ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ТОМ 60 № 4 2025

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

том 60 №4 2025

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

Известия НАН Армении, Математика.

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 4, 2025, стр. 3 – 22.

$(\varepsilon, \mathcal{A})$-ЧИСЛОВОЙ РАДИУС ОПЕРАТОРОВ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ НЕРАВЕНСТВА

Н. АЛТВАЙЖРИ, С. С. ДРАГОМИР, К. ФЕКИ, Х. ЦЯО

Университет короля Сауда, Саудовская Аравия[1]
Университет Виктории, Мельбурн Сити, Виктория, Австралия
Университет Сфакса, Тунис
Педагогический университет Внутренней Монголии, Хух-Хото, Китай [2]
E-mails: *najla@ksu.edu.sa; sever.dragomir@ajmaa.org*
kais.feki@hotmail.com; qiaohw@imnu.edu.cn

Аннотация. Понятие взвешенного $\mathcal{A}$-числового радиуса, где $\mathcal{A}$ предполагается положительным оператором, было введено недавно. В данной работе мы вводим другой взвешенный $\mathcal{A}$-числовой радиус для операторов в полугильбертовых пространствах, обозначаемый через $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$. Мы устанавливаем некоторые свойства и неравенства для $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$, которые обобщают более ранние результаты для $\omega_{\mathcal{A}}(\cdot)$. В частности, мы выводим новые тождества для $\mathcal{A}$-числового радиуса и проводим дальнейшее сравнение между $\mathcal{A}$-числовым радиусом и операторной $\mathcal{A}$-полунормой взвешенных действительных и мнимых частей. Кроме того, мы используем неравенства типа Боаса-Беллмана в контексте полугильбертовых пространств для вывода верхних оценок для $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$. Также обсуждаются некоторые приложения.

MSC2020 numbers: 47A12; 47A63; 47B15; 47B65; 46C05.

Ключевые слова: взвешенный числовой радиус; $\mathcal{A}$-числовой радиус; полугильбертово пространство; неравенства типа Боаса-Беллмана; операторное неравенство.

1. Введение

Пусть $(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — комплексное гильбертово пространство, снабженное нормой $\|\cdot\|$, и пусть $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ обозначает C^*-алгебру всех ограниченных линейных операторов на $\mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})^+$ конус положительных операторов $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, то есть,

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{H})^+ = \left\{\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}) : \langle \mathcal{A}x, x\rangle \geq 0 \text{ для всех } x \in \mathfrak{H}\right\}.$$

[1]Первый автор выражает искреннюю благодарность за поддержку, полученную от Программы финансирования текущих исследований (ORF-2025-187) Университета короля Сауда, Эр-Рияд, Саудовская Аравия.

[2]Фонд естественных наук Внутренней Монголии, Номер вспомогательного проекта (2024QN01003), Проект Первокласные дисциплины, Автономный район Внутренняя Монголия, номер вспомогательного проекта (YLXKZX-NSD-017,YLXKZX-NSD-011), Педагогический университет Внутренней Монголии, Хух-Хото, Внутренняя Монголия.

Для линейного подпространства $\mathcal{M}$ его замыкание по норме $\mathfrak{H}$ обозначается через $\overline{\mathcal{M}}$. Ортогональную проекцию на $\overline{\mathcal{M}}$ обозначим через $P_{\overline{\mathcal{M}}}$.

В данной статье область значений оператора T обозначается через $\mathcal{R}(T)$, его нуль-пространство — через $\mathcal{N}(T)$, а сопряженное пространство — через T^*. Индуцированное полускалярное произведение на $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})^+$ определяется как:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}} : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathbb{C}, \qquad \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}x, y \rangle.$$

Пусть $\| \cdot \|_{\mathcal{A}}$ — полунорма, индуцированная в $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$, т.е. $\|x\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{A}}}$ для $x \in \mathfrak{H}$.

Для более подробной информации о $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ см. [1, 2].

Для произвольного $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ следующая величина

$$\|T\|_{\mathcal{A}} = \sup \left\{ \|Tx\|_{\mathcal{A}} : \|x\|_{\mathcal{A}} = 1 \right\},$$

может не быть конечной (см. [3]). Пусть $\mathfrak{L}^{A}(\mathfrak{H})$ — множество операторов $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, таких что $\|T\|_{\mathcal{A}} < \infty$. Здесь $\| \cdot \|_{\mathcal{A}}$ обозначает $\mathcal{A}$-операторную полунорму $\mathcal{A}$ в конусе $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})^+$. Можно проверить, что $\mathfrak{L}^{A}(\mathfrak{H})$ в общем случае не является подалгеброй $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Более того, для $T \in \mathfrak{L}^{A}(\mathfrak{H})$ имеем $\|T\|_{\mathcal{A}} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}T\mathcal{A} = 0$.

Пусть $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Оператор $R \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ называется $\mathcal{A}$-сопряжённым к T, если для $x, y \in \mathfrak{H}$, имеет место $\langle Tx, y \rangle_{\mathcal{A}} = \langle x, Ry \rangle_{\mathcal{A}}$, т.е. $\mathcal{A}R = T^*\mathcal{A}$. Следует отметить, что оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ может не иметь, иметь один или несколько $\mathcal{A}$-сопряжённых операторов. Обозначим через $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ множество всех операторов, допускающих $\mathcal{A}$-сопряжённые операторы. Теорема Дугласа в [4] показывает, что

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H}) = \left\{ T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}) : \mathcal{R}(T^*\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A}) \right\}.$$

Отметим, что $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ является подалгеброй $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, и справедливы включения $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{L}^{\mathcal{A}}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Если $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, то уравнение $\mathcal{A}X = T^*\mathcal{A}$ всегда разрешимо, а его приведённое решение обозначается как $T^{\star_{\mathcal{A}}}$ (см. [5, 6]). Очевидно, $T^{\star_{\mathcal{A}}}$ является $\mathcal{A}$-сопряжённым оператором к T. Кроме того, справедливо следующее:

$$T^{\star_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}^{\dagger}T^*\mathcal{A}, \quad \mathcal{R}(T^{\star_{\mathcal{A}}}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}, \quad \text{и} \quad \mathcal{N}(T^{\star_{\mathcal{A}}}) = \mathcal{N}(T^*\mathcal{A}),$$

где $\mathcal{A}^{\dagger}$ — обратное уравнение Мура-Пенроуза для $\mathcal{A}$. Подробнее об обратном уравнении Мура-Пенроуза см. [7].

