{-k}m)\psi_{k,m} \end{aligned}$$

в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, где $\Psi_m = \Psi(\cdot - m)$ и $\psi_{k,m} = 2^{kn/2}\psi(2^k \cdot -m)$, $m \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.1. *Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,\infty)$, $\beta \in (0,\infty]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, *где* $\delta_1,\ \delta_2 \in (0,1)$ *- константы Леммы 2.2 для* $q(\cdot)$. *Умеренное распределение* f *принадлежит* $M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta} F_\beta^s(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда* $\|f\|^\star_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta} F_\beta^s(\mathbb{R}^n)} < \infty$, *где*

$$\|f\|^\star_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta} F_\beta^s(\mathbb{R}^n)} := \|\{2^{js}\phi_j * f\}_{j=0}^\infty\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta}(\ell^\beta)},$$

ϕ *и* Φ *удовлетворяют (4.1) и (4.2), соответственно, и* $\phi_j = 2^{jn}\phi(2^j\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$, *когда* $j = 0$, ϕ_0 *заменяется на* Φ. *Более того, квазинормы* $\|f\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta} F_\beta^s(\mathbb{R}^n)}$ *и* $\|f\|^\star_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta} F_\beta^s(\mathbb{R}^n)}$ *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (4.1) и $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (4.2) таким образом, что выполняется (4.3) . По Лемме 4.3 и, анализируя условия на носитель, имеем

$$\phi_k * f = \sum_{j=k-1}^{k+1} \phi_k * \tilde{\phi}_j * \psi_j * f + \begin{cases} 0 & \text{если } k \geq 3 \\ \phi_k * \tilde{\Phi} * \Psi * f, & \text{если } k \in \{1,2\} \end{cases}$$

и

$$\phi_0 * f = \phi_0 * \tilde{\phi}_1 * \psi_1 * f + \phi_0 * \tilde{\Phi} * \Psi * f.$$

Для $j \in \{k-1, k, k+1\}$, $k \geq 3$, по Леммам 4.2 и 4.1 получаем

$$|\phi_k * \tilde{\phi}_j * \psi_j * f| \lesssim \mathcal{M}_t(\tilde{\phi}_j * f), \quad t \in (0,\infty).$$

Аналогично, когда $k \in \{0,1,2\}$, имеем

$$|\phi_k * \tilde{\Phi} * \Psi * f| + |\phi_0 * \tilde{\phi}_1 * \psi_1 * f| \lesssim \mathcal{M}_t(\tilde{\Phi} * f) + \mathcal{M}_t(\tilde{\phi}_1 * f), \quad t \in (0,\infty).$$

Возьмем $t \in (0, \min\{q^-, \beta\})$, тогда согласно Следствию 3.1 получаем

$$\|f\|^\star_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta} F_\beta^s(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta} F_\beta^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Противоположное неравенство следует из тех же аргументов. Обратите внимание, что мы используем гладкое разложение единицы (Определение 4.1). На этом доказательство завершено. □

Следствие 4.1. *Пусть* $\{\varpi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ *и* $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ *— два разложения единицы. Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,\infty)$, $\beta \in (0,\infty]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, *где* $\delta_1,\ \delta_2 \in (0,1)$ *- константы в Лемме 2.2 для* $q(\cdot)$. *Тогда*

$$\|f\|^\varpi_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta} F_\beta^s(\mathbb{R}^n)} \sim \|f\|^\phi_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta} F_\beta^s(\mathbb{R}^n)} \sim \|f\|^\star_{M\dot{K}_{q(\cdot),\lambda,w}^{\alpha(\cdot),p),\theta} F_\beta^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, и $a > 0$. Для каждой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, максимальные функции Пеетра для f определяются следующим образом:

$$\phi_j^{*,a} f(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\phi_j * f(y)|}{(1 + 2^j|x-y|)^a}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. *Пусть $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ - разложения единицы. Пусть $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,\infty)$, $\beta \in (0,\infty]$, $s \in \mathbb{R}$, $t \in (0, \min\{q^-, \beta\})$, $w \in A_{q(\cdot)}$ и $-n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, где δ_1, $\delta_2 \in (0,1)$ - константы в Лемме 2.2 для $q(\cdot)$. Если $at > n$, тогда*

$$\|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\beta} |\phi_j^{*,a} f|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda}(w)}$$

эквивалентны (квази-)нормам в $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для любой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ покажем, что

$$\|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

По определению максимального оператора Пеетра (4.4) получаем, что $|\phi_j * f(x)| \lesssim \phi_j^{*,a} f(x)$ что означает, что для любой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

Остается показать, что для любой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

Возьмем $t \in (0, \min\{q^-, \beta\})$, $a > n/t$ и $k \in \mathbb{N}_0$. Согласно Лемме 4.2 получаем

$$\phi_j * f(y) \lesssim (\eta_{j,at} * |\phi_j * f|^t(y))^{1/t}, \quad j \in \mathbb{N}_0, \ y \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

Разделив обе части (4.5) на $(1+2^j|x-y|)^a$, и в правой части используем неравенство,

$$(1+2^j|x-z|)^a \leq (1+2^j|x-y|)^a (1+2^j|y-z|)^a, \quad \text{для всех } x,y,z \in \mathbb{R}^n,$$

а в левой части возьмем супремум $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
(\phi_j^{*,a} f(x))^t &\lesssim \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi_j * f(z)|^t}{(1+2^j|y-z|)^{at}} \mathrm{d}z \frac{1}{(1+2^j|x-y|)^{at}} \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi_j * f(z)|^t}{(1+2^j|x-z|)^{at}} \mathrm{d}z \sim \eta_{j,at} * |\phi_j * f|^t(x) \lesssim (\mathcal{M}_t(\phi_j * f))^t,
\end{aligned}$$

где мы используем Лемму 4.1. По Следствию 3.1 и Теореме 4.1 получаем

$$\|f\|^*_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\beta} |\phi_j * f|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}} \lesssim \|f\|^\star_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

Теорема доказана. □

Лемма 4.4. *Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,\infty)$, $\beta \in (0,\infty]$ *и* $w \in A_{q(\cdot)}$. *Для любой последовательности* $\{g_j\}_{j=0}^\infty$ *неотрицательных измеримых функций в* $\mathbb{R}^n$ *обозначим*

$$G_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-|k-j|\delta} g_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда существует положительная константа $C = C(q(\cdot), q(\cdot), \delta)$ *, такая что*

$$\big\|\|\{G_j\}\|_{\ell_j^\beta}\big\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}} \leq C\big\|\|\{g_k\}\|_{\ell_k^\beta}\big\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}}. \tag{4.6}$$

Доказательство. По Лемме 2 в [22], взяв нормы $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}$ по обеим частям неравенства, получаем (4.6). $\square$

Пусть k_0, $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $S \geq -1$ целое число, такое что для любого $\epsilon > 0$

$$\mathcal{F}k(\xi) > 0 \quad \text{для } |\xi| < 2\epsilon, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{F}k(\xi) > 0 \quad \text{для } \epsilon/2 < |\xi| < 2\epsilon \tag{4.8}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha k(x) \mathrm{d}x = 0 \quad \text{для каждой } |\alpha| \leq S, \tag{4.9}$$

где (4.7) и (4.8) являются условиями Таубера, а (4.9) условиями момента на k. Напомним обозначения.

$$k_t(x) := t^{-n} k(t^{-1}x), \quad k_j(x) := k_{2^{-j}}(x), \quad \text{для } t > 0 \text{ и } j \in \mathbb{N}.$$

Для любого $a > 0$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$, определим

$$k_j^{*,a} f(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|k_j * f(x+y)|}{(1+|y|/j)^a}, \quad j > 0. \tag{4.10}$$

Теорема 4.3. *Пусть* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty)$, $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in (0,\infty)$, $\beta \in (0,\infty]$, $a \in \mathbb{R}$, $r \in (0, \min\{q^-, \beta\})$, $s < S+1$, $w \in A_{q(\cdot)}$ *и* $-n\delta_1 < \alpha(0)$, $\alpha_\infty < n\delta_2$, *где* δ_1, $\delta_2 \in (0,1)$ *- константы в Лемме 2.2 для* $q(\cdot)$. *Предположим, что* k_0, $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *являются функциями, удовлетворяющими (4.7), (4.8) и (4.9). Если* $ar > n$, *то пространство* $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ *в Определении 4.2 можно охарактеризовать следующим образом*

$$M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n) := \big\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|^i_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} < \infty \big\}, \quad i = 1, \cdots, 5,$$

где

$$\|f\|^1_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \|k_0 * f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}} + \left\| \left(\int_0^1 t^{-s\beta} |k_t * f|^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}},$$

$$\|f\|^2_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w} F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \|k_0^* f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}} + \left\| \left(\int_0^1 t^{-s\beta} |k_t^{*,a} f|^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}},$$

$$\|f\|^3_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \|k_0 * f\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}} + \left\| \left(\int_0^1 t^{-s\beta} \int_{|z|<t} |k_t * f|(\cdot + z)^\beta \mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}} \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}},$$

$$\|f\|^4_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{js\beta} |k_j^{*,a} f|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}},$$

$$\|f\|^5_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{js\beta} |k_j * f|^\beta \right)^{1/\beta} \right\|_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}}.$$

Тогда $\|f\|^i_{M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)}$, $i = 1, \cdots, 5$, *являются эквивалентными (квази-) нормами в* $M\dot{K}^{\alpha(\cdot),p),\theta}_{q(\cdot),\lambda,w}F^s_\beta(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. По аналогии с доказательством в [23, Теорема 2.6], где [23, Теорема 2.1 и Лемма 2.13] заменены Следствием 3.1 и Леммой 4.4, мы получаем желаемый результат. В связи с ограничением объёма статьи подробности опускаются. □

Примечание 4.1. Аналогично, можно ввести взвешенные гранд пространства Герца-Моррея-Бесова с переменными показателями. Предоставляем это на усмотрение заинтересованных читателей.

Abstract. Let a vector-valued sublinear operator satisfy the size condition and be bounded on weighted Lebesgue spaces with variable exponent. Then we obtain its boundedness on weighted grand Herz-Morrey spaces with variable exponents. Next we introduce weighted grand Herz-Morrey-Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents and provide their equivalent quasi-norms via maximal functions.

Список литературы

[1] O. Kováčik and J. Rákosník, “On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$”, Czechoslov. Math. J. **41**, 592 -– 618 (1991).

[2] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, “The maximal function on variable L^p spaces”, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28**, 223 – 238 (2003).

[3] L. Diening, “Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$”, Math. Inequal. Appl. **7**, 245 -– 253 (2004).

[4] A. Nekvinda, “Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$”, Math. Inequal. Appl. **7**, 255 – 266 (2004).

[5] L. Diening, “Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces”, Bull. Sci. Math. **129**, 657 -– 700 (2005).

[6] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, “Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent”, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **34**, 503 – 522 (2009).

[7] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, “Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces”, J. Math. Anal. Appl. **394**, 744 – 760 (2012).

[8] B. Muckenhoupt, “Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function”, Tran. Amer. Math. Soc. **165**, 207 – 226 (1972).
[9] L. Wang and L. Shu, “Boundedness of some sublinear operators on weighted variable Herz-Morrey spaces”, J. Math. Inequal. **12**, 31 – 42 (2018).
[10] S. R. Wang and J. S. Xu, “Boundedness of vector-valued sublinear operators on weighted Herz-Morrey spaces with variable exponents”, Open Math. **19**, 412 – 426 (2021).
[11] H. Nafis and H. Rafeiro and M.A. Zaighum, “A note on the boundedness of sublinear operators on grand variable Herz spaces”, J. Inequal. Appl. **2020**, 1 – 13 (2020).
[12] W. J. Zhang and S. X. He and J. Zhang, “Boundedness of sublinear operators on weighted grand Herz-Morrey spaces”, AIMS Math. **8**, 17381 – 17401 (2023).
[13] J. Xu, “Equivalent norms of Herz-type Besov and Triebel-Lizorkin spaces”, J. Funct. Spaces. Appl. **3**, 17 -– 31 (2005).
[14] J. Xu and D. Yang, “Herz-type Triebel-Lizorkin spaces. I”, Acta Math. Sin., Engl. Ser. **21**, 643 -– 654 (2005).
[15] C. Shi and J. Xu, “Herz type Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents”, Front. Math. China **8**, 907 -– 921 (2013).
[16] M. Izuki and T. Noi, “Boundedness of fractional integrals on weighted Herz spaces with variable exponent”, J. Inequal. Appl. **2016**, 15 p. (2016).
[17] D. Cruz-Uribe and L.-A. D. Wang, “Extrapolation and weighted norm inequalities in the variable Lebesgue spaces”, Trans. Am. Math. Soc. **369**, 1205 – 1235 (2017).
[18] D. Douadi, “Lorentz Herz-type Besov-Triebel-Lizorkin spaces”, arXiv:2406.02705v3
[19] M. Frazier and B. Jawerth, “A discrete transform and decomposition of distribution spaces”, J. Funct. Anal. **93**, 34 – 107 (1990).
[20] M. Frazier and B. Jawerth, “A discrete transform and decomposition of distribution spaces”, J. Funct. Anal. **93**, 34 -– 170 (1990).
[21] W. Yuan and W. Sickel and D. Yang, Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel, Lecture Notes in Mathematics 2005, Springer-Verlag, Berlin (2010). https://doi.org/10.1007/978-3-642-14606-0
[22] V. S. Rychkov, “On a theorem of Bui, Paluszyński, and Taibleson”, Proc. Steklov Inst. Math. **227**, 280 – 292 (1999).
[23] T. Ullrich, “Continuous characterizations of Besov-Lizorkin-Triebel spaces and new interpretations as coorbits”, J. Funct. Spaces Appl. **2012**, 47 p. (2012).

Поступила 10 декабря 2024

После доработки 29 января 2025

Принята к публикации 02 февраля 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 5, 2025, стр. 20 – 34.

ПРИМЕНЕНИЯ ЦЕПЕЙ ЛЕВНЕРА В ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ И КВАЗИКОНФОРНЫХ РАСШИРЕНИЯХ

С. Л. ГУО, ДЖ. Х. ФАН

Нанкинский университет науки и технологии, Нанкин, Цзянсу, КНР[1]
E-mails: *sulingguo1@163.com; jinhuafan@hotmail.com*

АННОТАЦИЯ. В данной работе исследуются теория цепей Левнера и критерии однолистности и квазиконформной расширяемости для аналитических функций в единичном круге. Заменив предшварцеву производную на шварцеву производную, мы получаем результаты, аналогичные результатам Хотты [Публ. мат., Дебрецен 82 (2013), стр. 473-483]. Кроме того, построив различные цепи Левнера, мы обобщаем и предоставляем единые доказательства нескольких известных критериев однозначности и квазиконформной расширяемости. В качестве применения цепей Левнера мы модифицируем критерий Альфорса, включающий комплексную константу c.

MSC2020 numbers: 30C62; 30C55.

Ключевые слова: Цепь Левнера; квазиконформное расширение; однолистная функция; производная Шварца; критерий Альфорса.

1. Введение

Пусть $\mathcal{A}$ — класс аналитических функций f в единичном круге $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ нормализованный по $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, а $\mathcal{S}$ — подкласс $\mathcal{A}$, состоящий из всех однолистных функций. Для локально однолистной аналитической функции f в $\mathbb{D}$, предшварцева производная T_f и шварцева производная S_f определяются соответственно как

$$T_f = \frac{f''}{f'}, \qquad S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Соответствующие нормы:

$$||T_f|| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|T_f|, \quad ||S_f|| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^2|S_f|.$$

Пусть $k \in [0, 1)$, гомеоморфизм F из $\mathbb{C}$ называется k-квазиконформным, если F принадлежит классу Соболева $W^{1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ и удовлетворяет $|\bar\partial F| \leqslant k|\partial F|$ почти всюду в $\mathbb{C}$. В данной работе обозначим через $\widetilde{\mathcal{S}}_k$ (соответственно $\mathcal{S}_k$) подкласс всех $f \in \mathcal{S}$, допускающих k-квазиконформные расширения на $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (соответственно $\mathbb{C}$), т. е. существует k-квазиконформное отображение $F : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ (соответственно $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) такое, что $F|_{\mathbb{D}} = f$.

[1]Работа была поддержана Национальным фондом естественных наук Китая. (№ 12471074).

Как известно, T_f и S_f играют важную роль в изучении однолистных функций, квазиконформных расширений и универсального пространства Тейхмюллера (см. [1] – [4]). Хорошо известный критерий Беккера [5] показал, что $f \in \mathcal{S}_k$, если $||T_f|| \leqslant k$, а критерий Альфорса [6] показал, что $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$, если $||S_f|| \leqslant 2k$.

Поскольку критерии Беккера и Альфорса являются очень важными и полезными, было изучено множество обобщений. Добавив комплексную константу c, Альфорс [7] получил общие критерии, которые играют ключевую роль в оценке максимального шара $\mathcal{S}$ с центром в базовой точке в пространстве Хорнича [8].

Теорема 1.1 ([7])**.** *Пусть $f \in \mathcal{A}$ и $k \in [0,1)$, для константы $c \in \mathbb{C}$ и всех $z \in \mathbb{D}$,*

(i) *если* $\left|c|z|^2 + (1-|z|^2)\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant k$, *то* $f \in \mathcal{S}_k$;

(ii) *если* $\left|\frac{z}{\bar{z}}\frac{(1-|z|^2)^2}{1-c}\frac{1}{2}S_f - c|z|^2\right| \leqslant k$, *то* $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$.

Используя геометрические подходы, Эпштейн [9] получил следующий критерий однолистности, который включает критерии Беккера и Альфорса как частные случаи. На самом деле, Поммеренке [10] повторно доказал результат Эпштейна с помощью теории цепей Левнера.

Теорема 1.2 ([9, 10])**.** *Пусть f и g являются голоморфными в $\mathbb{D}$. Если f и g являются локально однолистными аналитическими функциями в $\mathbb{D}$ и*

$$\left|\frac{1}{2}(1-|z|^2)^2(S_f - S_g) + (1-|z|^2)\bar{z}\,T_g\right| \leqslant 1$$

для всех $z \in \mathbb{D}$, то f является однолистной функцией в $\mathbb{D}$.

Параллельно Теореме 1.2, заменив производную Шварца на предшварцевскую производную, Чен [11] получил квазиконформный критерий расширения, который имеет важное применение в оценке внутреннего радиуса однолистности и в исследовании геометрии универсального пространства Тейхмюллера.

Теорема 1.3 ([11])**.** *Пусть $k \in [0,1)$. Если $f \in \mathcal{A}$ и $g \in \mathcal{A}$ являются локально однолистными аналитическими функциями в $\mathbb{D}$, и для всех $z \in \mathbb{D}$*

$$\left|z\,(1-|z|^2)(T_f - T_g) + z\,\frac{g'}{g} - 1\right| \leqslant k, \tag{1.1}$$

то $f \in \mathcal{S}_k$.

Поскольку Теоремы 1.1–1.3 являются достаточными условиями, Рушевейх сначала представил эквивалентное условие для того, чтобы $f \in \mathcal{A}$ была однолистной. Результат еще не опубликован, но мы можем ссылаться на [12].

Теорема 1.4 ([12]). *Пусть $f \in \mathcal{A}$. Тогда $f \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда существует аналитическая функция Ω в $f(\mathbb{D})$ такая, что*

$$(1-|z|^2)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}+zf'(z)\Omega(f(z))\right| \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

В дальнейшем, учитывая Теорему 1.4, Хотта [12] получил необходимое и достаточное условие для того, чтобы $f \in \mathcal{A}$ имела квазиконформное расширение.

Теорема 1.5 ([12]). *Пусть $f \in \mathcal{A}$ и $k \in [0,1)$. Предположим, что существует $k' \in [0,k)$ и конформное отображение Q определённое в $f(\mathbb{D})$, которое допускает $\frac{k-k'}{1-kk'}$-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$. Кроме того, для константы $c \in \mathbb{C}$ и всех $z \in \mathbb{D}$, если выполняется следующее неравенство:*

$$\left|c|z|^2+(1-|z|^2)\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}+zf'(z)\Omega(f(z))\right\}\right| \leqslant k', \tag{1.2}$$

где $\Omega = \frac{Q''}{Q'}$, то $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$. И наоборот, если $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$, тогда существует $k' \in [0,1)$ и конформное отображение Q определённое в $f(\mathbb{D})$, которое имеет $\frac{k+k'}{1+kk'}$-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$, такое что неравенство (1.2) *выполняется для константы $c \in \mathbb{C}$ и для всех $z \in \mathbb{D}$.*

Заметим, что условия $|c| \leqslant k$ и $|c| \leqslant k'$ соответственно включены в Теоремах 1.1 и (1.2) [13, Примечание 1.1 и 1.2].

Кроме того, для ознакомления с современными исследованиями по однолистности и квазиконформному расширению можно обратиться к соответствующим работам Дениза и соавторов [14, 15, 16], в которых представлены новые критерии и обсуждаются их значимые связи с другими результатами.

Первая задача статьи состоит в рассмотрении аналогичных результатов Теорем 1.4 и 1.5 путем замены предшварцевой производной на шварцеву производную.

Теорема 1.6. *Пусть $f \in \mathcal{A}$. Тогда $f \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда существует аналитическая функция Ω в $f(\mathbb{D})$ такая, что*

$$\frac{1}{2}(1-|z|^2)^2\left|S_f(z)+(f'(z))^2\left[\Omega'(f(z))-\frac{1}{2}\Omega^2(f(z))\right]\right| \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.3}$$

Теорема 1.7. *Пусть $f \in \mathcal{A}$ и $k \in [0,1)$. Предположим, что существует $k' \in [0,k)$ и конформное отображение Q определенное в $f(\mathbb{D})$, которое имеет $\frac{k-k'}{1-kk'}$-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$. Кроме того, для постоянного $c \in \mathbb{C}$ и для всех $z \in \mathbb{D}$, если выполняется следующее неравенство:*

$$\left|\frac{z}{\overline{z}}\frac{(1-|z|^2)^2}{1-c}\frac{1}{2}\left\{S_f(z)+(f'(z))^2\left[\Omega'(f(z))-\frac{1}{2}\Omega^2(f(z))\right]\right\}-c|z|^2\right| \leq k', \tag{1.4}$$

где $\Omega = \frac{Q''}{Q'}$, *то* $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$. *И наоборот, если* $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$, *то существует* $k' \in [0,1)$ *конформное отображение* Q *определённое в* $f(\mathbb{D})$, *которое имеет* $\frac{k+k'}{1+kk'}$*-квазиконформное расширение в* $\overline{\mathbb{C}}$, *такое что неравенство* (1.2) *выполняется для константы* $c \in \mathbb{C}$ *и всех* $z \in \mathbb{D}$. (*условие* $|c| \leqslant k'$ *включено в* (1.4))

Аналогично рассмотрению Теоремы 1.1 путем добавления константы к критериям Беккера и Альфорса, вторая задача статьи состоит в дальнейшей генерализации Теорем 1.2 и 1.3 путем добавления комплексной константы α.

Теорема 1.8. *Пусть* f *и* g *являются голоморфными в* $\mathbb{D}$. *Если* f *и* g *являются локально однолистными аналитическими функциями в* $\mathbb{D}$, *и для константы* $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \Big|\alpha(1-|z|^2)^2 \Big[(\alpha - \frac{1}{2})(T_f(z) - T_g(z)) + S_f(z) - S_g(z)\Big] \\ + (1-|z|^2)\bar{z}\Big[(1-2\alpha)\, T_f(z) + 2\alpha\, T_g(z)\Big]\Big| \leqslant 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

действует для всех $z \in \mathbb{D}$, *тогда* f *является однолистным в* $\mathbb{D}$.

Теорема 1.9. *Пусть* $k \in [0,1)$. *Если* $f \in \mathcal{A}$ *и* $g \in \mathcal{A}$ *являются локально однолистными аналитическими функциями в* $\mathbb{D}$, *для константы* $\alpha \in \mathbb{C}$ *и для всех* $z \in \mathbb{D}$

$$\left|\alpha\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1} z\,(1-|z|^2)(T_f - T_g) + \Big\{1 + |z|^2\Big[\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1} - 1\Big]\Big\} z\,\frac{g'}{g} - 1\right| \leqslant k, \tag{1.6}$$

то $f \in \mathcal{S}_k$. *Где ветвь* $\big(\frac{g'}{f'}\big)^{\alpha-1}$ *выбрана так, что* $\big(\frac{g'}{f'}\big)^{\alpha-1}(0) = 1$.

Примечание 1.1. Теоремы 1.2 и 1.3 являются частными случаями Теорем 1.8 и 1.9 при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 1$, соответственно. Фактически, обобщение добавлением константы α уже появилось в [17, 18].

Мы знаем, что в критерии Беккера ∞ является фиксированным, а в критерии Альфорса — нет. В некоторых задачах необходимо зафиксировать ∞. Для решения этой проблемы Хотта и Гуменюк [19] модифицировали критерий Альфорса. В качестве применения цепей Левнера мы в Разделе 5 обобщим результаты Гуменюка и Хотты.

Структура данной статьи следующая. В Разделе 2 мы представим основные понятия теории цепей Левнера и расширение Беккера, используемые в последующих доказательствах. В Разделе 3 мы приводим доказательства Теорем 1.6 и 1.7. В Разделе 4 мы доказываем Теоремы 1.8 и 1.9. В Разделе 5 мы модифицируем пункт (ii) Теоремы 1.1.

2. Предварительные сведения

В этом разделе мы представляем некоторые понятия, связанные с классической цепью Левнера, которые будут использоваться в наших доказательствах. Подробности классической теории Левнера можно найти в [20, 21, 22] , а современную теорию Левнера — в [23, 24, 25].

Определение 2.1. Рассмотрим функцию $f_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) z^n$, где $a_1(t) \neq 0$, определенную в $\mathbb{D} \times [0, +\infty)$, где $a_1(t)$ является комплекснозначной, локально абсолютно непрерывной функцией в $[0, \infty)$ и $\lim_{t\to\infty} |a_1(t)| = \infty$. Тогда $f_t(z)$ называется цепью Левнера, если выполняются следующие условия:

(i) Для каждого $t \in [0, +\infty)$, $f_t(z)$ является аналитической и однолистной в $\mathbb{D}$;

(ii) Для любых $0 \leqslant s < t < \infty$, имеем $f_s(\mathbb{D}) \subseteq f_t(\mathbb{D})$.

Если в Определении2.1 $a_1(t) = e^t$, то назовем $f_t(z)$ стандартной цепью Левнера. Для стандартной цепи Левнера Поммеренке [4] дал следующее заключение.

Теорема 2.1 ([4])**.** *$f_t(z)$ является стандартной цепью Левнера тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

(i) *$f_t(z)$ является аналитической функцией в диске $|z| < r_0$ для каждого $t \geqslant 0$, где $r_0 \in (0,1)$, и абсолютно непрерывной в $t \geqslant 0$ для каждого $|z| < r_0$. Более того, существуют положительные константы K_0 и r_0 такие, что:*

$$|f_t(z)| \leqslant K_0 e^t, \quad |z| < r_0, \quad t \geqslant 0.$$

(ii) *Существует функция $p(z,t)$, аналитическая в $\mathbb{D}$ и измеримая в $t \geqslant 0$, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} p(z,t) > 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и почти всех $t \geqslant 0$, такая, что*

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = z f_t'(z) p(z,t), \quad z \in \mathbb{D}, \quad \text{п.в. } t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Функция $p(z,t)$ называется функцией Герглотца. Для такой стандартной цепи соответствующая функция Герглотца $p(z,t)$ нормируется по $p(0,t) = 1$ для п.в. $t \geqslant 0$. Хотта [26] обобщил Теорему 2.1 для цепи Левнера, первый коэффициент которой $a_1(t)$ является комплексным. В этом случае $p(z,t)$ не нормализуется.

Примечательный результат, показанный Поммеренке [4, Гл.6] гласит, что для каждого $f \in \mathcal{S}$, существует цепь Левнера f_t , такая что $f = f_0$. Более того, некоторые свойства f, такие как квазиконформная расширяемость, могут быть определены с помощью $p(z,t)$. Используя $p(z,t)$, Беккер [5, 27] дал известный квазиконформный критерий расширяемости, который включает в себя большинство ранее известных критериев, т. е. если функция Герглотца $p(z,t)$ стандартной цепи Левнера $f_t(z)$ удовлетворяет

$$\left|\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}\right| \leqslant k < 1 \quad ..\, t \geqslant 0 \ \ \forall z \in \mathbb{D}, \tag{2.2}$$

то для каждого $t \geqslant 0$, f_t допускает k-квазиконформное расширение в $\mathbb{C}$.

Обозначим $\mathcal{S}_k^B$ совокупность $f \in \mathcal{S}$ допускающую подходящую стандартную цепь Левнера с $p(z,t)$, удовлетворяющую (2.2). Для цепи Левнера $f_t(z) = a_1(t)z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t)z^n$ без предположения $a_1(t) = e^t$, Хотта [26] доказал, что расширение Беккера также выполняется. Параллельно $\mathcal{S}_k^B$ обозначим $\widetilde{\mathcal{S}}_k^B$ совокупность $f \in \mathcal{S}$ допускающих подходящую цепь Левнера с $p(z,t)$, удовлетворяющую (2.2).

3. Доказательства Теорем 1.6 и 1.7

В этом разделе мы докажем Теоремы 1.6 и 1.7. В действительности, проверив идею Хотты в [12], мы обнаружим, что доказательства несложны. Для удобства мы приводим подробности доказательства Теорем 1.6−1.7.

Доказательство Теоремы 1.6 Предположим, что (1.3) выполняется, и покажем, что f является однолистной. Для заданного Ω, пусть аналитическая функция Q в $f(\mathbb{D})$ такая, что $\Omega = Q''/Q'$ и $g = Q \circ f$. Исходя из (1.3), путем простых вычислений получаем

$$\begin{aligned}
1 \geqslant & \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 \left| S_f + (f')^2 \left[\Omega'(f) - \frac{1}{2}\Omega^2(f)\right]\right| \\
= & \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 \Big| (\frac{f''}{f'})' - \frac{1}{2}(\frac{f''}{f'})^2 + \big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)}\big]' \cdot f' - \frac{1}{2}\big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)}\big]^2 \cdot (f')^2 \Big| \\
= & \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 \Big| \big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)} \cdot f' + \frac{f''}{f'}\big]' - \frac{1}{2}\big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)} \cdot f' + \frac{f''}{f'}\big]^2 \Big| \\
= & \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 \Big| (\frac{g''}{g'})' - \frac{1}{2}(\frac{g''}{g'})^2 \Big| = \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 |S_g|.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Тогда (3.1) подразумевает, что g является однолистной. Таким образом , f является однолистной, поскольку $g = Q \circ f$ является однолистной тогда и только тогда, когда Q и f являются однолистными в своих соответствующих областях.

С другой стороны, предположим, что f является однолистной, мы построим аналитическую функцию Ω в $f(\mathbb{D})$ так, чтобы выполнялось (1.3) . Выберем

$h \in \mathcal{S}$ с $||S_h|| \leqslant 1$ и пусть $Q := h \circ f^{-1}$ и $\Omega = Q''/Q'$. Тогда, заменив g на h и следуя вычислениям в (3.1), получим, что (1.3) выполняется следующим образом:

$$1 \geqslant ||S_h|| \geqslant \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2|S_h| = \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2 \left| S_f + (f')^2 \left[\Omega'(f) - \frac{1}{2}\Omega^2(f) \right] \right|.$$

Доказательство Теоремы 1.7 Предположим, что (1.4) выполняется для заданного конформного отображения Q, удовлетворяет условиям Теоремы 1.7, мы докажем, что $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$. Для $\Omega = Q''/Q'$, пусть $g = Q \circ f$. Простыми вычислениями получаем

(3.2)
$$\begin{aligned}
k' &\geqslant \left| \frac{z}{\overline{z}} \frac{(1-|z|^2)^2}{1-c} \frac{1}{2} \left\{ S_f(z) + (f')^2 \Big[\Omega'(f) - \frac{1}{2}\Omega^2(f) \Big] \right\} - c|z|^2 \right| \\
&= \left| \frac{z}{\overline{z}} \frac{(1-|z|^2)^2}{1-c} \frac{1}{2} \left\{ (\frac{f''}{f'})' - \frac{1}{2}(\frac{f''}{f'})^2 + \big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)} \big]' f' - \frac{1}{2} \big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)} \big]^2 (f')^2 \right\} - c|z|^2 \right| \\
&= \left| \frac{z}{\overline{z}} \frac{(1-|z|^2)^2}{1-c} \frac{1}{2} \left\{ \big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)} f' + \frac{f''}{f'} \big]' - \frac{1}{2} \big[\frac{Q''(f)}{Q'(f)} f' + \frac{f''}{f'} \big]^2 \right\} - c|z|^2 \right| \\
&= \left| \frac{z}{\overline{z}} \frac{(1-|z|^2)^2}{1-c} \frac{1}{2} \left\{ (\frac{g''}{g'})' - \frac{1}{2}(\frac{g''}{g'})^2 \right\} - c|z|^2 \right| = \left| \frac{z}{\overline{z}} \frac{(1-|z|^2)^2}{1-c} \frac{1}{2} S_g(z) - c|z|^2 \right|.
\end{aligned}$$

Согласно (ii) в Теореме 1.1, (3.2) подразумевает, что $g = Q \circ f$ допускает k'-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$. Поскольку Q допускает $(k-k')\,/\,(1-kk')$-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$, мы заключаем, что $f = Q^{-1} \circ g \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$.