Легко проверить, что если $T, S \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, то $\|TS\|_{\mathcal{A}} \leq \|T\|_{\mathcal{A}}\|S\|_{\mathcal{A}}$ и $(TS)^{\star_{\mathcal{A}}} = S^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}$. Отметим, что если $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, то $T^{\star_{\mathcal{A}}} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, $(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} = P_{\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}}TP_{\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}}$,

$\left((T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}} = T^{\star_{\mathcal{A}}}$ и выполняется следующее равенство

$$\|T\|_{\mathcal{A}} = \sup\left\{|\langle Tx, y\rangle_{\mathcal{A}}| : x, y \in \mathfrak{H}, \|x\|_{\mathcal{A}} = \|y\|_{\mathcal{A}} = 1\right\}. \tag{1.1}$$

Оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ называется $\mathcal{A}$-положительным, если $\mathcal{A}T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})^{+}$, что мы записываем так: $T \geq_{\mathcal{A}} 0$. Оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ называется $\mathcal{A}$-самосопряженным, если $\mathcal{A}T$ самосопряженный, то есть $\mathcal{A}T = T^{*}\mathcal{A}$. Очевидно, что $\mathcal{A}$-положительный оператор всегда $\mathcal{A}$-самосопряженный, а $\mathcal{A}$-самосопряженный оператор всегда принадлежит $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$. Кроме того, $T^{\star_{\mathcal{A}}}T$ и $TT^{\star_{\mathcal{A}}}$ являются $\mathcal{A}$-положительными, и следовательно,

$$\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T\|_{\mathcal{A}} = \|TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A}}^{2} = \|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}^{2}.$$

В [8] $\mathcal{A}$-числовой радиус для $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ определяется следующим образом:

$$\omega_{\mathcal{A}}(T) = \sup\left\{\left|\langle Tx, x\rangle_{\mathcal{A}}\right| : x \in \mathfrak{H},\ \|x\|_{\mathcal{A}} = 1\right\}.$$

Отметим, что соотношение $w_{\mathcal{A}}(T) = +\infty$ может выполняться для некоторых $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, см. [3].

Более того, $\omega_{\mathcal{A}}(\cdot)$ является полунормой на $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ эквивалентной $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, т.е.

$$\frac{1}{2}\|T\|_{\mathcal{A}} \leq \omega_{\mathcal{A}}(T) \leq \|T\|_{\mathcal{A}}, \text{ для } T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H}). \tag{1.2}$$

Более того, известно, что если T является $\mathcal{A}$-самосопряженным, то $\omega_{\mathcal{A}}(T) = \|T\|_{\mathcal{A}}$. Доказательства и более подробную информацию о $\mathcal{A}$-числовом радиусе операторов см. в [8, 9]. Некоторые другие смежные вопросы можно найти в [10] - [23] и в [1].

Для $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ декартово разложение T имеет вид $T = \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)$, где $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) = \frac{T+T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}$ и $\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T) = \frac{T-T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2\mathrm{i}}$. Следует отметить тождество для $\mathcal{A}$-числового радиуса доказанное А. Замани в [9]:

$$\omega_{\mathcal{A}}(T) = \sup_{\phi \in \mathbb{R}} \left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)\right\|_{\mathcal{A}}. \tag{1.3}$$

В последние годы обобщение декартова разложения было введено и обобщено в [25, 24]. Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ и $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Взвешенные действительная и мнимая части T были недавно определены следующим образом:

$$\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \varepsilon T + (1-\varepsilon)\, T^{\star_{\mathcal{A}}} \quad \text{ и } \quad \mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = (1-\varepsilon)\,(\text{-i}T) + \varepsilon(\mathrm{i}T^{\star_{\mathcal{A}}}).$$

Это означает, что

$$\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) + \mathrm{i}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = (1-2\varepsilon)\, T^{\star_{\mathcal{A}}} + T.$$

Заметим, что при $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) \quad \text{и} \quad \mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T).$$

В [24] взвешенный $\mathcal{A}$-числовой радиус определён, как

$$\omega_{(\mathcal{A},\nu)}(T) = \sup_{\phi\in\mathbb{R}} \|\mathfrak{R}_{(\nu,\mathcal{A})}(e^{\mathrm{i}\phi}T)\|_{\mathcal{A}}, \quad 0 \leq \nu \leq 1.$$

Эта концепция обобщает уравнение (1.3) $\mathcal{A}$-числового радиуса, и его основные свойства исследуются в отмеченной работе.

Вслед за [25, 24], в данной статье мы вводим ещё один интересный взвешенный $\mathcal{A}$-числовой радиус. Это новое определение формулируется в терминах $\mathcal{A}$-числового радиуса. Кроме того, мы выводим неравенства для взвешенного $\mathcal{A}$-числового радиуса, которые обобщают и уточняют неравенства из (1.2).

2. Основные результаты

В этом разделе мы представляем наши основные результаты. Наша главная цель — обсудить свойства нового взвешенного $\mathcal{A}$-числового радиуса, а затем вывести дополнительные неравенства для числового радиуса. Начнём со следующего определения.

Определение 2.1. *Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ и пусть $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Взвешенный $(\varepsilon, \mathcal{A})$-числовой радиус T (или просто взвешенный $\mathcal{A}$-числовой радиус T) определяется следующим образом:*

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{H} \\ \|x\|_{\mathcal{A}}=1}} \left|\left\langle \left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T + \mathrm{i}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right) x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| = \omega_{\mathcal{A}}\left((1-2\varepsilon)\, T^{\star_{\mathcal{A}}} + T\right).$$

Взвешенная операторная $\mathcal{A}$-полунорма T определяется следующим образом:

$$\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})} = \sup_{\substack{x,y\in\mathfrak{H} \\ \|x\|_{\mathcal{A}}=\|y\|_{\mathcal{A}}=1}} \left|\left\langle \left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T + \mathrm{i}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right) x, y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| = \left\|(1-2\varepsilon)\, T^{\star_{\mathcal{A}}} + T\right\|_{\mathcal{A}}.$$

Замечание 2.1. *Очевидно, что для $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$,*

$$\omega_{(\frac{1}{2},\mathcal{A})}(T) = \omega_{\mathcal{A}}(T), \quad \|T\|_{(\frac{1}{2},\mathcal{A})} = \|T\|_{\mathcal{A}} \quad и \quad \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \leq \|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}.$$

Используя тождество (1.3), выводим следующее уравнение для $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$. Точнее, имеет место следующий результат.

Теорема 2.1. *Пуст* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$. *Тогда, для любого* $0 \leq \varepsilon \leq 1$,

$$\begin{aligned}\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) &= \sup_{\phi\in\mathbb{R}} \left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right) + \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)\right\|_{\mathcal{A}} \\ &= \sup_{\phi\in\mathbb{R}} \left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right) - \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)\right\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Доказательство. Так как $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \omega_{\mathcal{A}}((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T)$ для $0 \leq \varepsilon \leq 1$, из равенства (1.3) следует,что

$$\begin{aligned}&\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \omega_{\mathcal{A}}((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T) = \sup_{\phi\in\mathbb{R}} \left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}\left((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T\right)\right)\right\|_{\mathcal{A}} \\ &= \frac{1}{2}\sup_{\phi\in\mathbb{R}} \left\|e^{\mathrm{i}\phi}\left((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T\right) + e^{-\mathrm{i}\phi}\left((1-2\varepsilon)\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}} + T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right\|_{\mathcal{A}} \\ &= \frac{1}{2}\sup_{\phi\in\mathbb{R}} \left\|e^{\mathrm{i}\phi}\left((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T\right) + e^{-\mathrm{i}\phi}\left((1-2\varepsilon)T + T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right\|_{\mathcal{A}} \\ &= \sup_{\phi\in\mathbb{R}} \left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right) + \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)\right\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Тогда заменив T на $\mathrm{i}T$, получим, что

$$\begin{aligned}\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) &= \sup_{\phi\in\mathbb{R}} \left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}(\mathrm{i}T)^{\star_{\mathcal{A}}}\right) + \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}(\mathrm{i}T)\right)\right\|_{\mathcal{A}} \\ &= \sup_{\phi\in\mathbb{R}} \left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right) - \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)\right\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 2.1, вытекает нижеследующее равенство.