С другой стороны, предположим, что $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$, мы построим конформное отображение Q в $f(\mathbb{D})$ которое допускает $(k+k')\,/\,(1+kk')$- квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$ так, что выполняется (1.4) . Выберем $h \in \mathcal{S}$ которая удовлетворяет

$$\left| \frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{1-c} \; \frac{z}{\overline{z}} \; \frac{1}{2} S_h(z) - c|z|^2 \right| \leqslant k' \tag{3.3}$$

для всех $z \in \mathbb{D}$ с определенным $c \in \mathbb{C}$. Согласно (ii) в Теореме 1.1, отображение h допускает k'-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $Q := h \circ f^{-1}$ и $\Omega = Q''/Q'$. Поскольку $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k$, Q допускает $(k+k')\,/\,(1+kk')$-квазиконформное расширение в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда, заменив g на h и следуя вычислениям в (3.2) получим, что (1.4) выполняется следующим образом:

$$\begin{aligned}
k' &\geqslant \left| \frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{1-c} \; \frac{z}{\overline{z}} \; \frac{1}{2} S_h(z) - c|z|^2 \right| \\
&= \left| \frac{z}{\overline{z}} \frac{(1-|z|^2)^2}{1-c} \frac{1}{2} \left\{ \left[S_f(z) + (f')^2 \left(\Omega'(f) - \frac{1}{2}\Omega^2(f) \right) \right] \right\} - c|z|^2 \right|.
\end{aligned}$$

4. Доказательства Теорем 1.8 и 1.9

В этом разделе мы приводим доказательства Теорем 1.8–1.9 путем построения подходящей цепи Левнера.

Доказательство Теоремы 1.8 Без потери общего представления, мы предполагаем, что

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad \text{и} \quad g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots ,$$

где $a_1 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$. Теперь рассмотрим следующие функции:

$$f^*(z) = \frac{f(z) - a_0}{a_1 + \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1}\right)(f(z) - a_0)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2} + \frac{b_2^2}{b_1^2}\right) z^3 + \cdots ,$$

$$g^*(z) = \frac{g(z) - b_0}{b_1} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \frac{b_3}{b_1} z^3 + \cdots$$

вместо функций f и g. Эти нормализации не умаляют общности. В результате этого преобразования мы теперь имеем

$$f(z) = g(z) + O(z^3) \quad \text{и} \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} = 1 + O(z^2) \quad \text{при}\, z \to 0.$$

Поскольку f и g являются локально однолистными аналитическими функциями для некоторого $\alpha \in \mathbb{C}$, мы можем выбрать ветвь $\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{\alpha}$, которая принимает значение 1 при $z = 0$. Далее определим следующие функции:

$$v(z) = \left(\frac{g'(z)}{f'(z)}\right)^{\alpha} = 1 + v_1 z^2 + O(z^3), \tag{4.1}$$

$$u(z) = f(z) \cdot v(z) = z + u_1 z^2 + O(z^3). \tag{4.2}$$

Очевидно, что как $v(z)$, так и $u(z)$ являются аналитическими функциями в $\mathbb{D}$. Теперь определим $f_t(z) : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ следующим образом

$$f_t(z) = \frac{u(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\, z u'(e^{-t}z)}{v(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\, z v'(e^{-t}z)}, \tag{4.3}$$

которая является мероморфной в $\mathbb{D}$ и удовлетворяет условию $f_0(z) = f(z)$. Теперь мы проверим, что $f_t(z)$ является стандартной цепью Левнера.

Шаг 1. Сначала убедимся, что $f_t(z)$ удовлетворяет условию (i) Теоремы 2.1.

В силу (4.1)–(4.3), имеем, что $f_t(z) = e^t z + O(z^2)$ при $z \to 0$. Следовательно, существуют константы $r_0 \in (0, 1)$ и $K_0 > 0$ такие, что $|f_t(z)| \leqslant K_0 e^t$, $|z| < r_0$, $t \geqslant 0$. Более того, для каждого $z \in \mathbb{D}$, функция $f_t(z)$ принадлежит $C^{\infty}([0, +\infty))$, что гарантирует, что $f_t(z)$ локально абсолютно непрерывна в $t \geqslant 0$.

Шаг 2. Теперь убедимся, что $f_t(z)$ удовлетворяет условию (ii) Теоремы 2.1.

Путем прямых вычислений находим, что

(4.4)
$$f'_t(z) = \frac{e^t\,(u'v - v'u) + z(1-e^{-2t})\,(u''v - v''u) + z^2e^t(1-e^{-2t})^2\,(u''v' - v''u')}{\left[v + (e^t - e^{-t})zv'\right]^2},$$

(4.5)
$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = \frac{z\left[e^t\,(u'v - v'u) - z(1-e^{-2t})\,(u''v - v''u) - z^2e^t(1-e^{-2t})^2\,(u''v' - v''u')\right]}{\left[v + (e^t - e^{-t})zv'\right]^2}.$$

Для u, v и их производных справедливы следующие выражения:

$$u'v - v'u = f'\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha}, \tag{4.6}$$

$$u''v - v''u = (1-2\alpha)f''\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha} + 2\alpha g''\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha-1}, \tag{4.7}$$

$$u''v' - v''u' = \alpha f'\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha}\left[S_f - S_g + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''}{f'} - \frac{g''}{g'}\right)\right], \tag{4.8}$$

где u, v и их производные оцениваются в точке $e^{-t}z$. Чтобы доказать, что существует измеримая функция $p(z,t)$ относительно t, такая что $\Re p(z,t) > 0$ и выполняется уравнение (2.1) , предположим, что

$$\phi(z,t) = \frac{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} - zf'_t(z)}{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} + zf'_t(z)}.$$

По (4.4)–(4.8), получаем

$$\begin{aligned}
\phi(z,t) &= \frac{-ze^{-t}\left(1-e^{-2t}\right)(u''v - v''u) - z^2\left(1-e^{-2t}\right)^2(u''v' - v''u')}{u'v - v'u} \\
&= -\alpha z^2\left(1-e^{-2t}\right)^2\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(T_f(e^{-t}z) - T_g(e^{-t}z)\right) + S_f(e^{-t}z) - S_g(e^{-t}z)\right] \\
&\quad - e^{-t}z\left(1-e^{-2t}\right)\left[(1-2\alpha)T_f(e^{-t}z) + 2\alpha T_g(e^{-t}z)\right].
\end{aligned}$$

Заметим, что $|e^{-t}z|^2 < e^{-2t}$ для $z \in \mathbb{D}$. Используя z для обозначения $e^{-t}z$, по (1.5), получаем

$$\begin{aligned}
|\phi(z,t)| \leqslant \Big|&\alpha(1-|z|^2)^2\left[(\alpha - \frac{1}{2})(T_f(z) - T_g(z)) + S_f(z) - S_g(z)\right] \\
&+ (1-|z|^2)\bar{z}\Big[(1-2\alpha)\,T_f(z) + 2\alpha\,T_g(z)\Big]\Big| \leqslant 1,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Объединяя (4.9) и

$$p(z,t) = \frac{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t}}{zf'_t(z)} = \frac{1+\phi(z,t)}{1-\phi(z,t)},$$

получаем $\operatorname{Re} p(z,t) > 0$. Более того, $p(z,t)$ является аналитической функцией в $\mathbb{D}$ и измеримой в $t \geqslant 0$. Таким образом, условие (ii) Теоремы 2.1 выполняется.

Следовательно, $f_t(z)$ является стандартной цепью Левнера, и, следовательно, $f(z) = f_0(z)$ является однолистной в $\mathbb{D}$.

Доказательство Теоремы 1.9 Поскольку $f,\, g \in \mathcal{A}$ и являются локально однолистными аналитическими функциями для $\alpha \in \mathbb{C}$, мы можем выбрать ветвь

$$\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{\alpha} = 1 + \nu_1 z + \cdots, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

которая принимает значение 1 при $z = 0$. Определим $f_t(z) : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ через

$$f_t(z) = f(e^{-t}z) + (e^{2t} - 1)\left(\frac{f'(e^{-t}z)}{g'(e^{-t}z)}\right)^{\alpha} g(e^{-t}z).$$

Далее докажем, что $f_t(z)$ является стандартной цепью Левнера.

Шаг 1. Проверим, что $f_t(z)$ удовлетворяет условию (i) Теоремы 2.1.

Очевидно, что $f_t(z)$ является аналитической функцией в $\mathbb{D}$ и удовлетворяет условиям $f_0(z) = f(z)$, $f_t'(0) = e^t$. Поскольку

$$e^{-t}f_t(z) = e^{-t}f(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\left(\frac{f'(e^{-t}z)}{g'(e^{-t}z)}\right)^{\alpha} g(e^{-t}z) = z + \cdots,$$

имеем, что $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}f_t(z) = z$, откуда следует, что $\{e^{-t}f_t(z)\}_{t\geqslant 0}$ является нормальным семейством. Следовательно, для любого $r_0 \in (0, 1)$, существует константа $K_0 > 0$ такая, что $|f_t(z)| \leqslant K_0 e^t$ для всех $|z| < r_0$ и $t \geqslant 0$. Более того, для каждого $z \in \mathbb{D}$, $f_t(z) \in C^{\infty}([0, +\infty))$, поэтому $f_t(z)$ локально абсолютно непрерывна в $t \geqslant 0$.

Шаг 2. Проверим, что $f_t(z)$ удовлетворяет условию (ii) Теоремы 2.1.

После простых вычислений получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} =& - z(e^t - e^{-t})\Big[\alpha g\frac{f''g' - f'g''}{{g'}^2}\Big(\frac{f'}{g'}\Big)^{\alpha-1} + g'\Big(\frac{f'}{g'}\Big)^{\alpha}\Big] \\ & - ze^{-t}f' + 2e^{2t}g\Big(\frac{f'}{g'}\Big)^{\alpha},\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$f_t'(z) = (e^t - e^{-t})\Big[\alpha g\frac{f''g' - f'g''}{{g'}^2}\Big(\frac{f'}{g'}\Big)^{\alpha-1} + g'\Big(\frac{f'}{g'}\Big)^{\alpha}\Big] + e^{-t}f', \tag{4.11}$$

где f', f'', g', g'' представляют соответственно $f'(e^{-t}z), f''(e^{-t}z), g'(e^{-t}z), g''(e^{-t}z)$.

Чтобы доказать, что существует измеримая функция $p(z,t)$ по отношению к t , такая что $\Re p(z,t) > 0$ и выполняется уравнение (2.1) , предположим, что

$$\phi(z,t) = \frac{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} - zf_t'(z)}{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} + zf_t'(z)}. \tag{4.12}$$

Из (4.10)−(4.12), получаем

$$\phi(z,t) = -\, ze^{-t}\,(1-e^{-2t})\Big[\alpha\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1}\Big(\frac{f''}{f'}-\frac{g''}{g'}\Big)\Big] \\ -\, ze^{-t}\,\frac{g'}{g}\Big\{1+e^{-2t}\Big[\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1}-1\Big]\Big\}+1.$$

Заметим, что $|e^{-t}z|^2 < e^{-2t}$ для $z \in \mathbb{D}$. Используя z для обозначения $e^{-t}z$, по (1.6), имеем

(4.13)

$$|\phi(z,t)| \leqslant \Big|\alpha\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1} z\,(1-|z|^2)(T_f-T_g)+\Big\{1+|z|^2\Big[\Big(\frac{g'}{f'}\Big)^{\alpha-1}-1\Big]\Big\}z\,\frac{g'}{g}-1\Big| \\ \leqslant k<1.$$

Объединяя (4.13) и

$$p(z,t) = \frac{\frac{\partial f_t(z)}{\partial t}}{zf_t'(z)} = \frac{1+\phi(z,t)}{1-\phi(z,t)}, \tag{4.14}$$

имеем, что $\Re p(z,t) > 0$. Более того, $p(z,t)$ измерима в $t \geqslant 0$ является аналитической в $\mathbb{D}$, поскольку $|\phi(z,t)| < 1$ и $(g'/f')^{\alpha-1}$является аналитической в $\mathbb{D}$. Следовательно, (ii) в Теореме 2.1 выполняется. Тогда $f_t(z)$ является стандартной цепью Левнера, а $f(z) = f_0(z)$ - однолистной в $\mathbb{D}$.

Из (4.13) и (4.14), получаем, что

$$\left|\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}\right| = |\phi(z,t)| \leqslant k.$$

Затем, согласно критерию расширения Беккера, получаем, что $f_t(z)$ допускает k-квазиконформное расширение на $\mathbb{C}$. В частности, $f(z) = f_0(z) \in \mathcal{S}_k$.

5. Приложение

По расширению Беккера, мы имеем $\mathcal{S}_k^B \subseteq \mathcal{S}_k$. Ключевой проблемой, привлекающей значительное внимание, является нахождение наибольшего $k_* \in (0,1)$ с таким свойством, что для любого $k \in (0,k_*)$ существует $q(k) \in (0,1)$ такое, что $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{S}_{q(k)}^B$. Исходя из критерия Беккера и того факта, что $||T_f|| \leqslant 6k$ для $f \in \mathcal{S}_k$, следует, что $k_* \geqslant 1/6$. Впоследствии Гуменюк [28] получил $k_* \geqslant 1/3$. До этого, чтобы улучшить нижнюю границу k_*, Гуменюк и Хотта [19] внесли изменение в критерий Альфорса.

Теорема 5.1 ([19])**.** *Пусть* $k \in (0,1)$ *и* $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots \in \mathcal{A}$. *Для всех* $z \in \mathbb{D}$, *если*

$$2\left(1-|z|^2\right)|z|\,|a_2| + \left(1-|z|^2\right)^2\Big|a_2^2+\frac{1}{2}S_f(z)\Big| \leqslant k, \tag{5.1}$$

тогда $f \in \mathcal{S}_k^B$, *с расширением Беккера, заданным как* $F(z) = \Phi(z, 1/\bar{z})$ *для всех* $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}$, *где*

$$\Phi(z,w) := f(w) + \frac{f'(w)}{\frac{1}{z-w} + a_2 - \frac{1}{2}\frac{f''(w)}{f'(w)}}. \tag{5.2}$$

Далее обобщая результаты Гуменюка и Хотты [19] , мы получаем модификацию (ii) в Теореме 1.1.

Теорема 5.2. *Пусть* $k \in (0,1)$ *и* $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \in \mathcal{A}$. *Для* $c \in \mathbb{C}$ *с* $|c| \leqslant k$ *и всех* $z \in \mathbb{D}$, *если*

$$2\left(1 - |z|^2\right)|z|\,|a_2| + \left|\frac{\left(1 - |z|^2\right)^2}{1-c}\,\frac{z}{\bar{z}}\left(a_2^2 + \frac{1}{2}S_f(z)\right) - c|z|^2\right| \leqslant k, \tag{5.3}$$

тогда $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k^B$, *с расширением Беккера, заданным как* $F(z) = \Phi(z, 1/\bar{z})$ *для всех* $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}$, *где*

$$\Phi(z,w) := f(w) + \frac{f'(w)}{\frac{1-c}{z-w} + a_2 - \frac{1}{2}\frac{f''(w)}{f'(w)}}. \tag{5.4}$$

Наши аргументы Теоремы 5.2 будут в значительной степени основаны на результатах, доказанных Гуменюком и Хоттой [19, Теорема 6.1]. Для удобства мы изложим их в модифицированном виде, необходимом для наших целей. Фактически, проверив доказательство Теоремы 6.1 в [19] слово за словом, мы можем изменить $f \in \mathcal{S}_k^B$ на $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k^B$, когда условие $\varphi(0,0) = 0$ заменяется на $\varphi(0,0) = c \in \mathbb{C}$.

Лемма 5.1 ([19])**.** *Пусть* f *— голоморфная функция в* $\mathbb{D}$ *с условиями* $f(0) = 0$ *и* $f'(0) = 1$. *Предположим, что существует мероморфная функция* Φ *определённая в* $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ *которая удовлетворяет следующей задаче с начальными условиями для уравнения в частных производных (УЧП):*

$$\frac{\partial \Phi(z,w)}{\partial w} = \varphi(z,w)\frac{\partial \Phi(z,w)}{\partial z}, \quad (z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{D}, \tag{5.5}$$

с начальными условиями:

$$\Phi(z,z) = f(z), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{5.6}$$

Здесь, φ *- мероморфная функция в* $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ *и удовлетворяет следующим свойствам:*

(i) $\varphi(0,0) = c \in \mathbb{C}$ $(c = 0)$;
(ii) $r|\varphi(w/r, w)| \leqslant k$ *для всех* $w \in \mathbb{D}$ *и всех* $r \in (|w|^2, 1)$.