Следствие 2.1. *Пусть* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$. *Тогда, для любого* $0 \leq \varepsilon \leq 1$,

$$\begin{aligned}&\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \\ &= \sup_{\eta^2+\nu^2=1} \left\|(1-2\varepsilon)\left(\eta\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right) + \nu\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right) + \left(\eta\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \nu\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right)\right\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathbb{R}$, $\eta = \cos\phi$ и $\nu = \sin\phi$. Тогда,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right) = \frac{e^{\mathrm{i}\phi}T + e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2} = \frac{(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)\,T + (\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi)\,T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2} \\ &= \cos\phi\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sin\phi\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T).\end{aligned}$$

Заменив T на $T^{\star_{\mathcal{A}}}$, получим $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right) = \cos\phi\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right) - \sin\phi\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)$. Беря супремум по $\phi \in \mathbb{R}$, получим требуемый результат. $\square$

Для $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ хорошо известно, что $\omega_{\mathcal{A}}(T) = \omega_{\mathcal{A}}(T^{\star_{\mathcal{A}}})$. Аналогично, для $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$, имеет место следующее интересное свойство:

Утверждение 2.1. *Пусть* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *и* $0 \leq \varepsilon \leq 1$. *Тогда*

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right) \quad \|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})} = \|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}.$$

Доказательство. Так как $\omega_{\mathcal{A}}(X) = \omega_{\mathcal{A}}(X^{\star_{\mathcal{A}}})$ для всех $X \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, для любого $0 \leq \varepsilon \leq 1$, будем иметь, что

$$\begin{aligned}&\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T^{\star_{\mathcal{A}}}) = \omega_{\mathcal{A}}\left((1-2\varepsilon)(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} + T^{\star_{\mathcal{A}}}\right) = \omega_{\mathcal{A}}\left([(1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T]^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\\ &= \omega_{\mathcal{A}}((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T) = \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T).\end{aligned}$$

Следовательно, $\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})} = \|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}$, что завершает доказательство. □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из определения $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$.

Утверждение 2.2. *Пусть $T, S \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, и пусть $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Тогда,*

(1) $\omega_{(0,\mathcal{A})}(T) = 2\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}, \quad \omega_{(1,\mathcal{A})}(T) = 2\|\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}$.
(2) $\dfrac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2} \leq \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \leq \|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}$.
(3) $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \leq 2\omega_{\mathcal{A}}(T)$.
(4) $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T+S) \leq \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) + \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(S)$.
(5) *Функция $f(\varepsilon) = \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$ выпукла на интервале* $[0,1]$.

В следующей части мы докажем некоторые неравенства для $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$.

Теорема 2.2. *Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$. Тогда, для любого $0 \leq \varepsilon \leq 1$,*

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq \frac{1}{2}\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})} + \Big|\, \|(1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \Big|.$$

В частности,

$$\omega_{\mathcal{A}}(T) \geq \frac{1}{2}\|T\|_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\Big|\, \|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \Big|.$$

Доказательство. Сначала отметим, что

$$\begin{aligned}\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) &= \omega_{\mathcal{A}}((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T)\\ &= \omega_{\mathcal{A}}((1-2\varepsilon)(\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)) + \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)) \qquad (2.1)\\ &= 2\omega_{\mathcal{A}}((1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)).\end{aligned}$$

Пусть $x \in H$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$. Тогда, согласно (2.1),

$$\begin{aligned}\omega^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) &= 4\omega^2_{\mathcal{A}}((1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T))\\ &\geq 4|\langle(1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}} + \langle\varepsilon\mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2\\ &= 4\left(|\langle(1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2 + |\langle\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2\right)\\ &\geq 4|\langle(1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2.\end{aligned}$$

Мы также имеем $\omega^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq 4|\langle\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2$, откуда вытекает, что $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq 2\max\{\|(1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}, \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\}$. Применив рассуждения, похожие на (2.1), будем иметь

$$\begin{aligned}
\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq & 2\max\{\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}, \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\} \\
&= \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} + \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} + \Big|\, \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \Big| \\
&\quad (\max\{m,n\} = \frac{1}{2}\,(m+n+|m-n|)) \\
&\geq \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathrm{i}\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} + \Big|\, \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \Big| \\
&= \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2} + \Big|\, \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \Big|,
\end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

Из теоремы 2.2 вытекает следующее следствие:

Следствие 2.2. *Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, и $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Если $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2}$, тогда*

$$\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} = \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} = \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{4}.$$

Доказательство. По теореме 2.2,

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2} + \Big|\, \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \Big| \geq \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2}.$$

Значит, из $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2}$ вытекает $\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} = \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}$. Далее, отметим, что

$$\begin{aligned}
\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2} &= \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathrm{i}\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \\
&\leq \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} + \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} = 2\,\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Так как $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq 2\max\{\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}, \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\}$, результат очевиден. □

Теорема 2.3. *Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, и $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Тогда,*

$$\begin{aligned}
\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq & \frac{1}{2}\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})} \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2}\Big|\, \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \Big|.
\end{aligned}$$

В частности, $\omega_{\mathcal{A}}(T) \geq \frac{1}{2}\|T\|_{\mathcal{A}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big|\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\Big|$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$. Так как $|a + ib| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|a + b|$ для $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle\left((1-2\varepsilon)\, T^{\star_{\mathcal{A}}} + T\right) x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| &= 2\left|(1-\varepsilon)\left\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}} + \varepsilon\left\langle \mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| \\
&= 2\left|\left\langle(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}} + \mathrm{i}\left\langle \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| \\
&\geq \frac{2}{\sqrt{2}}\left|(1-\varepsilon)\left\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}} \pm \varepsilon\left\langle \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| \\
&= \sqrt{2}\left|\left\langle\left((1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) \pm \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right) x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|.
\end{aligned}$$