Кроме того, предположим, что существуют константы $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $M > 0$ *такие, что*

$$|\Phi(z,w)| \leqslant M|z|, \quad \text{когда } |w| \leqslant |z| \text{ и } |zw| \leqslant \varepsilon^2. \tag{5.7}$$

Тогда f допускает k-квазиконформное расширение Беккера, которое задаётся следующим образом:

$$F(z) := \Phi(z, 1/\bar{z}), \quad |z| > 1. \tag{5.8}$$

В частности, мы имеем $f \in \widetilde{\mathcal{S}}_k^B$ $(f \in \mathcal{S}_k^B)$.

Доказательство Теоремы 5.2. Чтобы доказать Теорему 5.2, нам нужно проверить, что Φ заданное в (5.4), удовлетворяет всем условиям Леммы. 5.1.

Пусть $\varphi(z,w) := 2a_2(z-w) + \frac{(z-w)^2}{1-c}\left(a_2^2 + \frac{1}{2}S_f(w)\right) - c$, тогда имеем $\varphi(0,0) = -c$, что означает, что выполняется условие (i) Леммы 5.1 . Кроме того, поскольку выполняется (5.3) , имеем

$$\begin{aligned} k \geqslant & 2(1-|w|^2)|w||a_2| + \left|\frac{\left(1-|w|^2\right)^2}{1-c}\,\frac{w}{\bar{w}}\,\left(a_2^2 + \frac{1}{2}S_f(w)\right) - c|w|^2\right| \\ \geqslant & |w|^2\left|2\Big(\frac{w}{|w|^2} - w\Big)a_2 + \frac{\left(\frac{w}{|w|^2} - w\right)^2}{1-c}\left(a_2^2 + \frac{1}{2}S_f(w)\right) - c\right| \geqslant r|\varphi(w/r, w)|, \end{aligned}$$

где $r \in (|w|^2, 1)$. Тогда $\varphi(z,w)$ удовлетворяет условию (ii) Леммы 5.1.

Для φ легко проверить, что Φ удовлетворяет (5.5) и (5.6). Далее мы докажем, что Φ удовлетворяет (5.7). Поскольку $f(w) = w + a_2w^2 + a_3w^3 + \cdots$, то

$$f'(w) = 1 + 2a_2w + 3a_3w^2 + \cdots, \quad f''(w) \ = 2a_2 + 6a_3w + \cdots.$$

Очевидно, что для любого $w \in \frac{1}{2}\mathbb{D}$ существует $K > 1$, такое что

$$|f'(w)| \leqslant K \text{ и } \left|a_2 - \frac{1}{2}\left(f''(w)/f'(w)\right)\right| = \left|(3a_3 - 2a_2^2)w + \cdots\right| \leqslant K|w|.$$

Следовательно, всякий раз, когда $(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{D}$ удовлетворяет неравенствам $|w| \leqslant |z|$ и $|zw| \leqslant \varepsilon^2 := (1-k)/(4K)$, имеем

$$\begin{aligned} |\Phi(z,w)| &\leqslant |f(w)| + \frac{|(z-w)f'(w)|}{\big|1-c-K|w|\cdot|z-w|\big|} \leqslant K|w| + \frac{2|z|\,|f'(w)|}{|1-c| - 2K|zw|} \\ &\leqslant K|z| + \frac{2K|z|}{|1-c| - 2K\varepsilon^2} \leqslant \frac{5+k-2|c|}{1+k-2|c|}K|z| \leqslant M|z|, \end{aligned}$$

где $|c| \leqslant k$ и $M > 0$. Тогда Φ удовлетворяет условию (5.7).

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Abstract. In this paper, Loewner chain theory and criteria of univalency and quasiconformal extensibility for analytic functions on the unit disk are investigated. By replacing the pre-Schwarzian derivative with the Schwarzian derivative, we obtain results analogous to those of Hotta [Publ. Math. Debrecen. 82 (2013), pp. 473-483]. Furthermore, by constructing various Loewner chains, we generalize and provide uniform proofs of several known criteria of univalency and quasiconformal

extensibility. As an application of Loewner chains, we make a modification of the Ahlfors's criterion involving a complex constant c.

Список литературы

[1] L. V. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal Mappings, 2nd ed., Univ. Lect. Series **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006).

[2] L. P. Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag, New York (1983).

[3] O. Lehto, Univalent Functions and Teichmüller Space, Springer-Verlag, New York (1987).

[4] C. Pommerenke, Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1975).

[5] J. Becker, "Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen", J. Reine Angew. Math. **255**, 23 – 43 (1972). https://doi.org/10.1515/crll.1972.255.23

[6] L. V. Ahlfors and G. Weill, "A uniqueness theorem for Beltrami equations", Proc. Amer. Math. Soc. **13**, 975 – 978 (1962). https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1962-0148896-1

[7] L. V. Ahlfors, "Sufficient conditions for quasiconformal extension", Ann. of Math. Stud. **79**, 23 – 29 (1974). https://doi.org/10.1515/9781400881642-004

[8] J. A. Pfaltzgraff, "Univalence of the integral of $f'(z)^{\lambda}$", Bull. London Math. Soc. **7** (3), 254 – 256 (1975). https://doi.org/10.1112/blms/7.3.254

[9] C. L. Epstein, "Univalence criteria and surfaces in hyperbolic space", J. Reine Angew. Math. **380**, 196 – 214 (1987). https://doi.org/10.1515/crll.1987.380.196

[10] C. Pommerenke, "On the Epstein univalence criterion", Results Math. **10**, 143 – 146 (1986). https://doi.org/10.1007/bf03322371

[11] T. Cheng and J. X. Chen, "On the inner radius of univalency by pre-Schwarzian derivative", Sci. China Math. **50**, 987-996 (2007). https://doi.org/10.1007/s11425-007-0049-9

[12] I. Hotta, "Ahlfors's quasiconformal extension condition and Φ-likeness", Publ. Math. Debrecen. **82** (2), 473 – 483 (2013). https://doi.org/10.5486/pmd.2013.5387

[13] I. Hotta, "Ruscheweyh's univalent criterion and quasiconformal extensions", Kodai Math. J. **33** (3), 446 – 456 (2010). https://doi.org/10.2996/kmj/1288962552

[14] E. Deniz and H. Orhan, "Some notes on extensions of basic univalence criteria", J. Korean Math. Soc. **48** (1), 179 – 189 (2011). https://doi.org/10.4134/jkms.2011.48.1.179

[15] E. Deniz, "Sufficient conditions for univalence and quasiconformal extensions of meromorphic functions", Georgian Math. J. **19** (4), 639 – 653 (2012). https://doi.org/10.1515/gmj-2012-0027

[16] E. Deniz, S. Kanas and H. Orhan, "Univalence criteria and quasiconformal extensions of a general integral operator", Ukrainan Math. J. **74** (1), 27 – 39 (2022). https://doi.org/10.37863/umzh.v74i1.1148

[17] E. Deniz and H. Orhan, "Univalence criterion for meromorphic functions and Loewner chains", Appl. Math. Comput. **218** (3), 751 – 755 (2011). https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.045

[18] Z. Y. Hu, J. H. Fan and X. Y. Wang, "Quasiconformal extensions and inner radius of univalence by pre-Schwarzian derivatives of analytic and harmonic mappings", J. Math. Phys. Anal. Geom. **19** (4), 781 – 798 (2023). https://doi.org/10.15407/mag19.04.781

[19] P. Gumenyuk and I. Hotta, "Univalent functions with quasiconformal extensions: Becker's class and estimates of the third coefficient", Proc. Amer. Math. Soc. **148**, 3927 – 3942 (2020). https://doi.org/10.1090/proc/15010

[20] P. P. Kufareff, "On one-parameter families of analytic functions", Rec. Math. Mat. bornik, N. S. **13** (55), 87 – 118 (1943).

[21] K. Löwner, "Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I", Math. Ann. **89** (1-2), 103 – 121 (1923). https://doi.org/10.1007/bf01448091

[22] C. Pommerenke, "Über die Subordination analytischer Funktionen", J. Reine Angew. Math. **218**, 159 – 173 (1965). https://doi.org/10.1515/crll.1965.218.159

[23] F. Bracci, M. D. Contreras and S. Díaz-Madrigal, "Evolution families and the Loewner equation I: The unit disc", J. Reine Angew. Math. **672**, 1 – 37 (2012). https://doi.org/10.1515/crelle.2011.167

[24] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk, "Loewner chains in the unit disk", Rev. Mat. Iberoam. **26**, 975 – 1012 (2010). https://doi.org/10.4171/rmi/624

[25] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk, "Loewner theory in annulus I: evolution families and differential equations", Trans. Am. Math. Soc. **365**, 2505 – 2543 (2013). https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2012-05718-7
[26] I. Hotta, "Löwner chains with complex leading coefficient", Monatsh. Math. **163** (3), 315 – 325 (2011). https://doi.org/10.1007/s00605-010-0200-5
[27] J. Becker, "Conformal mappings with quasiconformal extensions", Aspects of Contemporary Complex Analysis, Academic Press, London, 37 – 77 (1980).
[28] P. Gumenyuk, "On existence of Becker extension", Ann. Fenn. Math. **47** (2), 979 – 1005 (2022). https://doi.org/10.54330/afm.120591

Поступила 02 ноября 2024

После доработки 11 апреля 2025

Принята к публикации 15 апреля 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 5, 2025, стр. 35 – 45.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С ИМПУЛЬСОМ

Я. ХАЛИЛИ, Д. БАЛЕАНУ

Университет сельскохозяйственных наук и природных ресурсов Сари, Сари, Иран [1]
Университет Чанкая, Анкара, Турция
E-mails: *y.khalili@sanru.ac.ir* *dumitru@cankaya.edu.tr*

Аннотация. В данной работе рассматривается обратная задача для квадратичного пучка оператора Штурма-Лиувилля с импульсом в конечном интервале. Показано, что некоторая информация о собственных функциях в некоторой внутренней точке $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и частях двух спектров однозначно определяет потенциальные функции и все параметры в граничных условиях. Кроме того, мы доказываем, что потенциальные функции на всем интервале и параметры в граничных условиях могут быть установлены из одного спектра и потенциалов, заданных на $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

MSC2020 numbers: 34A37; 65L09; 47A10.
Ключевые слова: обратная задача; пучок; импульсный; спектр.

1. Введение

Теория обратных задач для дифференциальных операторов играет важную роль в развитии спектральной теории. Обратные задачи спектрального анализа заключаются в восстановлении операторов по их спектральным данным, таким как спектр, нормирующие константы, функция Вейля, спектральная функция и узловые точки. Наиболее полное описание этой теории и ее применений можно найти в математике, математической физике, электронике, квантовой механике, геофизике и т. д. (подробнее см. [1] – [4]).

В данной статье мы рассматриваем краевую задачу $L(p, q, h, H, \omega_1, \omega_2)$,

$$-y'' + (2\rho p(x) + q(x))y = \lambda r(x)y, \quad x \in (0, 1), \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \qquad V(y) := y'(1) + Hy(1) = 0, \tag{1.2}$$

где $p(x) \in W_2^1(0, 1)$, $q(x) \in L_2(0, 1)$- функции с действительными значениями и $\lambda = \rho^2$ — спектральный параметр. Пусть $r(x) = \omega_1^2$ для $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $r(x) = \omega_2^2$ для $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Также параметры h и H являются действительными.

[1]Финансовую поддержку данного исследования оказал Иранский университет сельскохозяйственных наук и природных ресурсов в рамках исследовательского проекта № 03-1401-10

Обратные спектральные задачи, восстанавливающие операторы из их спектральных данных, разделяются на два класса: обратные задачи о собственных значениях и обратные задачи об узлах. Обратные собственные задачи для операторов Штурма-Лиувилля различных типов изучались многими исследователями [5] – [9]. В этих исследованиях авторы в последние годы изучали внутренние обратные задачи для операторов Штурма-Лиувилля как эффективный метод . Этот метод изучается с учетом свойства собственных функций в середине интервала и произвольной точке в первой или второй половине интервала [10] – [13]. Полуобратные задачи также используются для реконструкции оператора по одному спектру и известным потенциалам на половине интервала [14, 15]. В данной работе мы рассматриваем импульсный дифференциальный пучок и приводим новый результат о внутренних обратных задачах, когда свойство собственных функций рассматривается в произвольной точке во второй половине интервала. Мы также приводим полуобратные задачи, когда потенциальные функции известны во второй половине интервала. Наличие импульса и пучка приводит к существенным качественным изменениям в задаче и появлению интересных результатов. Действительно, полученные результаты являются обобщением классического оператора Штурма-Лиувилля с использованием метода Мочидзуки-Трушина [16] и метода Хохштата-Либермана [17].

В данной статье мы изучаем внутреннюю и полуобратную задачи для L. В Разделе 2 изучаются некоторые важные свойства собственных значений. В Разделе 3 доказывается теорема единственности внутренней обратной задачи. В Разделе 4 приводится теорема единственности полуобратной задачи.

2. Предварительные сведения

Пусть $y(x,\rho)$ — решение уравнения (1.1) при условиях $y(0,\rho)=1$ и $y'(0,\rho)=h$. Для каждого фиксированного $x\in(0,1)$, эта функция и ее производная по x являются полными в ρ. Из [18, 19], мы получаем следующее интегральное представление для ограниченных функций $A(x,t)$ и $B(x,t)$,

$$y(x,\rho)=y_0(x,\rho)+\int_0^x A(x,t)\cos\rho\omega_1 t dt+\int_0^x B(x,t)\sin\rho\omega_1 t dt, \tag{2.1}$$

где

$$y_0(x,\rho)=\begin{cases}\cos\left(\rho\omega_1 x-\frac{Q_+(x)}{\omega_1}\right), & x<\frac{1}{2},\\ \frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\cos\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\omega_2 x\right)-\frac{Q_+(x)}{\omega_2}\right) & \\ +\frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\cos\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\omega_2 x\right)+\frac{Q_-(x)}{\omega_2}\right), & x>\frac{1}{2},\end{cases}$$

где $Q_+(x) = \int_0^x p(t)dt$ и $Q_-(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x p(t)dt$. Для достаточно большого ρ мы можем вывести решение (1.1) , удовлетворяющее (1.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} y(x,\rho) &= \cos\left(\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)}{\omega_1}\right) \\ &+ \left(2h + \frac{1}{\omega_1}\int_0^x (q(t)+p^2(t))dt\right)\frac{\sin\left(\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)}{\omega_1}\right)}{2\rho} \\ &+ o\left(\frac{1}{\rho}\exp(|\Im\rho|\omega_1 x)\right), \qquad x < \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} y(x,\rho) &= \frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\cos\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\omega_2 x\right) - \frac{Q_+(x)}{\omega_2}\right) \\ &+ \frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\cos\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\omega_2 x\right) + \frac{Q_-(x)}{\omega_2}\right) \\ &+ \frac{\omega_2+\omega_1}{2\omega_2}\left(2h + \frac{1}{\omega_1}\int_0^x (q(t)+p^2(t))dt\right) \\ &\qquad \times \frac{\sin\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\omega_2 x\right) - \frac{Q_+(x)}{\omega_2}\right)}{2\rho} \\ &+ \frac{\omega_2-\omega_1}{2\omega_2}\left(2h - \frac{1}{\omega_2}\int_{\frac{1}{2}}^x (q(t)+p^2(t))dt + \frac{1}{\omega_1}\int_0^{\frac{1}{2}} (q(t)+p^2(t))dt\right) \\ &\qquad \times \frac{\sin\left(\rho\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\omega_2 x\right) + \frac{Q_-(x)}{\omega_2}\right)}{2\rho} \\ &+ o\left(\frac{1}{\rho}\exp\left(|\Im\rho|\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\omega_2 x\right)\right)\right), \qquad x > \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Собственные значения ρ_n из L совпадают с нулями его характеристической функции [20]. Обозначим всю функцию

$$\Delta(\rho) := V(y(x,\rho)), \tag{2.4}$$

как характеристическую функцию L. Мы отметим, что на протяжении всей статьи функция $y_n(x) := y(x,\rho_n)$, соответствующая собственным значениям ρ_n, называется собственной функцией L.

Теперь, используя (1.2), (2.3) и (2.4), мы можем для достаточно больших ρ,

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) = \frac{\rho}{2}&\left((\omega_2-\omega_1)\sin\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\rho + \frac{Q_-(1)}{\omega_2}\right)\right. \\ &\left. -(\omega_2+\omega_1)\sin\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\rho - \frac{Q_+(1)}{\omega_2}\right)\right) + O\left(\exp\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)|\Im\rho|\right)\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

и тогда собственные значения ρ_n,

$$\rho_n = \frac{1}{\omega_1+\omega_2}\left(2n\pi + \frac{2Q_+(1)}{\omega_2}\right) + O(n^{-1}), \tag{2.6}$$

для достаточно больших n.