Беря супремум по $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$, находим, что $\sqrt{2}\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) \pm \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} \leq \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\max\{\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}, \left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\} \\
=&\sqrt{2}\Bigg\{\frac{\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}}{2} \\
&+\frac{\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2}\Bigg\} \\
&\left(\max\{m,n\} = \frac{1}{2}\left(m+n+|m-n|\right)\right) \\
\geq&\sqrt{2}\Bigg\{\frac{\left\|\left((1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right) + \mathrm{i}\left((1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right)\right\|_{\mathcal{A}}}{2} \\
&+\frac{\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2}\Bigg\} \\
=&\sqrt{2}\Bigg\{\frac{\left\|(1+\mathrm{i})\left((1-2\varepsilon)T + T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right\|_{\mathcal{A}}}{4} \\
&+\frac{\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2}\Bigg\} \\
=&\sqrt{2}\Bigg\{\frac{\sqrt{2}\left\|\left((1-2\varepsilon)(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} + T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right\|_{\mathcal{A}}}{4} \\
&+\frac{\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2}\Bigg\} \\
=&\frac{\|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2} + \frac{\sqrt{2}\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2} \\
=&\frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2} + \frac{\sqrt{2}\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2},
\end{aligned}$$

что завершает доказательство. $\square$

Замечание 2.2. *Из теоремы 2.3, ясно, что если* $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2}$, *тогда*

$$\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_A(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_A(T)\|_{\mathcal{A}} = \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_A(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_A(T)\|_{\mathcal{A}}.$$

Теорема 2.4. *Пусть* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *с* $0 \le \varepsilon \le 1$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) &\ge 2\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\,\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \\ &\quad + \left|\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|.\end{aligned}$$

В частности,

$$\omega_{\mathcal{A}}(T) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|\,\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\,\right|.$$

Доказательство. По (2.1), для любого $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$, имеем, что

$$\left|\langle((1-2\varepsilon)\,T^{\star_{\mathcal{A}}} + T)\,x, x\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2 = 4\left(\langle(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}^2 + \langle\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}^2\right).$$

Теперь в силу выпуклости функции $f(t) = t^2$,

$$\begin{aligned}&\left|\langle((1-2\varepsilon)\,T^{\star_{\mathcal{A}}} + T)\,x, x\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2 \\ &= 4\left(\langle(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}^2 + \langle\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}^2\right) \\ &= 4\left((1-\varepsilon)\left\langle\sqrt{1-\varepsilon}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}^2 + \varepsilon\left\langle\sqrt{\varepsilon}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}^2\right) \\ &\ge 4\left(\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\,\left|\langle\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}\right| + \sqrt{\varepsilon^3}\,\left|\langle\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}\right|\right)^2 \\ &\ge 4\left|\left\langle\left(\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) \pm \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2.\end{aligned}$$

Беря супремум по $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$, заключаем, что

$$4\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) \pm \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}^2 \le \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}^2(T). \tag{2.2}$$

Из (2.2), имеем, что

$$\begin{aligned}
&\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq 2\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) \pm \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} \\
&= 2\max\left\{\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}, \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right\} \\
&\geq \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} \\
&+ \left|\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right| \\
&\geq 2\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\,\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \\
&+ \left|\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) &\geq 2\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\,\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \\
&+ \left|\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Теорема 2.5. *Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ и $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Тогда*

$$\omega^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \leq (1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)\,\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}.$$

В частности, $\omega^2_{\mathcal{A}}(T) \leq \frac{1}{2}\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|\langle\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}} + \langle \mathrm{i}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2 \\
&= |\langle\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2 + |\langle\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2 \\
&\leq \|\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x\|^2_{\mathcal{A}} + \|\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x\|^2_{\mathcal{A}} \\
&= \langle\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x, R_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x\rangle_{\mathcal{A}} + \langle\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x, \mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x\rangle_{\mathcal{A}} \\
&= (1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)\langle x, \left[T^{\star_{\mathcal{A}}}T + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right]x\rangle_{\mathcal{A}} \\
&\leq (1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)\left\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Более того, так как $\|X^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} = \|X\|_{\mathcal{A}}$,

$$\begin{aligned}
&\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} = \left\|[T^{\star_{\mathcal{A}}}T + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}]^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}} \\
&= \|T^{\star_{\mathcal{A}}}(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} = \left\|(T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}} \\
&= \|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Беря супремум по $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$ в (2.3) и комбинируя с (2.4), получим требуемый результат. □

В [9], было доказано, что для любого $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$,

$$\omega_{\mathcal{A}}^2(T) \leq \frac{1}{4}\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\omega_{\mathcal{A}}(T^2), \tag{2.5}$$

как уточнение неравенства $\omega_{\mathcal{A}}(T) \leq \|T\|_{\mathcal{A}}$. В следующей теореме мы докажем $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$ – версию этого неравенства, используя (2.5) при $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Теорема 2.6. *Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ с $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Тогда*

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}^2(T) \leq (1-\varepsilon)^2 \|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} + (1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)\omega_{\mathcal{A}}(T^2) + (1-2\varepsilon)\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T^2)\right\|_{\mathcal{A}}.$$

В частности, $\omega_{\mathcal{A}}^2(T) \leq \frac{1}{4}\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\omega_{\mathcal{A}}(T^2)$.

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathbb{R}$. Тогда, по теореме 2.1,

$$\begin{aligned}
&\left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{i\phi}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\right) + \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{i\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right\|_{\mathcal{A}}^2\\
=&\left\|\left[(1-2\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{i\phi}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\right) + \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{i\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right]^2\right\|_{\mathcal{A}}\\
\leq&\frac{1+(1-2\varepsilon)^2}{4}\|P\|_{\mathcal{A}} + \frac{(1-2\varepsilon)}{4}\left\|e^{2i\phi}P\right\|_{\mathcal{A}} + \frac{(1-2\varepsilon)}{4}\left\|e^{-2i\phi}P\right\|_{\mathcal{A}}\\
&+\frac{(1-2\varepsilon)^2}{2}\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{-2i\phi}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^2\right)\right\|_{\mathcal{A}}\\
&+\frac{1}{2}\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{2i\phi}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^2\right)\right\|_{\mathcal{A}} + (1-2\varepsilon)\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^2\right)\right\|_{\mathcal{A}}\\
\leq&(1-\varepsilon)^2\|P\|_{\mathcal{A}} + (1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)\omega_{\mathcal{A}}\left(\left(\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^2\right)\right) + (1-2\varepsilon)\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^2\right)\right\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

где $P = \left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}} T^{\star_{\mathcal{A}}} + T^{\star_{\mathcal{A}}}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}}$. Так как $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T^{\star_{\mathcal{A}}})$, $\|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A}}$ и $\omega_{\mathcal{A}}(T^{\star_{\mathcal{A}}}) = \omega_{\mathcal{A}}(T)$, беря супремум по $\phi \in \mathbb{R}$ получим результат. □

Недавно, в [26], авторы доказали следующие неравенства типа Боаса-Бельмана как для $\mathcal{A}$-скалярного произведения, так и для $\mathcal{A}$-полунормы. Прежде чем сформулировать этот результат, необходимо уточнить два обозначения, которые будут часто использоваться в дальнейшем. В частности, мы определяем:

$$t \leq a \times \begin{cases} b \\ c \\ d \end{cases} \quad \text{и} \quad t \leq a + \begin{cases} b \\ c \\ d \end{cases}$$

В первом случае имеют место неравенства $t \leq a \times b$, $t \leq a \times c$ и $t \leq a \times d$. Во втором случае имеем: $t \leq a + b$, $t \leq a + c$, $t \leq a + d$.

Лемма 2.1. *Пусть $x, y_1, \ldots, y_n$ – векторы из $\mathfrak{H}$ и $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Тогда имеют место неравенства:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i \langle y_i, x\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2 \leq \|x\|_{\mathcal{A}}^2 \times \begin{cases} \max\limits_{1\le i\le n} |c_i|^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \|y_i\|_{\mathcal{A}}^2; \\ \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \|y_i\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \textit{where} \ \ \alpha > 1, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1; \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^2 \max\limits_{1\le i\le n} \|y_i\|_{\mathcal{A}}^2, \end{cases}$$

$$+ \|x\|_{\mathcal{A}}^2 \times \begin{cases} \max\limits_{1\le i\ne j\le n} \{|c_i c_j|\} \sum\limits_{1\le i\ne j\le n} \left|\langle y_i, y_j\rangle_{\mathcal{A}}\right|; \\ \\ \left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^{\gamma}\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^{2\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}} \left(\sum\limits_{1\le i\ne j\le n} \left|\langle y_i, y_j\rangle_{\mathcal{A}}\right|^{\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}, \\ \textit{where} \ \ \gamma > 1, \ \ \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=1; \\ \\ \left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|\right)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^2\right] \max\limits_{1\le i\ne j\le n} \left|\langle y_i, y_j\rangle_{\mathcal{A}}\right|; \end{cases}$$

Замечание 2.3. *В случае $n = 2$ имеем следующие более простые неравенства:*

$$\left|c_1\langle y_1, x\rangle_{\mathcal{A}} + c_2\langle y_2, x\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2 \leq \|x\|_{\mathcal{A}}^2 \times \begin{cases} \max\left\{|c_1|^2, |c_2|^2\right\} \left(\|y_1\|_{\mathcal{A}}^2 + \|y_2\|_{\mathcal{A}}^2\right); \\ \\ \left(|c_1|^{2\alpha} + |c_2|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\|y_1\|_{\mathcal{A}}^{2\beta} + \|y_2\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \textit{где } \alpha > 1, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1; \\ \\ \left(|c_1|^2 + |c_2|^2\right) \max\left\{\|y_1\|_{\mathcal{A}}^2, \|y_2\|_{\mathcal{A}}^2\right\}, \end{cases}$$

$$+ 2\,|c_1 c_2|\, \|x\|_{\mathcal{A}}^2 \left|\langle y_1, y_2\rangle_{\mathcal{A}}\right|; \tag{2.6}$$

для комплексных чисел c_1, c_2 и векторов x, y_1, $y_2 \in \mathfrak{H}$.

Теорема 2.7. *Пусть* B, $C \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, *и* η, $\gamma \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\|\eta B + \gamma C\|_{\mathcal{A}}^2 \leq 2|\eta||\gamma|\omega_{\mathcal{A}}(C^{\star_{\mathcal{A}}}B) + \begin{cases} \max\left\{|\eta|^2, |\gamma|^2\right\}(\|B^{\star_{\mathcal{A}}}B + C^{\star_{\mathcal{A}}}C\|_{\mathcal{A}}); \\ \left(|\eta|^{2\alpha} + |\gamma|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|B\|_{\mathcal{A}}^{2\beta} + \|C\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ \left(|\eta|^2 + |\gamma|^2\right)\left(\left\|\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B + C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B - C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right). \end{cases} \tag{2.7}$$

Доказательство. При $c_1 = \eta$, $c_2 = \gamma$, $y_1 = By$ и $y_2 = Cy$ в (2.6) мы имеем:

$$\left|\left\langle(\eta B + \gamma C)y, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2 \leq \|x\|_{\mathcal{A}}^2 \times \begin{cases} \max\left\{|\eta|^2, |\gamma|^2\right\}\left(\|By\|_{\mathcal{A}}^2 + \|Cy\|_{\mathcal{A}}^2\right); \\ \left(|\eta|^{2\alpha} + |\gamma|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|By\|_{\mathcal{A}}^{2\beta} + \|Cy\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ \left(|\eta|^2 + |\gamma|^2\right)\max\left\{\|By\|_{\mathcal{A}}^2, \|Cy\|_{\mathcal{A}}^2\right\}, \end{cases}$$
$$+ 2|\eta||\gamma|\|x\|_{\mathcal{A}}^2\left|\left\langle By, Cy\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| \tag{2.8}$$

для всех x, $y \in \mathfrak{H}$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\|By\|_{\mathcal{A}}^2 + \|Cy\|_{\mathcal{A}}^2 &= \left\langle By, By\right\rangle_{\mathcal{A}} + \left\langle Cy, Cy\right\rangle_{\mathcal{A}} = \left\langle B^{\star_{\mathcal{A}}}By, y\right\rangle_{\mathcal{A}} + \left\langle C^{\star_{\mathcal{A}}}Cy, y\right\rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \left\langle(B^{\star_{\mathcal{A}}}B + C^{\star_{\mathcal{A}}}C)y, y\right\rangle_{\mathcal{A}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max\left\{\|By\|_{\mathcal{A}}^2, \|Cy\|_{\mathcal{A}}^2\right\} = \frac{1}{2}\left(\|By\|_{\mathcal{A}}^2 + \|Cy\|_{\mathcal{A}}^2\right) + \frac{1}{2}\left|\|By\|_{\mathcal{A}}^2 - \|Cy\|_{\mathcal{A}}^2\right| \\ &= \left\langle\left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B + C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y, y\right\rangle_{\mathcal{A}} + \left|\left\langle\left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B - C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y, y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|\end{aligned}$$

для всех x, $y \in \mathfrak{H}$. Из (2.8) получим

(2.9)

$$\left|\left\langle \left(\eta B+\gamma C\right)y,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^{2} \leq 2\left|\eta\right|\left|\gamma\right|\left\|x\right\|_{\mathcal{A}}^{2}\left|\left\langle C^{\star_{\mathcal{A}}}By,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|$$

$$+\left\|x\right\|_{\mathcal{A}}^{2}\times\begin{cases}\max\left\{\left|\eta\right|^{2},\left|\gamma\right|^{2}\right\}\left(\left\langle \left(B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right); \\ \\ \left(\left|\eta\right|^{2\alpha}+\left|\gamma\right|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left\|By\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}+\left\|Cy\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \text{ где } \ \alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1; \\ \\ \left(\left|\eta\right|^{2}+\left|\gamma\right|^{2}\right)\left\langle \left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}+\left|\left\langle \left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B-C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|.\end{cases}$$