Для изучения обратной задачи для импульсного дифференциального пучка (1.1)-(1.2), в дополнение к краевой задаче $L = L(p, q, h, H, \omega_1, \omega_2)$, мы рассмотрим краевую задачу $\widetilde{L} = L(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{h}, \widetilde{H}, \omega_1, \omega_2)$ аналогичной формы, но с другими коэффициентами.

3. Внутренняя обратная задача

В этом разделе мы представим теорему Мочидзуки-Трушина в виде так называемой внутренней обратной задачи в точке $x = b \neq \frac{1}{2}$. Когда $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, мы устанавливаем теорему единственности краевой задачи L из частей двух спектров и некоторой информации о собственных функциях. Когда $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, симметрично, мы можем получить теорему единственности для L, которая поэтому здесь не рассматривается.

Рассмотрим последовательности $l(n)$, $r(n)$ неотрицательных целых чисел, таких что

$$l(n) = \frac{n}{\sigma_1}(1 + \epsilon_{1n}), \quad 0 < \sigma_1 \leq 1, \quad \epsilon_{1n} \longrightarrow 0,$$
$$r(n) = \frac{n}{\sigma_2}(1 + \epsilon_{2n}), \quad 0 < \sigma_2 \leq 1, \quad \epsilon_{2n} \longrightarrow 0,$$

и пусть μ_n будут собственными значениями L_1 для (1.1) вместе с (1.2) таким образом, что $V(y) = y'(1) + H_1 y(1) = 0$, поскольку $H_1 \neq H, H_1 \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.1. *Пусть $l(n)$ и $r(n)$ такие, что $\sigma_1 > \frac{4b}{\omega_1+\omega_2} - 1$ и $\sigma_2 > 2 - \frac{4b}{\omega_1+\omega_2}$, а $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Пусть для натуральных чисел n,*

$$\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n, \quad \mu_{l(n)} = \widetilde{\mu}_{l(n)},$$

$$< y_{r(n)}(x), \widetilde{y}_{r(n)}(x) >_{x=b} = 0,$$

тогда $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $(0, 1)$ и $(h, H) = (\widetilde{h}, \widetilde{H})$.

Лемма 3.1. *Рассмотрим последовательность натуральных чисел*

$$m(n) = \frac{n}{\sigma}(1 + \epsilon_n), \quad 0 < \sigma \leq 1, \quad \epsilon_n \longrightarrow 0.$$

(1) Пусть $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ такое, что $\sigma > \frac{4b}{\omega_1+\omega_2}$. Если для натуральных чисел n,

$$\lambda_{m(n)} = \widetilde{\lambda}_{m(n)}, \quad < y_{m(n)}(x), \widetilde{y}_{m(n)}(x) >_{x=b} = 0,$$

то $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $[0, b]$ и $h = \widetilde{h}$.
(2) Пусть $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ такое, что $\sigma > 2 - \frac{4b}{\omega_1+\omega_2}$. Если для натуральных чисел n, $\lambda_{m(n)} = \widetilde{\lambda}_{m(n)}$, $\quad < y_{m(n)}(x), \widetilde{y}_{m(n)}(x) >_{x=b} = 0$, то $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $[b, 1]$ и $H = \widetilde{H}$.

Доказательство. Пусть $y(x,\rho)$ является решением

$$-y''(x,\rho)+(2\rho p(x)+q(x))y(x,\rho)=\lambda r(x)y(x,\rho),\quad y(0,\rho)=1,\quad y'(0,\rho)=h, \tag{3.1}$$

и $\widetilde{y}(x,\rho)$ является решением

$$-\widetilde{y}''(x,\rho)+(2\rho\widetilde{p}(x)+\widetilde{q}(x))\widetilde{y}(x,\rho)=\lambda r(x)\widetilde{y}(x,\rho),\quad \widetilde{y}(0,\rho)=1,\quad \widetilde{y}'(0,\rho)=\widetilde{h}. \tag{3.2}$$

Если умножить (3.1) на $\widetilde{y}(x,\rho)$ и (3.2) на $y(x,\rho)$, а затем вычесть, получим

$$\Big(2\rho\big(p(x)-\widetilde{p}(x)\big)+\big(q(x)-\widetilde{q}(x)\big)\Big)y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)=y''(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)-y(x,\rho)\widetilde{y}''(x,\rho). \tag{3.3}$$

Интегрируя (3.3) на $[0,b]$, , мы можем записать

$$\begin{aligned} H_b(\rho) \;&:=\; \int_0^b \big(2\rho P(x)+Q(x)\big)y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)dx+h-\widetilde{h} \\ &= y'(b,\rho)\widetilde{y}(b,\rho)-y(b,\rho)\widetilde{y}'(b,\rho), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $P(x)=p(x)-\widetilde{p}(x)$ и $Q(x)=q(x)-\widetilde{q}(x)$. Предположение теоремы дает, что $H_b(\rho_{m(n)})=0$. Теперь мы должны доказать, что $H_b(\rho)=0$ для других значений ρ в комплексной плоскости.

Используя (2.1), мы получим для ограниченных функций $A'(x,t)$ и $B'(x,t)$,

$$\begin{aligned} y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho) \;&=\; \frac{1}{2}\left(\cos\left(2\rho\omega_1 x-\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)+\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\right) \\ &+\frac{1}{2}\int_0^x A'(x,t)\cos\left(2\rho\omega_1 t-\frac{Q_+(t)+\widetilde{Q}_+(t)}{\omega_1}\right)dt \\ &-\frac{1}{2}\int_0^x B'(x,t)\sin\left(2\rho\omega_1 t-\frac{Q_+(t)+\widetilde{Q}_+(t)}{\omega_1}\right)dt, \qquad x<\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Следовательно, для константы $M_1>0$,

$$|y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)|\le M_1\exp(2|\Im\rho|\omega_1 x), \tag{3.6}$$

которое приводит к тому, что

$$|H_b(\rho)|\le M_2\rho\exp(2br|sin\theta|\omega_1), \tag{3.7}$$

для некоторой константы $M_2>0$. Пусть $h(\theta)$ будет индикатором $H_b(\rho)$ как

$$h(\theta):=\limsup_{r\to\infty}\frac{ln(|H_b(r\exp(i\theta))|)}{r}. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8), мы делаем вывод

$$h(\theta)\le 2b|sin\theta|\omega_1,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta \le \frac{b}{\pi}\int_0^{2\pi} |sin\theta| d\theta = \frac{4b}{\pi}. \tag{3.9}$$

Условия Леммы 3.1 и асимптотическая форма (2.6) дают, что для достаточно большого r,

$$n(r) \ge 2 \sum_{\frac{2n\pi}{\sigma(\omega_1+\omega_2)}(1+O(1))<r} 1 = \frac{r\sigma(\omega_1+\omega_2)}{\pi}[1+\epsilon(r)],$$

где $n(r)$ — количество корней $H_b(\rho)$ в диске $|\rho| \le r$ и $\epsilon(r)$ стремится к нулю. Поскольку $\sigma > \frac{4b}{\omega_1+\omega_2}$, получаем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r} \ge \frac{\sigma(\omega_1+\omega_2)}{\pi} \ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta. \tag{3.10}$$

Для любой полной функции $H_b(\rho)$ экспоненциального типа, не равной нулю, имеем [21],

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta. \tag{3.11}$$

Результаты (3.10) и (3.11) показывают, что $H_b(\rho) = 0$ во всей комплексной плоскости. Теперь, подставляя (3.5) в (3.4) и принимая $H_b(\rho) = 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^b Q(x)\left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right) + \cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\right)\right)dx \\
&+\int_0^b Q(x)\left(\int_0^x A'(x,t)\cos\rho\omega_1 t dt + \int_0^x B'(x,t)\sin\rho\omega_1 t dt\right)dx \\
&+\rho\int_0^b P(x)\left(\left(\cos\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right) + \cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\right)\right)dx \\
&+2\rho\int_0^b P(x)\left(\int_0^x A'(x,t)\cos\rho\omega_1 t dt + \int_0^x B'(x,t)\sin\rho\omega_1 t dt\right)dx + h - \widetilde{h} = 0.
\end{aligned}$$

Переписывая этот результат, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^b Q(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx + \rho\int_0^b P(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx \\
&+\int_0^b \cos\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t) + \int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)dt \\
&+\int_0^b \sin\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)dt \\
&+2\rho\int_0^b \cos\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t) + \int_t^{\frac{1}{2}} P(x)V_3(x,t)dx\right)dt \\
&+2\rho\int_0^b \sin\left(2\rho\omega_1 x - \frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)dt + h - \widetilde{h} = 0,
\end{aligned}$$

и тогда

$$
\begin{aligned}
h-\widetilde{h}+\frac{1}{2}\int_0^b Q(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx+\rho\int_0^b P(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx \\
+\int_0^b \cos(2\rho\omega_1 x)\left(\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^{\frac{1}{2}} Q(x)V_1(x,t)dx\right)\right. \\
\left.+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)\right)dt \\
+\int_0^b \sin(2\rho\omega_1 x)\left(\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)\right. \\
\left.+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)\right)dt \\
+2\rho\int_0^b \cos(2\rho\omega_1 x)\left(\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)\right. \\
\left.+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)\right)dt \\
+2\rho\int_0^b \sin(2\rho\omega_1 x)\left(\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)\right. \\
\left.+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)\right)dt=0.
\end{aligned}
$$

Лемма Римана-Лебега гласит, что для достаточно большого ρ,

$$
\begin{aligned}
\int_0^b \cos(2\rho\omega_1 x)\left(\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)\right. \\
\left.+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)\right)dt \\
+\int_0^b \sin(2\rho\omega_1 x)\left(\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)\right. \\
\left.+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)\right)dt \\
+2\rho\int_0^b \cos(2\rho\omega_1 x)\left(\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)\right. \\
\left.+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)\right)dt \\
+2\rho\int_0^b \sin(2\rho\omega_1 x)\left(\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)\Bigg)dt=0,$$

и

$$\int_0^b P(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx=0,$$

$$h-\widetilde{h}+\frac{1}{2}\int_0^b Q(x)\cos\left(\frac{Q_+(x)-\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)dx=0. \tag{3.12}$$

Из полноты функции "$(\cos,\sin)$"в $\left(L_2\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)^2$ следует, что для достаточно большого ρ,

$$\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)$$
$$+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)=0,$$
$$\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx\right)$$
$$+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx\right)=0,$$
$$\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)$$
$$+\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)=0,$$
$$\sin\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\frac{1}{2}P(t)+\int_t^b P(x)V_3(x,t)dx\right)$$
$$+\cos\left(\frac{Q_+(x)+\widetilde{Q}_+(x)}{\omega_1}\right)\left(\int_t^b P(x)V_4(x,t)dx\right)=0,$$

поэтому мы будем иметь однородные интегральные уравнения Вольтерры

$$\frac{1}{2}Q(t)+\int_t^b Q(x)V_1(x,t)dx=0,\quad \int_t^b Q(x)V_2(x,t)dx=0,$$
$$\frac{1}{2}P(t)+\int_t^{\frac{1}{2}} P(x)V_3(x,t)dx=0,\quad \int_t^b P(x)V_4(x,t)dx=0.$$

Эти уравнения подразумевают, что $P(x)=Q(x)=0,\ x\in[0,b]$. Следовательно, $(p(x),q(x))=(\widetilde{p}(x),\widetilde{q}(x))$ п.в. на $[0,b]$. Кроме того, из (3.12) следует, что $h=\widetilde{h}$.

Чтобы доказать условие (2), мы должны рассмотреть вспомогательную задачу $\widehat{L}$,

$$\begin{gathered}-y'' + (2\rho p(1-x) + q(1-x))y = \lambda r(1-x)y, \quad x \in (0,1),\\ U(y) := y'(0) - Hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(1) + hy(1) = 0,\end{gathered}$$

и следует провести аналогичное обсуждение. Путем преобразования переменной $x \to 1-x$, поскольку $1-b \in (0, \frac{1}{2})$, условия (1) выполняются. Таким образом, $P(1-x) = Q(1-x) = 0,\ x \in [0, 1-b]$, и тогда $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $[b,1]$ и $H = \widetilde{H}$. Доказательство завершено.

Доказательство Теоремы 3.1. Предположение $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, а затем равенство $\lambda_{r(n)} = \widetilde{\lambda}_{r(n)}$ вместе с $< y_{r(n)}, \widetilde{y}_{r(n)} >_{x=b} = 0$ удовлетворяет Лемме 3.1. Таким образом, $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ для $x \in [b,1]$ и $H = \widetilde{H}$. Достаточно доказать, что $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ для $x \in [0,b]$ и $h = \widetilde{h}$.

Рассмотрим (3.4) для $b \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_b(\rho) \ &:= \int_0^b \big(2\rho P(x) + Q(x)\big) y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)dx + h - \widetilde{h}\\ &= y'(b,\rho)\widetilde{y}(b,\rho) - y(b,\rho)\widetilde{y}'(b,\rho).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Равенство $y_n(x)$ и $\widetilde{y}_n(x)$ в точке $x=1$ и $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ в $x \in [b,1]$ приводят к тому, что

$$y_n(x) = \alpha_n \widetilde{y}_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \ \text{Конст. } \alpha_n > 0, \ x \in [b,1]. \tag{3.14}$$

Из соотношений (3.13) и (3.14) следует, что $\mathcal{H}_b(\lambda_n) = 0$. Аналогично, мы получим, что $\mathcal{H}_b(\mu_{l(n)}) = 0$.

Существует $1 + \frac{r(\omega_1+\omega_2)}{\pi}[1 + O(n^{-1})]$ из λ_n и $1 + \frac{r\sigma_1(\omega_1+\omega_2)}{\pi}[1+O(n^{-1})]$ из $\mu_{l(n)}$ внутри диска радиуса r. Таким образом, их сумма равна $n(r) = 2 + \frac{r(\omega_1+\omega_2)}{\pi}[1 + \sigma_1 + O(n^{-1})]$. Используя $\sigma_1 > \frac{4b}{\omega_1+\omega_2} - 1$, имеем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} \geq \frac{(\omega_1+\omega_2)(1+\sigma_1)}{\pi} \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta. \tag{3.15}$$

Мы также можем записать для любой полной функции $\mathcal{H}_b(\lambda)$ экспоненциального типа, не равной нулю [21],

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta. \tag{3.16}$$

Из (3.15) и (3.16), получаем, что $\mathcal{H}_b(\lambda) = 0$.

Полученный результат $\mathcal{H}_b(\lambda) = 0$ и аналогичное доказательство Леммы 3.1 помогают нам доказать, что $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $[0,b]$ и $h = \widetilde{h}$.

4. Полуобратная задача

Теперь мы представим теорему Хохштата-Либермана в виде так называемой полуобратной задачи.

Теорема 4.1. *Если* $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ *для натуральных чисел* n, $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ *на* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *и* $H = \widetilde{H}$ *, то для* $\omega_2 > \omega_1$, *имеем* $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ *п.в. на* $(0, 1)$ *и* $h = \widetilde{h}$.

Доказательство. Интегрируя (3.3) на $[0, 1]$, мы получим

$$\int_0^1 \big(2\rho P(x) + Q(x)\big) y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)dx = (y'(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho) - y(x,\rho)\widetilde{y}'(x,\rho))|_{x=0}^{x=1}.$$

Принимая гипотезу теоремы, получим

$$\begin{aligned} H(\rho) \quad &:= \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \big(2\rho P(x) + Q(x)\big) y(x,\rho)\widetilde{y}(x,\rho)dx + h - \widetilde{h} \\ &= y'(1,\rho)\widetilde{y}(1,\rho) - y(1,\rho)\widetilde{y}'(1,\rho). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Свойства функций $y(x, \rho)$ и $\widetilde{y}(x, \rho)$ и второе граничное условие в (1.2) приводят к тому, что $H(\rho_n) = 0$. Далее мы докажем, что $H(\rho) = 0$ для всех ρ.
Из (3.6) и (4.1) следует, что

$$|H(\rho)| \leq C|\rho| \exp\left(|\Im\rho|\omega_1\right), \tag{4.2}$$

для некоторой константы $C > 0$. Также, используя (2.5), получаем

$$|\Delta(\rho)| \geq C_\delta |\rho| \exp\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)|\Im\rho|\right), \quad \rho \in G_\delta, \tag{4.3}$$

учитывая $G_\delta := \{\rho \in \mathbb{C};\, |\ \rho - \rho_n\ | \geq \delta,\ \forall n\}$ для фиксированного $\delta > 0$ и некоторой константы $C_\delta > 0$. Теперь, подставив

$$\phi(\rho) = \frac{H(\rho)}{\Delta(\rho)}, \tag{4.4}$$

и взяв (4.2) и (4.3), получим, что $\phi(\rho) = 0$ для всех ρ, и тогда $H(\rho) = 0$.