Беря супремум в (2.9) относительно $\left\|x\right\|_{\mathcal{A}}=\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1$, получим, что

$$\left\|\eta B+\gamma C\right\|_{\mathcal{A}}^{2} = \sup_{\left\|x\right\|_{\mathcal{A}}=\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1}\left|\left\langle \left(\eta B+\gamma C\right)y,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^{2}$$

$$\leq\begin{cases}\max\left\{\left|\eta\right|^{2},\left|\gamma\right|^{2}\right\}\sup\limits_{\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1}\left(\left\langle \left(B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right); \\ \\ \left(\left|\eta\right|^{2\alpha}+\left|\gamma\right|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sup\limits_{\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1}\left(\left\langle B^{\star_{\mathcal{A}}}By,y\right\rangle_{\mathcal{A}}^{\beta}+\left\langle C^{\star_{\mathcal{A}}}Cy,y\right\rangle_{\mathcal{A}}^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \ \alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1; \\ \\ \left(\left|\eta\right|^{2}+\left|\gamma\right|^{2}\right)\left(\left\langle \left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}+\left|\left\langle \left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B-C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|\right),\end{cases}$$

$$+2\left|\eta\right|\left|\gamma\right|\sup_{\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1}\left|\left\langle C^{\star_{\mathcal{A}}}By,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|$$

$$\leq\begin{cases}\max\left\{\left|\eta\right|^{2},\left|\gamma\right|^{2}\right\}\sup\limits_{\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1}\left(\left\langle \left(B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right); \\ \\ \left(\left|\eta\right|^{2\alpha}+\left|\gamma\right|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sup\limits_{\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1}\left\|By\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}+\sup\limits_{\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1}\left\|Cy\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \ \alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1; \\ \\ \left(\left|\eta\right|^{2}+\left|\gamma\right|^{2}\right) \\ \times\left(\sup\limits_{\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1}\left\langle \left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}+\sup\limits_{\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1}\left|\left\langle \left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B-C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|\right),\end{cases}$$

$$+2\left|\eta\right|\left|\gamma\right|\sup_{\left\|y\right\|_{\mathcal{A}}=1}\left|\left\langle C^{\star_{\mathcal{A}}}By,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|$$

$$
= \begin{cases} \max\left\{|\eta|^2, |\gamma|^2\right\} \left(\|B^{\star_\mathcal{A}}B + C^{\star_\mathcal{A}}C\|_\mathcal{A}\right); \\ \\ \left(|\eta|^{2\alpha} + |\gamma|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\|B\|_\mathcal{A}^{2\beta} + \|C\|_\mathcal{A}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \ \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ \\ \left(|\eta|^2 + |\gamma|^2\right) \left(\left\|\frac{B^{\star_\mathcal{A}}B + C^{\star_\mathcal{A}}C}{2}\right\|_\mathcal{A} + \left\|\frac{B^{\star_\mathcal{A}}B - C^{\star_\mathcal{A}}C}{2}\right\|_\mathcal{A}\right), \end{cases}
$$
$$
+ 2|\eta||\gamma| \omega_\mathcal{A}\left(C^{\star_\mathcal{A}}B\right),
$$

что доказывает (2.7) и завершает доказательство. □

Применив теорему 2.7, докажем следующие неравенства:

Следствие 2.3. *Пусть* $T \in \mathfrak{L}_\mathcal{A}(\mathfrak{H})$ *и* $0 \le \varepsilon \le 1$. *Тогда*

$$
\|T\|^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})} \le 2|1 - 2\varepsilon| \omega_\mathcal{A}\left(T^2\right) \tag{2.10}
$$
$$
+ \begin{cases} \|TT^{\star_\mathcal{A}} + T^{\star_\mathcal{A}}T\|_\mathcal{A}; \\ \\ 2^{1/\beta}\left((1 - 2\varepsilon)^{2\alpha} + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} \|T\|_\mathcal{A}^2, \ \textit{где} \ \ \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ \\ \left((1 - 2\varepsilon)^2 + 1\right)\left(\left\|\frac{TT^{\star_\mathcal{A}} + T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A} + \left\|\frac{TT^{\star_\mathcal{A}} - T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A}\right). \end{cases}
$$

Доказательство. Беря в (2.7) $\eta = 1 - 2\varepsilon$, $\gamma = 1$, $B = T^{\star_\mathcal{A}}$ и $C = T$, получим:

$$
\|T\|^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})} \le 2|1 - 2\varepsilon| \omega_\mathcal{A}\left(T^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}}\right) \tag{2.11}
$$
$$
+ \begin{cases} \max\left\{(1 - 2\varepsilon)^2, 1\right\} \left(\|(T^{\star_\mathcal{A}})^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}} + T^{\star_\mathcal{A}}T\|_\mathcal{A}\right); \\ \\ \left((1 - 2\varepsilon)^{2\alpha} + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\|T^{\star_\mathcal{A}}\|_\mathcal{A}^{2\beta} + \|T\|_\mathcal{A}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \ \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ \\ \left((1 - 2\varepsilon)^2 + 1\right) \\ \times\left(\left\|\frac{(T^{\star_\mathcal{A}})^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}} + T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A} + \left\|\frac{(T^{\star_\mathcal{A}})^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}} - T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A}\right). \end{cases}
$$

Так как $\omega_\mathcal{A}(T^{\star_\mathcal{A}}) = \omega_\mathcal{A}(T)$ и $\|T^{\star_\mathcal{A}}\|_\mathcal{A} = \|T\|_\mathcal{A}$, легко проверить, что

$$
\omega_\mathcal{A}\left(T^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}}\right) = \omega_\mathcal{A}\left(\left(T^{\star_\mathcal{A}}\right)^2\right) = \omega_\mathcal{A}\left(T^2\right),
$$

следовательно, $\|T^{\star_\mathcal{A}}\|_\mathcal{A}^{2\beta} = \|T\|_\mathcal{A}^{2\beta}$. Аналогично, из (2.4) (или используя (1.1) вместе с $P_{\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}}T^{\star_\mathcal{A}} = T^{\star_\mathcal{A}}$), получаем, что

$$
\left\|\frac{(T^{\star_\mathcal{A}})^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}} - T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A} = \left\|\frac{TT^{\star_\mathcal{A}} - T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A}
$$

и

$$\left\|\frac{(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}+T^{\star_{\mathcal{A}}}T}{2}\right\|_{\mathcal{A}}=\left\|\frac{TT^{\star_{\mathcal{A}}}+T^{\star_{\mathcal{A}}}T}{2}\right\|_{\mathcal{A}}.$$

Тогда, в силу (2.11) получим (2.10), что завершает доказательство. □

Следствие 2.4. *Пусть* $T\in\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *и* $0\le\varepsilon\le 1$. *Тогда*

$$\max\left\{\left\|\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)\right\|_{\mathcal{A}}^2,\left\|\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)\right\|_{\mathcal{A}}^2\right\}\le 2\varepsilon(1-\varepsilon)\,\omega_{\mathcal{A}}\left(T^2\right)$$
$$+\begin{cases}\max\left\{\varepsilon^2,(1-\varepsilon)^2\right\}\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T+TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}};\\[2ex] 2^{1/\beta}\left(\varepsilon^{2\alpha}+(1-\varepsilon)^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\|T\|_{\mathcal{A}}^{\beta},\\ \textit{где }\alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\\[2ex] \left(\varepsilon^2+(1-\varepsilon)^2\right)\left[\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T+TT^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}+\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T-TT^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right].\end{cases}\tag{2.12}$$