Теперь, по аналогии с Леммой 3.1, можем показать, что $(p(x), q(x)) = (\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(x))$ п.в. на $[0, 1]$ и $h = \widetilde{h}$. Теорема доказана. □

Abstract. In this work, an inverse problem for the quadratic pencil of the Sturm-Liouville operator with an impulse in the finite interval is considered. It is shown that some information on eigenfunctions at some internal point $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and parts of two spectra uniquely determine the potential functions and all parameters in the boundary conditions. Moreover we prove that the potential functions on the whole interval and the parameters in the boundary conditions can be established from one spectrum and the potentials prescribed on $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Список литературы

[1] H. Koyunbakan, “The inverse nodal problem for a differential operator with an eigenvalue in the boundary condition”, Appl. Math. Lett. **21**, 1301 – 1305 (2008).

[2] R. J. Kruger, “Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties”, J. Mathematical Physics **23**, 396 – 404 (1982).

[3] F. R. Lapwood and T. Usami, Free Oscillation of the Earth, Cambridge University Press, Cambridge (1981).

[4] A. Neamaty and Y. Khalili, “The eigenvalue problems for dierential equations with jump condition and turning point”, Far East J. Mathematical Sciences, **37**, 1 – 7 (2020).

[5] S. Mosazadeh, “Reconstruction of singular second-order differential equations from spectral characteristics”, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, **35**, 645 – 654 (2019).

[6] A. S. Ozkan and B. Keskin, “Spectral problems for Sturm-Liouville operator with boundary and jump conditions linearly dependent on the eigenparameter”, Inve. Probl. Sci. Eng. **20**, 799 – 808 (2012).

[7] Y.P. Wang, “Uniqueness theorems for Sturm-Liouville operators with boundary conditions polynomially dependent on the eigenparameter from spectral data”, Results Math. **63**, 1131 – 1144 (2013).

[8] Y. P. Wang, C. F. Yang and Z. Y. Huang, “Half inverse problem for Sturm-Liouville operators with boundary conditions dependent on the spectral parameter”, Turk. J. Math. **37**, 445 – 454 (2013).

[9] V. A. Yurko, “Inverse problem for quasi-periodic differential pencils with jump conditions inside the interval”, Complex Anal. Oper. Theory **10**, 1203 – 1212 (2016).

[10] Y. Khalili and N. Kadkhoda, “The interior inverse problem for the impulsive Sturm-Liouville equation”, Analysis and Mathematical Physics **10**, 1 – 10 (2020).

[11] Y. P. Wang, “An interior inverse problem for Sturm–Liouville operators with eigenparameter dependent boundary conditions”, Tamkang J. Math. **42**, 395 – 403 (2011).

[12] Y. P. Wang, “Inverse problems for Sturm-Liouville operators with interior discontinuities and boundary conditions dependent on the spectral parameter”, Math. Meth. Appl. Sci., **36**, 857 – 868 (2013).

[13] C. F. Yang and Y. X. Guo, “Determination of a differential pencil from interior spectral data”, J. Math. Anal. Appl., **375**, 284 – 293 (2011).

[14] Y. Cakmak and S. Isık, “Half inverse problem for the impulsive diffusion operator with discontinuous coefficient”, Filomat **30**, 157 – 168 (2016).

[15] H. Koyunbakan and E. Panakhov, “Half-inverse problem for diffusion operators on the finite interval”, J. Mathematical Analysis and Applications, **326**, 1024 – 1030 (2007).

[16] K. Mochizuki and I. Trooshin, “Inverse problem for interior spectral data of Sturm-Liouville operator”, J. Inverse Ill-Posed Problems **9**, 425 – 433 (2001).

[17] H. Hochstadt and B. Lieberman, “An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data”, SIAM J. Appl. Math. **34**, 676-680 (1978).

[18] R. K. Amirov and A. A. Nabiev, “Inverse problems for the quadratic pencil of the Sturm–Liouville equations with impulse”, Abstr. Appl. Anal. **2013**, Article ID 361989 (2013).

[19] Y. Khalili, N. Kadkhoda and D. Baleanu, “Inverse problems for the impulsive Sturm–Liouville operator with jump conditions”, Inve. Probl. Sci. Eng. **27**, 1442 – 1450 (2019).

[20] G. Freiling and V.A. Yurko, Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications, NOVA Scince Publ., New York (2001).

[21] B. Ja. Levin, Distribution of Zeros of Entire Functions, AMS Transl., **5**, AMS, Providence (1964).

Поступила 20 ноября 2024

После доработки 19 февраля 2025

Принята к публикации 21 февраля 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 5, 2025, стр. 46 – 58.

ПОЛНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВЫВЕДЕННЫЕ ИЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТОЖДЕСТВ

М.-Ф. ЧЕН, С.-М. ХУАН

Гуандунский университет иностранных языков, Гуанчжоу, КНР[1]
Гуандунский технологический университет, Гуанчжоу, КНР
E-mails: *chenminfeng198710@126.com; mahuangxm@gdut.edu.cn*

АННОТАЦИЯ. В данной работе мы изучаем все решения нелинейных дифференциальных уравнений, связанных с тригонометрическими тождествами. Наши результаты улучшают результаты, полученные Чжаном и др. (Appl. Math. J. Chin. Univ. 28(2): 138–146, 2013) и Гундерсеном и др. (J. Math. Anal. Appl. 507: 125788, 2022). Кроме того, мы подтверждаем некоторые гипотезы, выдвинутые Гао и др. (Mediterr. J. Math. 20: 167, 2023). Наконец, ставим некоторые открытые вопросы.

MSC2020 numbers: 34M05; 30D35.

Ключевые слова: Теория Неванлинна; полное решение; нелинейное дифференциальное уравнение.

1. Введение и основные результаты

Для комплексных дифференциальных уравнений важной и сложной задачей является доказательство существования их решений. В 2004 году Ян и Ли [1] показали, что дифференциальное уравнение $4f^3 + 3f'' = -\sin 3z$, полученное из тригонометрического тождества $\sin 3z = 3\sin z - 4(\sin z)^3$, имеет ровно три полных решения, а именно $f_1(z) = \sin z$, $f_2(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos z - \frac{1}{2}\sin z$ и $f_3(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z - \frac{1}{2}\sin z$. Впоследствии Ли [2] получил более общий результат.

Теорема A.[2] *Пусть $n \geq 2$ — целое число, $P(z, f)$ — дифференциальный многочлен в $f(z)$ со степенью не более $n-2$, а $p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2$ — ненулевые константы, причем $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Если $f(z)$ является трансцендентным мероморфным решением следующего уравнения*

$$f^n(z) + P(z, f) = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}, \tag{1.1}$$

[1]Исследование было поддержано Национальным фондом естественных наук Китая (№ 12001117, 12101138), Фондом фундаментальных и прикладных фундаментальных исследований провинции Гуандун (№ 2021A1515110654).

и удовлетворяет условию $N(r,f) = S(r,f)$, то выполняется одно из следующих условий:
(i) $f(z) = \gamma_0(z) + \gamma_1 e^{\alpha_1 z/n}$;
(ii) $f(z) = \gamma_0(z) + \gamma_2 e^{\alpha_2 z/n}$;
(iii) $f(z) = \gamma_1 e^{\alpha_1 z/n} + \gamma_2 e^{\alpha_2 z/n}$ *и* $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$,
где $\gamma_0(z)$ — малая функция от $f(z)$, а γ_1, γ_2 — константы, удовлетворяющие условию $\gamma_i^n = p_i, i = 1, 2$.

В последнее время многие ученые уделяют внимание изучению мероморфных решений нелинейного дифференциального уравнения (1.1), см. [3] – [8]. В 2013 году Чжан и Йи [9] получили следующие результаты, связанные с хорошо известным тригонометрическим тождеством $(\sin^2 z)' = \sin 2z$.

Теорема Б.[9] *Пусть $k \geq 1$ — целое число, $p(z)$ - многочлен. Дифференциальное уравнение*

$$(f^2(z))^{(k)} = \sin 2z + p(z), \tag{1.2}$$

имеет полные решения следующих форм:

$$f_{1,2}(z) = \pm 2^{\frac{1-k}{2}} \cos\left(z - \frac{k+1}{4}\pi\right), f_{3,4}(z) = \pm i 2^{\frac{1-k}{2}} \sin\left(z - \frac{k+1}{4}\pi\right)$$

тогда и только тогда, когда $p(z) \equiv 0$.

Кроме того, они рассмотрели нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$(f^n(z))^{(k)} = \sin mz + p(z), \tag{1.3}$$

где $n \geq 3$, k и m — положительные целые числа, $p(z)$ — многочлен. Они получили

Теорема В.[9] *Не существует мероморфных решений уравнения* (1.3).

Заметим, что $\sin mz$ является линейной комбинацией e^{imz} и e^{-imz}. С этой точки зрения мы докажем следующие два результата, которые являются обобщениями теорем Б и В соответственно.

Теорема 1.1. *Пусть $k \geq 1$ — целое число, p_j, α_j $(j = 1, 2)$ — ненулевые константы, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $p(z)$ — многочлен. Если $f(z)$ — трансцендентное мероморфное решение следующего уравнения*

$$(f^2(z))^{(k)} = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z} + p(z), \tag{1.4}$$

тогда $p(z) \equiv 0$ и выполняется одно из следующих условий:
(i) $f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{2} z}$, $\alpha_1 = 2\alpha_2$, $\gamma_0^2 = \frac{2^{2k-2} p_2^2}{p_1 \alpha_1^k}$, $\gamma_1^2 = \frac{p_1}{\alpha_1^k}$;
(ii) $f(z) = \gamma_0 + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{2} z}$, $\alpha_2 = 2\alpha_1$, $\gamma_0^2 = \frac{2^{2k-2} p_1^2}{p_2 \alpha_2^k}$, $\gamma_2^2 = \frac{p_2}{\alpha_2^k}$;
(iii) $f(z) = \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{2} z} + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{2} z}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\gamma_j^2 = \frac{p_j}{\alpha_j^k}$, $j = 1, 2$.

Теорема 1.2. *Не существует мероморфных решений уравнения*

$$(f^n(z))^{(k)} = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z} + p(z), \tag{1.5}$$

где $n \geq 3$, k — положительные целые числа, p_j, α_j $(j = 1, 2)$ — ненулевые константы, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $p(z)$ — многочлен.

В 2022 году Гундерсен и др. [10] рассмотрели полные решения биномиального дифференциального уравнения, которое связано с известным тригонометрическим тождеством $\cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z$.

Теорема Г.[10] *Единственные полные решения дифференциального уравнения*

$$(f(z))^2 - (f'(z))^2 = \cos 2z \tag{1.6}$$

являются следующие четыре решения $f(z) = \pm\cos z, \pm\sin z$.

Вскоре после этого Гао и др. [11] исследовали более общее биномиальное дифференциальное уравнение, чем (1.6) , и получили следующий результат.

Теорема Д. [11] *Пусть a, p_1, p_2 и λ — ненулевые константы, удовлетворяющие условию $9a\lambda^2 + 4 \neq 0$. Тогда уравнение*

$$(f(z))^2 + a(f'(z))^2 = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z} \tag{1.7}$$

имеет полные решения тогда и только тогда, когда выполняется условие $a\lambda^2 + 1 = 0$ или $a\lambda^2 - 4 = 0$. Кроме того,

(i) Если $a\lambda^2 + 1 = 0$, то полными решениями уравнения (1.7) являются

$$f(z) = r_i e^{\lambda z} + s_i e^{-\lambda z} + t_i,$$

где $t_i (i = 1, 2, 3, 4)$ — четыре корня уравнения $t^4 + p_1 p_2 = 0$, $r_i = \frac{p_1}{2t_i}$ и $s_i = \frac{p_2}{2t_i}$.

(ii) Если $a\lambda^2 - 4 = 0$, то полными решениями уравнения (1.7) являются

$$f(z) = a_i e^{\frac{\lambda}{2} z} + b_j e^{-\frac{\lambda}{2} z},$$

где $a_i (i = 1, 2)$ являются квадратными корнями из $\frac{p_1}{2}$ и $b_j (j = 1, 2)$ — квадратные корни из $\frac{p_2}{2}$.

Примечание 1.1. Условие $9a\lambda^2 + 4 \neq 0$ в Теореме Д является необходимым. Например, пусть $a = -1$ и $\lambda = \frac{2}{3}$ в $9a\lambda^2 + 4 = 0$. Тогда $f(z) = \pm(e^{\frac{1}{3}z} + e^{-z})$ являются решениями уравнения $(f(z))^2 - (f'(z))^2 = \frac{8}{9} e^{\frac{2}{3}z} + \frac{8}{3} e^{-\frac{2}{3}z}$. Они выдвинули следующую гипотезу.

Гипотеза Е.[11] *Полные решения уравнения*

$$(f(z))^2 - \frac{4}{9\lambda^2}(f'(z))^2 = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z} \tag{1.8}$$

являются $f_i(z) = a_i e^{\frac{\lambda}{2}z} + b_i e^{-\frac{3\lambda}{2}z}$ *и* $f_j(z) = a_j e^{-\frac{\lambda}{2}z} + b_j e^{\frac{3\lambda}{2}z}$*, где* λ, p_1, p_2 *— ненулевые константы,* a_i *— квадратные корни из* $\frac{9}{8}p_1$*,* $b_i = \frac{p_2}{3p_1}a_i$*,* $i = 1, 2$ *и* b_j *— квадратные корни из* $\frac{9}{8}p_2$*,* $a_j = \frac{p_1}{3p_2}b_j$*,* $j = 3, 4$*.*

Кроме того, в конце они выдвинули еще одно предположение. [11].

Гипотеза Ж.[11] *Пусть* $n \geq 5$*,* k *— положительные целые числа,* a, p_i *и* $\alpha_i (i = 1, 2)$ *— ненулевые константы с* $\alpha_1 \neq \alpha_2$*. Тогда* $(f(z))^n + a(f^{(k)}(z))^n = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}$ *не существует полного решения.*

В данной статье мы исследуем две гипотезы, подтверждаем гипотезу Е и частично доказываем гипотезу Ж.

Теорема 1.3. *Полные решения уравенения* (1.8) *являются* $f(z) = \mu_1 e^{\frac{\lambda}{2}z} + \mu_2 e^{-\frac{3\lambda}{2}z}$ *и* $f(z) = \nu_1 e^{-\frac{\lambda}{2}z} + \nu_2 e^{\frac{3\lambda}{2}z}$*, где* $\mu_1^2 = \frac{9}{8}p_1$*,* $\mu_1\mu_2 = \frac{3}{8}p_2$*, и* $\nu_1^2 = \frac{9}{8}p_2$*,* $\nu_1\nu_2 = \frac{3}{8}p_1$*.*

Теорема 1.4. *Пусть* $n \geq 4$ *— целое число,* a, λ *и* $p_i (i = 1, 2)$ *— ненулевые константы. Тогда уравнение*

$$(f(z))^n + a(f'(z))^n = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z} \tag{1.9}$$

имеет полные решения тогда и только тогда, когда $n = 4$*. Более того,* $f(z)$ *имеет вид* $f(z) = \gamma_1 e^{\frac{\lambda}{2}z} + \gamma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}z}$*, где* $\lambda^4 = -\frac{16}{a}$*,* γ_1, γ_2 *— константы , удовлетворяющие* $8\gamma_1^3\gamma_2 = p_1$*,* $8\gamma_1\gamma_2^3 = p_2$*.*

Примечание 1.2. Из Теоремы 1.4, видно, что наш результат обобщает Теорему 7 из [11] и частично является ответом на гипотезу Ж. Но, к сожалению, мы не рассматриваем случай, когда $n = 3$, поскольку его невозможно доказать нашим методом. Однако мы подозреваем, что для этого случая не существует полного решения. Здесь мы выдвигаем следующую гипотезу.

Гипотеза 1.1. *Пусть* k *— положительное целое число,* a, λ *и* $p_i (i = 1, 2)$ *— ненулевые константы. Тогда не существует полного решения уравнения* $(f(z))^3 + a(f^{(k)}(z))^3 = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z}$*.*

В сочетании с Теоремой 1.4, мы также предлагаем следующую гипотезу.

Гипотеза 1.2. *Пусть* $n \geq 5$*,* k *— положительные целые числа,* a, p_i *и* $\alpha_i (i = 1, 2)$ *— ненулевые константы с* $\alpha_1 \pm \alpha_2 \neq 0$*. Тогда не существует полного решения уравнения* $(f(z))^n + a(f^{(k)}(z))^n = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}$*.*

Наконец, рассмотрим следующее уравнение:

$$(f(z))^3 + a(f^{(k)}(z))^3 = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}, \tag{1.10}$$

где k — положительное целое число, a, p_i и $\alpha_i (i = 1, 2)$ — ненулевые константы с $\alpha_1 \pm \alpha_2 \neq 0$.