Доказательство. Если в (2.7) возьмем $\eta=\varepsilon$, $\gamma=1-\varepsilon$, $B=T$ и $C=T^{\star_{\mathcal{A}}}$, будем иметь

$$\begin{aligned}\left\|\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)\right\|_{\mathcal{A}}^2&=\left\|\varepsilon T+(1-\varepsilon)\,T^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}}^2\\&\le 2\varepsilon(1-\varepsilon)\,\omega_{\mathcal{A}}\left((T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T\right)\\&+\begin{cases}\max\left\{\varepsilon^2,(1-\varepsilon)^2\right\}(\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T+(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}});\\[2ex] \left(\varepsilon^{2\alpha}+(1-\varepsilon)^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|T\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}+\|T\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},\\ \text{где }\ \alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\\[2ex] \left(\varepsilon^2+(1-\varepsilon)^2\right)\\ \times\left[\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T+(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}+\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T-(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right].\end{cases}\end{aligned}\tag{2.13}$$

Тогда в силу $\omega_{\mathcal{A}}(T^{\star_{\mathcal{A}}})=\omega_{\mathcal{A}}(T)$, $\|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}=\|T\|_{\mathcal{A}}$ и (2.13), получим первую част (2.12).

Для второй берем $\alpha = (1-\varepsilon)\,\mathrm{i}$, $\beta = \varepsilon \mathrm{i}$, $B = T$ и $C = T^{\star_{\mathcal{A}}}$ в (2.7) и находим, что

$$\left\|\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)\right\|_{\mathcal{A}}^{2} = \|(1-\varepsilon)\,(\text{-i}T) + \varepsilon(\mathrm{i}T^{\star_{\mathcal{A}}})\|_{\mathcal{A}}^{2} \le 2\varepsilon\,(1-\varepsilon)\,\omega_{\mathcal{A}}\left((T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} T\right)$$
$$+\begin{cases} \max\left\{\varepsilon^{2}, (1-\varepsilon)^{2}\right\}\left(\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}\right); \\[2ex] \left(\varepsilon^{2\alpha} + (1-\varepsilon)^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|T\|_{\mathcal{A}}^{2\beta} + \|T\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где} \quad \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\[2ex] \left(\varepsilon^{2} + (1-\varepsilon)^{2}\right) \\ \times\left[\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T - (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right], \end{cases}$$

что завершает доказательство. □

Теорема 2.8. *Пусть* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *и* $0 \le \varepsilon \le 1$. *Тогда*

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}^{2}(T) \le 2\omega_{\mathcal{A}}\left(\left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)$$
$$+\begin{cases} \left\|\left(\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T + \left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)\right\|_{\mathcal{A}}; \\[2ex] 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left\|\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta} + \left\|\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \textit{где} \quad \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\[2ex] 2\left[\left\|\frac{\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T + \left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T}{2}\right\|_{\mathcal{A}} \right. \\ \left. + \left\|\frac{\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T - \left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right]. \end{cases} \tag{2.14}$$

Доказательство. Из (2.9) для $y = x$ мы имеем для $\eta = 1$, $\gamma = \mathrm{i}$, $B = \mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T$ и $C = \mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T$, что

$$\left|\left\langle\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T + \mathrm{i}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^{2}$$
$$\le \|x\|_{\mathcal{A}}^{2} \times \begin{cases} \left\langle\left(\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T + \left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}; \\[2ex] 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left\|\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}Tx\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta} + \left\|\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}Tx\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где} \quad \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\[2ex] 2\left[\left\langle\left(\frac{\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T + \left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T}{2}\right)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}} \right. \\ \left. + \left|\left\langle\left(\frac{\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T - \left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T}{2}\right)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|\right], \end{cases}$$
$$+\,2\,\|x\|_{\mathcal{A}}^{2}\left|\left\langle\left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}Tx, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|$$

для всех $x \in \mathfrak{H}$.

Взяв супремум по $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$, получаем (2.14). $\square$

Введем оператор T_ε, определенный для исследования взаимосвязи между T и его $\mathcal{A}$-сопряженным $T^{\star_{\mathcal{A}}}$. Варьируя ε, мы можем исследовать, как это взаимодействие влияет на свойства оператора, что приводит к важным результатам, помогающим описать верхние границы $(\varepsilon, \mathcal{A})$-взвешенного числового радиуса.

Определение 2.2. *Для* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *и* $0 \leq \varepsilon \leq 1$. *Положим* $T_\varepsilon := (1-2\varepsilon)\, T^{\star_{\mathcal{A}}} + T$.

Рассматривая оператор T_ε, установим следующую теорему, связанную величиной $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$.

Теорема 2.9. *Пусть* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *и* $0 \leq \varepsilon \leq 1$. *Тогда*

$$\omega^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \leq \frac{1}{2}\omega_{\mathcal{A}}\left(T_\varepsilon^2\right) + \begin{cases} \frac{1}{4}\left\|(T_\varepsilon)^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}}; \\ \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon - T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right). \end{cases} \tag{2.15}$$

Доказательство. Из определения $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$ и тождества (1.3), имеем:

$$\omega^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \omega^2_{\mathcal{A}}(T_\varepsilon) = \frac{1}{4}\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\|e^{\mathrm{i}\phi}T_\varepsilon + e^{-\mathrm{i}\phi}T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|^2_{\mathcal{A}}. \tag{2.16}$$

Применив неравенство (2.7) для $\eta = e^{\mathrm{i}\phi}$, $\gamma = e^{-\mathrm{i}\phi}$, $B = T_\varepsilon$ и $C = T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}$, получим:

$$\begin{aligned} \left\|e^{\mathrm{i}\phi}T_\varepsilon + e^{-\mathrm{i}\phi}T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|^2_{\mathcal{A}} &\leq 2\omega_{\mathcal{A}}\left((T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon\right) \\ &+ \begin{cases} \left\|(T_\varepsilon)^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + (T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}};\ 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|T_\varepsilon\|^{2\beta}_{\mathcal{A}} + \|T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\|^{2\beta}_{\mathcal{A}}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ 2\left(\left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + \left(T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon - \left(T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right). \end{cases} \\ &= 2\omega_{\mathcal{A}}\left(T_\varepsilon^2\right) + \begin{cases} \left\|(T_\varepsilon)^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}}; \\ 2\left(\left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon - T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.16) вытекает (2.15), что завершает доказательство.. $\square$

Благодарность. Авторы искренне признательны рецензенту за его/её ценные замечания и предложения, которые значительно улучшили эту статью.