Пример 1.1. $f(z) = e^{(-1+\sqrt{3}i)z} + e^{2z}$ является полным решением

$$(f(z))^3 - \frac{1}{8}(f'(z))^3 = \frac{3(3+\sqrt{3}i)}{2}e^{2\sqrt{3}iz} + \frac{3(3-\sqrt{3}i)}{2}e^{(3+\sqrt{3}i)z}.$$

Пример 1.2. $f(z) = e^{(1+\sqrt{3}i)z} + e^{2z}$ является полным решением

$$(f(z))^3 - \frac{1}{64}(f''(z))^3 = \frac{3(3+\sqrt{3}i)}{2}e^{(4+2\sqrt{3}i)z} + \frac{3(3-\sqrt{3}i)}{2}e^{(5+\sqrt{3}i)z}.$$

Рассматривая два приведенных выше примера, мы видим, что уравнение (1.10) имеет полное решение. Исходя из этого, мы задаем следующий вопрос.

Вопрос 1.1. *Как найти все полные решения уравнения* (1.10)*?*

В данной статье мы в основном используем теорию Неванлинны для доказательства наших результатов. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными результатами и стандартными обозначениями теории Неванлинны [12] – [14], такими как $T(r, f)$, $m(r, f)$, $N(r, f)$ и т.д. Для простоты обозначим через $S(r, f)$ любую величину, удовлетворяющую условию $S(r, f) = o(T(r, f))$, при $r \to \infty$, за исключением, возможно, множества конечной логарифмической меры. Также через $\rho(f)$ обозначим порядок полной функции f.

2. Некоторые Леммы

Лемма 2.1. *(*[15, Лемма 2.4]*) Пусть* $n \geq 2$ *— целое число,* α_j $(j = 1, 2)$ *— различные ненулевые константы, а* p_j $(j = 1, 2)$ *— ненулевые мероморфные функции. Тогда уравнение*

$$f^n(z) = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}$$

не может иметь мероморфного решения f *такого, что* $T(r, p_j) = S(r, f)$ $(j = 1, 2)$.

Лемма 2.2. *(*[16, Теорема 1.51]*) Предположим, что* $f_1, f_2, \ldots, f_n (n \geq 2)$ *являются мероморфными функциями, и* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *— полными функциями, удовлетворяющими следующим условиям:*

(1) $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j e^{g_j} \equiv 0$.

(2) $g_j - g_k$ *не являются константами для* $1 \leq j < k \leq n$.

(3) *Для* $1 \leq j \leq n, 1 \leq h < k \leq n$,

$$T(r, f_j) = o(T(r, e^{g_h - g_k})) \ (r \to \infty, r \notin E),$$

где $E \subset (1, \infty)$ *— множество конечной линейной меры или конечной логарифмической меры.*

Тогда $f_j \equiv 0$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Лемма 2.3. *([13, Следствие 2.3.4]) Пусть $f(z)$ — трансцендентная мероморфная функция, а $k \geq 1$ — целое число. Тогда*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f),$$

и если f имеет конечный порядок роста, то

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

Лемма 2.4. *([13, Предположение 5.1]) Пусть $P(z)$ — многочлен степени n, тогда все нетривиальные решения $f(z)$ уравнения*

$$f''(z) + P(z)f(z) = 0$$

имеют порядок роста $\rho(f) = \frac{n+2}{2}$.

3. Доказательство Теоремы 1.1

Предположим, что f является мероморфным решением (1.4). Интегрируя (1.4) k раз, получаем

$$f^2(z) = \frac{p_1}{\alpha_1^k} e^{\alpha_1 z} + \frac{p_2}{\alpha_2^k} e^{\alpha_2 z} + q(z), \tag{3.1}$$

где $q(z)$ — многочлен. Из (3.1) следует, что $\rho(f) < \infty$ и

$$N(r, f) = \frac{1}{2} N(r, f^2) = \frac{1}{2} N\left(r, \frac{p_1}{\alpha_1^k} e^{\alpha_1 z} + \frac{p_2}{\alpha_2^k} e^{\alpha_2 z} + q(z)\right) = O(\log r).$$

Если $q(z) \equiv 0$, заметим, что $N(r, f) = 0$ и по Лемме 2.1, уравнение (3.1) не может иметь мероморфного решения f. Если $q(z) \not\equiv 0$, из Теоремы А следует, что решение уравнения (3.1) имеет три случая. Если $f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{2} z}$, $\alpha_1 = 2\alpha_2$, подставляя их в уравнение (3.1) получаем

$$\left(\gamma_1^2 - \frac{p_1}{\alpha_1^k}\right) e^{\alpha_1 z} + \left(2\gamma_0\gamma_1 - \frac{p_2}{\alpha_2^k}\right) e^{\frac{\alpha_1}{2} z} + \gamma_0^2 - q(z) = 0.$$

Из Леммы 2.2 следует, что $\gamma_1^2 = \frac{p_1}{\alpha_1^k}$, $2\gamma_0\gamma_1 = \frac{p_2}{\alpha_2^k}$ и $\gamma_0^2 = q(z)$. Тогда $q(z) = \gamma_0^2 = \frac{2^{2k-2} p_2^2}{p_1 \alpha_1^k}$, что означает, что $q(z)$ является константой, а $p(z) \equiv 0$. Если $f(z) = \gamma_0 + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{2} z}$, $\alpha_2 = 2\alpha_1$, то путем аналогичных вычислений получаем $\gamma_2^2 = \frac{p_2}{\alpha_2^k}$ и $q(z) = \gamma_0^2 = \frac{2^{2k-2} p_1^2}{p_2 \alpha_2^k}$, что означает, что $p(z) \equiv 0$. If $f(z) = \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{2} z} + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{2} z}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, то путем аналогичных вычислений получаем $\gamma_j^2 = \frac{p_j}{\alpha_j^k}$, $j = 1, 2$ и $2\gamma_1\gamma_2 = q(z)$, что означает, что $p(z) \equiv 0$.

4. Доказательство Теоремы 1.2

Предположим, что f является мероморфным решением (1.5). Интегрируя (1.5) k раз, получаем

$$f^n(z) = \frac{p_1}{\alpha_1^k} e^{\alpha_1 z} + \frac{p_2}{\alpha_2^k} e^{\alpha_2 z} + q(z), \tag{4.1}$$

где $q(z)$ является многочленом. Из (4.1) следует, что $\rho(f) < \infty$ и

$$N(r,f) = \frac{1}{n} N(r, f^n) = \frac{1}{n} N\left(r, \frac{p_1}{\alpha_1^k} e^{\alpha_1 z} + \frac{p_2}{\alpha_2^k} e^{\alpha_2 z} + q(z)\right) = O(\log r).$$

Если $q(z) \equiv 0$, то по Лемме 2.1 и учитывая, что $N(r,f) = 0$, уравнение (4.1) не может иметь мероморфного решения f. Если $q(z) \not\equiv 0$, то из Теоремы A следует, что решение уравнения (4.1) имеет три случая. Если $f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{n} z}$, $\gamma_1^n = \frac{p_1}{\alpha_1^k}$, подставляя их в уравнение (4.1) , получаем

$$\sum_{j=1}^{n-1} \binom{j}{n} \gamma_0^{n-j} \gamma_1^j e^{\frac{j\alpha_1}{n} z} - \frac{p_2}{\alpha_2^k} e^{\alpha_2 z} + \gamma_0^n - q(z) = 0.$$

Поскольку $n \geq 3$, то $\sum_{j=1}^{n-1} \binom{j}{n} \gamma_0^{n-j} \gamma_1^j e^{\frac{j\alpha_1}{n} z}$ содержит по крайней мере два члена. Из Леммы 2.2, следует, что по крайней мере один из $\binom{j}{n} \gamma_0^{n-j} \gamma_1^j e^{\frac{j\alpha_1}{n} z} (j = 1, 2, \cdots, n-1)$ равен нулю, а $\gamma_0^n = q(z)$, тогда $\gamma_0 \gamma_1 \equiv 0$. Заметим, что $\gamma_1^n = \frac{p_1}{\alpha_1^k} \neq 0$, тогда $q(z) = \gamma_0^n \equiv 0$, что невозможно. Если $f(z) = \gamma_0 + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{n} z}$, $\gamma_2^n = \frac{p_2}{\alpha_2^k}$, то по аналогичным вычислениям можно установить противоречие. Если $f(z) = \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{n} z} + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{n} z}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, подставляя эти выражения в уравнение (4.1) , получаем

$$\left(\gamma_1^n - \frac{p_1}{\alpha_1^k}\right) e^{\alpha_1 z} + \left(\gamma_2^n - \frac{p_2}{\alpha_2^k}\right) e^{\alpha_2 z} + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{j}{n} \gamma_1^j \gamma_2^{n-j} e^{\frac{j\alpha_1 + (n-j)\alpha_2}{n} z} - q(z) = 0.$$

Поскольку $n \geq 3$, тогда $\sum_{j=1}^{n-1} \binom{j}{n} \gamma_1^j \gamma_2^{n-j} e^{\frac{j\alpha_1 + (n-j)\alpha_2}{n} z}$ содержит по крайней мере два члена и по крайней мере один член $\frac{j_0\alpha_1 + (n-j_0)\alpha_2}{n} \neq 0, \alpha_1, \alpha_2$, $j_0 \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Из Леммы 2.2 следует, что $\gamma_1^n = \frac{p_1}{\alpha_1^k} \neq 0$, $\gamma_2^n = \frac{p_2}{\alpha_2^k} \neq 0$ и $\binom{j_0}{n} \gamma_1^{j_0} \gamma_2^{n-j_0} = 0$, что невозможно.

5. Доказательство Теоремы 1.3

Пусть f является полным решением уравнения (1.8). Дифференцирование (1.8) дает

$$ff' - \frac{4}{9\lambda^2} f' f'' = \frac{\lambda}{2}(p_1 e^{\lambda z} - p_2 e^{-\lambda z}). \tag{5.1}$$

Устраняя $e^{\lambda z}$ и $e^{-\lambda z}$ из (1.8) и (5.1), получаем

$$\frac{\lambda^2}{4}\left[f^2 - \frac{4}{9\lambda^2}(f')^2\right]^2 - (f')^2\left(f - \frac{4}{9\lambda^2} f''\right)^2 = \lambda^2 p_1 p_2. \tag{5.2}$$

Перепишем (5.2) следующим образом

$$\frac{1}{4p_1p_2}\left[1-\frac{4}{9\lambda^2}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right]^2-\left(\frac{f'}{f}\right)^2\left(1-\frac{4}{9\lambda^2}\frac{f''}{f}\right)^2=\frac{1}{f^4}. \tag{5.3}$$

Из (5.3) и Леммы 2.3 следует, что $m(r,1/f)=S(r,f)$. Тогда имеем

$$T(r,f)=N(r,1/f)+S(r,f). \tag{5.4}$$

Дифференцируя (5.1) , получаем

$$(f')^2+ff''-\frac{4}{9\lambda^2}[(f'')^2+f'f''']=\frac{\lambda^2}{2}(p_1e^{\lambda z}+p_2e^{-\lambda z}). \tag{5.5}$$

Из (1.8) и (5.5) следует, что

$$f'\left(\frac{11}{9}f'-\frac{4}{9\lambda^2}f'''\right)=\frac{\lambda^2}{2}f^2-ff''+\frac{4}{9\lambda^2}(f'')^2. \tag{5.6}$$

Дифференцируя (5.5) , получаем

$$3f'f''+ff'''-\frac{4}{3\lambda^2}f''f'''-\frac{4}{9\lambda^2}f'f^{(4)}=\frac{\lambda^3}{2}(p_1e^{\lambda z}-p_2e^{-\lambda z}). \tag{5.7}$$

Из (5.1) и (5.7) следует, что

$$f'''\left(\frac{4}{3\lambda^2}f''-f\right)=f'\left(\frac{31}{9}f''-\frac{4}{9\lambda^2}f^{(4)}-\lambda^2f\right). \tag{5.8}$$

Предположим, что z_0 является нулем $f'(z)$, из (5.8) следует, что $f'''(z_0)=0$ или $\frac{4}{3\lambda^2}f''(z_0)-f(z_0)=0$. Если $f'''(z_0)=0$ и $\frac{4}{3\lambda^2}f''(z_0)-f(z_0)=0$. Поскольку $\left(\frac{4}{3\lambda^2}f''-f\right)'(z_0)=\left(\frac{4}{3\lambda^2}f'''-f'\right)(z_0)=0$, то из (5.8) следует, что $f'(z)$ имеет кратное нулевое значение в z_0, что противоречит (5.1) , поскольку $p_1e^{\lambda z}-p_2e^{-\lambda z}$ имеет только простые нули. Если $f'''(z_0)=0$ и $\frac{4}{3\lambda^2}f''(z_0)-f(z_0)\neq 0$, то f'''/f' должна быть полной функцией. Применяя теорию Вимана-Вариона (см. Главы 3-4) из [13]) к (5.6), получаем $\rho(f)=1$. Обозначим $\mu=f'''/f'$. Тогда $T(r,\mu)=m(r,\mu)=S(r,f')=O(\log r)$, что означает, что μ является многочленом. Переписав $\mu=f'''/f'$ как $f'''-\mu f'=0$. По Лемме 2.4, имеем $\rho(f')=\frac{n+2}{2}$, где n -степень μ. Тогда $1=\rho(f)=\rho(f')=\frac{n+2}{2}$, следовательно, $n=0$, что означает, что μ является константой. Подставляя $f'''=\mu f'$ и $f^{(4)}=\mu f''$ в (5.8) , получаем

$$(\lambda^2-\mu)f+\frac{16\mu-31\lambda^2}{9\lambda^2}f''=0. \tag{5.9}$$

Если $\lambda^2=\mu$, то $16\mu-31\lambda^2=-15\lambda^2\neq 0$, что является противоречием. Если $\lambda^2\neq\mu$, то из (5.9) следует, что $\frac{16\mu-31\lambda^2}{9\lambda^2}\neq 0$. Поскольку $f'''=\mu f'$, получаем $f''=\mu f+\nu$. Подставляя это в (5.9) , получаем $\nu=0$. Из $f'''=\mu f'$, $f''=\mu f$ и (5.6), имеем, что

$$\left(\frac{\lambda^2}{2}-\mu+\frac{4\mu^2}{9\lambda^2}\right)f^2+\frac{4\mu-11\lambda^2}{9\lambda^2}(f')^2=0. \tag{5.10}$$

Из (5.4) следует, что

$$\frac{\lambda^2}{2}-\mu+\frac{4\mu^2}{9\lambda^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{4\mu-11\lambda^2}{9\lambda^2}=0,$$

что невозможно. Если $f'''(z_0)\neq 0$ и $\frac{4}{3\lambda^2}f''(z_0)-f(z_0)=0$, то $\frac{\frac{4}{3\lambda^2}f''-f}{f'}$ должна быть полной функцией. Установим $\tau=\frac{\frac{4}{3\lambda^2}f''-f}{f'}$. Тогда $f''=\frac{3\lambda^2}{4}(\tau f'+f)$ и $f'''=\frac{3\lambda^2}{4}\left[\left(\frac{3\lambda^2}{4}\tau^2+\tau'+1\right)f'+\frac{3\lambda^2}{4}\tau f\right]$. Подставляя эти выражения в (5.6) , получаем

$$(9\lambda^2\tau^2+6\tau'-16)(f')^2=0. \tag{5.11}$$

Следовательно,

$$9\lambda^2\tau^2+6\tau'-16=0. \tag{5.12}$$

Заметим, что $\rho(f)=1$ и $\tau=\frac{\frac{4}{3\lambda^2}f''-f}{f'}$, получаем $\rho(\tau)\leq 1$. Из (5.12) следует, что

$$2T(r,\tau)=T(r,\tau^2)=T\left(r,\frac{16-6\tau'}{9\lambda^2}\right)\leq T(r,\tau')+O(1)\leq T(r,\tau)+O(\log r).$$

Следовательно, τ должно быть многочленом. Тогда, по (5.12), мы приходим к выводу, что τ должно быть константой и $\tau=\pm\frac{4}{3\lambda}$. Если $\tau=-\frac{4}{3\lambda}$, тогда $f''=\frac{3\lambda^2}{4}f-\lambda f'$, и его общим решением является $f(z)=\mu_1e^{\frac{\lambda}{2}z}+\mu_2e^{-\frac{3\lambda}{2}z}$. Подставляя это выражение в (1.8), получаем $\mu_1^2=\frac{9}{8}p_1$, $\mu_1\mu_2=\frac{3}{8}p_2$. Если $\tau=\frac{4}{3\lambda}$, тогда $f''=\frac{3\lambda^2}{4}f+\lambda f'$, и его общим решением является $f(z)=\nu_1e^{-\frac{\lambda}{2}z}+\nu_2e^{\frac{3\lambda}{2}z}$. Подставляя это выражение в (1.8), получаем $\nu_1^2=\frac{9}{8}p_2$, $\nu_1\nu_2=\frac{3}{8}p_1$.

6. Доказательство Теоремы 1.4

Пусть f — трансцендентное полное решение уравнения (1.9). Дифференцирование (1.9) дает

$$nf^{n-1}f'+an(f')^{n-1}f''=\lambda(p_1e^{\lambda z}-p_2e^{-\lambda z}). \tag{6.1}$$

Дифференцирование (6.1) дает

$$n(n-1)f^{n-2}(f')^2+nf^{n-1}f''+an(n-1)(f')^{n-2}(f'')^2+an(f')^{n-1}f''' \\ =\lambda^2(p_1e^{\lambda z}+p_2e^{-\lambda z}). \tag{6.2}$$

Из (1.9) и (6.2) следует, что

$$a(f')^{n-2}[-\lambda^2(f')^2+n(n-1)(f'')^2+nf'f''']=f^{n-2}[\lambda^2f^2-n(n-1)(f')^2-nff'']. \tag{6.3}$$

Дифференцируя (6.2) , получаем

$$n(n-1)(n-2)f^{n-3}(f')^3+3n(n-1)f^{n-2}f'f''+nf^{n-1}f'''+an(n-1)(n-2)\times \\ \times(f')^{n-3}(f'')^3+3an(n-1)(f')^{n-2}f''f'''+an(f')^{n-1}f^{(4)}=\lambda^3(p_1e^{\lambda z}-p_2e^{-\lambda z}). \tag{6.4}$$

Из (6.1) и (6.4) следует, что

(6.5)
$$f'[(n-1)(n-2)f^{n-3}(f')^2+3(n-1)f^{n-2}f''+a(n-1)(n-2)(f')^{n-4}(f'')^3$$
$$+a(f')^{n-2}f^{(4)}-\lambda^2(f^{n-1}+a(f')^{n-2}f'')]=-f'''[3a(n-1)(f')^{n-2}f''+f^{n-1}].$$

Предположим, что z_0 является нулем $f'(z)$, из (6.5) следует, что $f'''(z_0)=0$ или $[3a(n-1)(f')^{n-2}f''+f^{n-1}](z_0)=0$. Если $[3a(n-1)(f')^{n-2}f''+f^{n-1}](z_0)=0$, то $f(z_0)=0$. По (1.9), получаем противоречие. Тогда $f'''(z_0)=0$ и f'''/f' должна быть полной функцией. Применяя теорию Вимана-Вариона (см. Главы 3-4) из [13]) к (6.3), получаем $\rho(f)=1$. Теперь зададим $\kappa=f'''/f'$. Тогда $T(r,\kappa)=m(r,\kappa)=S(r,f')=O(\log r)$, что означает, что κ является многочленом. Перепишем $\kappa=f'''/f'$ как

$$f'''-\kappa f'=0. \tag{6.6}$$

По Лемме 2.4 имеем $\rho(f')=\frac{n+2}{2}$, где n — степень κ. Тогда $1=\rho(f)=\rho(f')=\frac{n+2}{2}$, следовательно, $n=0$, что означает, что κ является ненулевой константой. Подставляя (6.6) и $f^{(4)}=\kappa f''$ в (6.5) , получаем

(6.7)
$$f^{n-3}[(\kappa-\lambda^2)f^2+(n-1)(n-2)(f')^2]$$
$$=-f''[3(n-1)f^{n-2}+a((3n-2)\kappa-\lambda^2)(f')^{n-2}+a(n-1)(n-2)(f')^{n-4}(f'')^2].$$

Обозначим $g=f'$, из (6.6) следует, что $g''-\kappa g=0$. Тогда получаем

(6.8)
$$g=f'=\gamma_1e^{\sqrt{\kappa}z}+\gamma_2e^{-\sqrt{\kappa}z},\ f=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{\sqrt{\kappa}}e^{\sqrt{\kappa}z}-\frac{\gamma_2}{\sqrt{\kappa}}e^{-\sqrt{\kappa}z},\ f''=\sqrt{\kappa}(\gamma_1e^{\sqrt{\kappa}z}-\gamma_2e^{-\sqrt{\kappa}z}),$$

где $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ — константы. Из (1.9) следует, что $\gamma_1\gamma_2\neq 0$. Пусть z_1 — нуль функции $f(z)$. Можно проверить, что $f'(z_1)\neq 0$ по (1.9). Далее рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. Если $n=4$. Легко видеть, что нули $f(z)$ являются нулями $f''(z)$ или $6(f'')^2+(10\kappa-\lambda^2)(f')^2$ по (6.7). Предположим, что z_1 является нулем $6(f'')^2+(10\kappa-\lambda^2)(f')^2$. Если $10\kappa-\lambda^2=0$, то z_1 должно быть нулем $f''(z)$. Сравнивая порядок z_1 по обеим сторонам (6.7), получаем противоречие. Следовательно, $10\kappa-\lambda^2\neq 0$. Соответственно, $f''(z_1)\neq 0$ и $\gamma_0\neq 0$. В противном случае, если z_1 является нулем $f''(z)$, и заметим, что z_1 является нулем $6(f'')^2+(10\kappa-\lambda^2)(f')^2$, тогда $f'(z_1)=0$, что противоречит (1.9). Поскольку z_1 является нулем $6(f'')^2+(10\kappa-\lambda^2)(f')^2$, мы имеем либо $(f''+\nu f')(z_1)=0$ либо $(f''-\nu f')(z_1)=0$, где $\nu^2=\frac{\lambda^2-10\kappa}{6}\neq 0$. Если z_1 является нулем $f''+\nu f'$, обозначив $\mu=\frac{f''+\nu f'}{f}$, тогда $T(r,\mu)=O(\log r)$. Следовательно, μ должно быть многочленом, и $f'' = \mu f - \nu f'$. Из (6.8) следует, что

$$\sqrt{\kappa}(\gamma_1 e^{\sqrt{\kappa}z} - \gamma_2 e^{-\sqrt{\kappa}z}) = \mu\gamma_0 + \mu\left(\frac{\gamma_1}{\sqrt{\kappa}}e^{\sqrt{\kappa}z} - \frac{\gamma_2}{\sqrt{\kappa}}e^{-\sqrt{\kappa}z}\right) - \nu(\gamma_1 e^{\sqrt{\kappa}z} + \gamma_2 e^{-\sqrt{\kappa}z}).$$

Применив Лемму 2.2 к вышеуказанному уравнению, можно сделать вывод, что $\mu\gamma_0 = 0$. Заметим, что $\gamma_0 \neq 0$, тогда $\mu = 0$. Следовательно, $\sqrt{\kappa} = -\nu$ и $-\sqrt{\kappa} = -\nu$, то есть $\kappa = \nu = 0$, что невозможно. Если z_1 является нулем $f''-\nu f'$, то аналогично получаем противоречие. Предположим, что z_1 является нулем $f''(z)$, тогда мы получаем $\gamma_0 = 0$ по (6.8). Подставляя (6.8) в (1.9) получим

$$\begin{aligned}&\left(a+\frac{1}{\kappa^2}\right)\gamma_1^4 e^{4\sqrt{\kappa}z} + 4\gamma_1^3\gamma_2\left(a-\frac{1}{\kappa^2}\right)e^{2\sqrt{\kappa}z} + 6\gamma_1^2\gamma_2^2\left(a+\frac{1}{\kappa^2}\right)\\ &+ 4\gamma_1\gamma_2^3\left(a-\frac{1}{\kappa^2}\right)e^{-2\sqrt{\kappa}z} + \left(a+\frac{1}{\kappa^2}\right)\gamma_2^4 e^{-4\sqrt{\kappa}z} = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z}.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Из (6.9) и Леммы 2.2 следует, что $6\gamma_1^2\gamma_2^2\left(a+\frac{1}{\kappa^2}\right) = 0$. Поскольку $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$, то $a\kappa^2 + 1 = 0$. Тогда уравнение (6.9) сводится к

$$4\gamma_1^3\gamma_2\left(a-\frac{1}{\kappa^2}\right)e^{2\sqrt{\kappa}z} + 4\gamma_1\gamma_2^3\left(a-\frac{1}{\kappa^2}\right)e^{-2\sqrt{\kappa}z} = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z}.$$

Если $\lambda = 2\sqrt{\kappa}$, тогда

$$f(z) = \frac{2}{\lambda}(\gamma_1 e^{\frac{\lambda}{2}z} - \gamma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}z}), \quad 8a\gamma_1^3\gamma_2 = p_1, \quad 8a\gamma_1\gamma_2^3 = p_2, \quad \lambda^4 = -\frac{16}{a}.$$

Если $\lambda = -2\sqrt{\kappa}$, тогда

$$f(z) = \frac{2}{\lambda}(\gamma_2 e^{\frac{\lambda}{2}z} - \gamma_1 e^{-\frac{\lambda}{2}z}) \quad 8a\gamma_1^3\gamma_2 = p_2 \quad 8a\gamma_1\gamma_2^3 = p_1 \quad \lambda^4 = -\frac{16}{a}.$$

Случай 2. Если $n \geq 5$. По (6.7), мы имеем либо $f''(z_1) = 0$ либо $[(n-1)(n-2)(f'')^2 + ((3n-2)\kappa - \lambda^2)(f')^2](z_1) = 0$. Предположим, что $[(n-1)(n-2)(f'')^2 + ((3n-2)\kappa - \lambda^2)(f')^2](z_1) = 0$. Если $(3n-2)\kappa - \lambda^2 = 0$, тогда z_1 должно быть нулем $f''(z)$. Из (6.8) следует, что $\gamma_0 = 0$, тогда $f'' = \kappa f$. Вместе с (6.7) это дает

$$f^{n-3}[(\kappa-\lambda^2)f^2+(n-1)(n-2)(f')^2] = -\kappa f^3[3(n-1)f^{n-4}+a(n-1)(n-2)\kappa^2(f')^{n-4}]. \tag{6.10}$$

Если $n = 5$ или $n \geq 7$, то, сравнивая порядок z_1 по обеим сторонам (6.10), получаем противоречие. Если $n = 6$, то из $16\kappa - \lambda^2 = 0$ выводим, что $(3n-2)\kappa - \lambda^2 = 0$. Тогда (6.10) сводится к

$$(16\kappa - \lambda^2)f^2 + 20(a\kappa^3 + 1)(f')^2 = 0. \tag{6.11}$$

Заметим, что $16\kappa - \lambda^2 = 0$, и из (6.11), получаем $a\kappa^3 + 1 = 0$. Подставляя это и (6.8) в (1.9) , получаем

$$6\gamma_1^5\gamma_2\left(a-\frac{1}{\kappa^3}\right)e^{4\sqrt{\kappa}z}+20\gamma_1^3\gamma_2^3\left(a-\frac{1}{\kappa^3}\right)+6\gamma_1\gamma_2^5\left(a-\frac{1}{\kappa^3}\right)e^{-4\sqrt{\kappa}z} = p_1 e^{\lambda z}+p_2 e^{-\lambda z}.$$

Вместе с Леммой 2.2 , получаем $20\gamma_1^3\gamma_2^3\left(a-\frac{1}{\kappa^3}\right)=0$. Можно проверить, что $a\kappa^3-1=0$ по $\gamma_1\gamma_2\neq 0$. Это противоречит $a\kappa^3+1=0$. Если $(3n-2)\kappa-\lambda^2\neq 0$, то $f''(z_1)\neq 0$ и $\gamma_0\neq 0$. В противном случае, если $f''(z_1)=0$, и заметьте, что $[(n-1)(n-2)(f'')^2+((3n-2)\kappa-\lambda^2)(f')^2](z_1)=0$, тогда $f'(z_1)=0$, что противоречит (1.9). Поскольку z_1 является нулем функции $[(n-1)(n-2)(f'')^2+((3n-2)\kappa-\lambda^2)(f')^2]$, то либо $(f''+\tau f')(z_1)=0$ либо $(f''-\tau f')(z_1)=0$, где $\tau^2=\frac{\lambda^2-(3n-2)\kappa}{(n-1)(n-2)}\neq 0$. Если z_1 является нулем функции $f''+\tau f'$, обозначив $\omega=\frac{f''+\tau f'}{f}$, тогда $T(r,\omega)=O(\log r)$. Следовательно, ω должно быть многочленом, а $f''=\omega f-\tau f'$. Из (6.8) следует, что

$$\sqrt{\kappa}(\gamma_1 e^{\sqrt{\kappa}z}-\gamma_2 e^{-\sqrt{\kappa}z})=\omega\gamma_0+\omega\left(\frac{\gamma_1}{\sqrt{\kappa}}e^{\sqrt{\kappa}z}-\frac{\gamma_2}{\sqrt{\kappa}}e^{-\sqrt{\kappa}z}\right)-\tau(\gamma_1 e^{\sqrt{\kappa}z}+\gamma_2 e^{-\sqrt{\kappa}z}).$$

Применив Лемму 2.2 к вышеуказанному уравнению, можно сделать вывод, что $\omega\gamma_0=0$. Заметим, что $\gamma_0\neq 0$, тогда $\omega=0$. Следовательно, $\sqrt{\kappa}=-\tau$ и $-\sqrt{\kappa}=-\tau$, то есть $\kappa=\tau=0$, что невозможно. Если z_1 является нулем $f''-\nu f'$, то аналогичным образом мы получим противоречие. Предположим, что $f''(z_1)=0$, тогда мы получаем $\gamma_0=0$ по (6.8). Если $(3n-2)\kappa-\lambda^2=0$, то аналогично мы можем получить противоречие. Если $(3n-2)\kappa-\lambda^2\neq 0$, то $[(n-1)(n-2)(f'')^2+((3n-2)\kappa-\lambda^2)(f')^2](z_1)\neq 0$. В противном случае $f'(z_1)=0$, то невозможно. Сравнивая порядок z_1 по обоим сторонам (6.7), получаем противоречие.

Abstract. In this paper, we study the entire solutions of nonlinear differential equations related to trigonometric identities. Our results improve the results given by Zhang et al (Appl. Math. J. Chin. Univ. 28(2): 138-146, 2013) and Gundersen et al (J. Math. Anal. Appl. 507: 125788, 2022). Meanwhile, we confirm some of the conjectures proposed by Gao et al (Mediterr. J. Math. 20: 167, 2023). Finally, some open questions posed.

Список литературы

[1] C. C. Yang, P. Li, "On the transcendental solutions of a certain type of nonlinear differential equations", Arch. Math., **82**, 442 – 448 (2004).

[2] P. Li, "Entire solutions of certain type of differential equations II", J. Math. Anal. Appl., **375**, 310 – 319 (2011).

[3] Z. X. Chen, C. C. Yang, "On entire solutions of certain type of differential-difference equations", Taiwan J. Math., **18**, 677 – 685 (2014).

[4] M. F. Chen, Z. S. Gao, "Entire solutions of certain type of nonlinear differential equations and differential-difference equations", J. Comput. Anal. Appl., **24(1)**: 137 – 147 (2018).

[5] L. W. Liao, C. C. Yang, J. J. Zhang, "On meromorphic solutions of certain type of nonlinear differential equations", Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **38**, 581 – 593 (2013).

[6] H. F. Liu, Z. Q. Mao, "Meromorphic solutions of certain types of nonlinear differential equations", Comput. Methods Funct. Theory, **20**, 319 – 332 (2020).

[7] X. Q. Lu, L. W. Liao, J. Wang, "On meromorphic solutions of a certain type of nonlinear differential equations", Acta Math. Sin., **33**, 1597 – 1608 (2017).
[8] J. Zhang, L. W. Liao, "On entire solutions of a certain type of nonlinear differential and difference equations", Taiwan J. Math., **15**, 2145 – 2157 (2011).
[9] X. B. Zhang, H. X. Yi, "Entire solutions of a certain type of functional-differential equations", Appl. Math. J. Chin. Univ., **28(2)**, 138 – 146 (2013).
[10] G. G. Gundersen, W. R. Lü, T. W. Ng, C. C. Yang, "Entire solutions of differential equations that are related to trigonometric identities", J. Math. Anal. Appl., **507**, 125788 (2022).
[11] L. K. Gao, J. Y. Gao, "Trigonometric identities and entire solutions of nonlinear binomial differential equations", Mediterr J. Math., **20**, 167, (2023).
[12] W. K. Hayman, Meromorphic Function, Oxford, Clarendon Press (1964).
[13] I. Laine, Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Berlin: W de Gruyter (1993).
[14] L. Yang, Value Distribution Theory, Berlin, Springer-Verlag (1993).
[15] H. F. Liu, Z. Q. Mao, "Meromorphic solutions of certain nonlinear difference equations", Results Math., **76**, 102 (2021).
[16] C. C. Yang, H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Beijing, Science Press (1995). Dordrecht: Kluwer Academic (2003).

Поступила 22 ноября 2024

После доработки 23 января 2025

Принята к публикации 02 февраля 2025

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 60, номер 5, 2025

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 60, No. 5, 2025

Contents