Abstract. The concept of the weighted $\mathcal{A}$-numerical radius was recently defined, where $\mathcal{A}$ is assumed to be a positive operator. In this paper, we introduce another weighted $\mathcal{A}$-numerical radius, denoted by $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$, for operators in semi-Hilbert spaces. We establish some basic properties and inequalities for $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$, which generalize earlier results about $\omega_{\mathcal{A}}(\cdot)$. Specifically, we derive new identities for the $\mathcal{A}$-numerical radius and provide further comparisons between the $\mathcal{A}$-numerical radius and the operator $\mathcal{A}$-seminorm of weighted real and weighted imaginary parts. Additionally, we utilize Boas-Bellman type inequalities in the context of semi-Hilbert spaces to derive upper bounds for $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$. Several applications are also discussed.

Список литературы

[1] M. L. Arias, G. Corach and M.C. Gonzalez, "Metric properties of projections in semi-Hilbertian spaces", Integral Equ. Oper. Theory, **62**, no. 1, 11 – 28 (2008).

[2] G. Fongi and M.C. Gonzalez, "Partial isometries and pseudoinverses in semi-Hilbertian spaces", Linear Algebra Appl., **495**, 324 – 343 (2016).

[3] K. Feki, "Spectral radius of semi-Hilbertian space operators and its applications", Ann. Funct. Anal., **11**, 929 – 946 (2020).

[4] R. G. Douglas, "On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space", Proc. Am. Math. Soc., **17**, 413 – 416 (1966).

[5] M. L. Arias, G. Corach, M. C. Gonzalez, "Partial isometries in semi-Hilbertian spaces", Linear Algebra Appl., **428**, no. 7, 1460 – 1475 (2008).

[6] M. L. Arias, G. Corach, M. C. Gonzalez, "Metric properties of projections in semi-Hilbertian spaces", Integral Equ. Oper. Theory, **62**, 11 – 28 (2008).

[7] M. S. Moslehian, M. Kian and Q. Xu, "Positivity of 2×2 block matrices of operators", Banach J. Math. Anal., **13**, no. 3, 726 – 743 (2019).

[8] H. Baklouti, K. Feki and O. A. M. Sid Ahmed, "Joint numerical ranges of operators in semi-Hilbertian spaces", Linear Algebra Appl., **555**, 266 – 284 (2018).

[9] A. Zamani, "A-numerical radius inequalities for semi-Hilbertian space operators", Linear Algebra Appl., **578**, 159 – 183 (2019).

[10] A. Abu-Omar and F. Kittaneh, "Notes on some spectral radius and numerical radius inequalities", Studia Math., **227**, no. 2, 97 – 109 (2015).

[11] A. Abu-Omar and F. Kittaneh, "A generalization of the numerical radius", Linear Algebra Appl. **569**, 323 – 334 (2019).

[12] M. W. Alomari, M. Sababheh, C. Conde and H. R. Moradi, "Generalized Euclidean operator radius", Georgian Math. J. **31**, no. 3, 369 – 380 (2024).

[13] H. Baklouti, K. Feki and S. A. Ould Ahmed Mahmoud, "Joint normality of operators in semi-Hilbertian spaces", Linear Multilinear Alg., **68**, no. 4, 845 – 866 (2020).

[14] C. Conde, F. Kittaneh, H. R. Moradi and M. Sababheh, "Numerical radii of operator matrices in terms of certain complex combinations of operators", Georgian Math. J., *31*, no. 4, 575 – 586 (2024).

[15] S. S. Dragomir, Inequalities for the Numerical Radius of Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer Briefs in Math. Springer, Cham (2013).

[16] O. Hirzallah, F. Kittaneh and K. Shebrawi, "Numerical radius inequalities for certain 2×2 operator matrices", Integral Equ. Oper. Theory, **71**, no. 1, 129 – 147 (2011).

[17] O. Hirzallah, F. Kittaneh and K. Shebrawi, "Numerical radius inequalities for certain 2×2 operator matrices", Studia Math., **210**, no. 2, 99 – 114 (2012).

[18] Z. Heydarbeygi, M. Sababheh, H. Moradi, "A convex treatment of numerical radius inequalities", Czechoslovak Math J., **72**, no. 2, 601 – 614 (2022).

[19] F. Kittaneh, M. S. Moslehian and T. Yamazaki, "Cartesian decomposition and numerical radius inequalities", Linear Algebra Appl., **471**, 46 – 53 (2015).

[20] W. Majdak, N. A. Secelean and L. Suciu, "Ergodic properties of operators in some semi-Hilbertian spaces", Linear Multilinear Alg., **61**, no. 2, 139 – 159 (2013).

[21] M. S. Moslehian and M. Sattari, "Inequalities for operator space numerical radius of 2×2 block matrices", J. Math. Phys. **57**, 015201 (2016).
[22] M. Sababheh, C. Conde and H. R. Moradi, "A convex-block approach to numerical radius inequalities", Funct. Anal. Its Appl. **57**, no. 1, 26 – 30 (2023).
[23] M. Sababheh, D. S. Djordjević and H. R. Moradi, "Numerical Radius and Norm Bounds via the Moore-Penrose Inverse", Complex Anal. Oper. Theory, **18**, 117 (2024).
[24] F. Gao and X. Liu, "Inequalities for the weighted A-numerical radius of semi-Hilbertian space operators", Oper. Matrices, **17**, no. 2, 343 – 354 (2023).
[25] A. Sheikhhosseini, M. Khosravi and M. Sababheh, "The weighted numerical radius", Ann. Funct. Anal. **13**, 3 (2022).
[26] N. Altwaijry, S. S. Dragomir and K. Feki, New Results on Boas–Bellman-Type Inequalities in Semi-Hilbert Spaces with Applications, Axioms **12**, 638p. (2023).

Поступила 10 октября 2024

После доработки 28 декабря 2024

Принята к публикации 15 января 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 4, 2025, стр. 23 – 44.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ

Г. А. КАРАГУЛЯН, В. Г. КАРАГУЛЯН

Институт математики НАН РА[1]
Ереванский государственный университет
E-mails: *g.karagulyan@gmail.com*; *vahekar2000@gmail.com*

Аннотация. Набор конечных множеств $\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ назовем двойным покрытием, если любой элемент $a \in \cup_{k=1}^{p} A_k$ содержится точно в двух множествах этого набора. Для фиксированных натуральных чисел l и p, пусть $\mu_{l,p}$ есть количество классов эквивалентности двойных покрытий с $\#(A_k) = l$, $k = 1, 2, \dots, p$. Исследуется асимптотическое поведение величины $\mu_{l,p}$ при $p \to \infty$. Применив полученные результаты, предлагается альтернативный подход к гиперконтрактивному неравенству Бонами-Киенера.

MSC2020 numbers: 05A17; 05A20; 05B40; 42C05; 60G42.

Ключевые слова: двойное покрытие; асимптотическая оценка; хаос Радемахера; безусловная сходимость.

1. Введение

Будем рассматривать комбинаторный объект двойного покрытия, который частично связан с теорией разбиений и с теорией графов. Теория разбиений имеет богатую историю, которая детально рассматривается в книге Г. Андревс [3]. Разбиение натурального числа n это есть конечная возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_m$ такая, что $\sum_{k=1}^{m} n_k = n$. Функция разбения $\nu(n)$ это есть количество всевозможных разбиений числа n. Одной из выдающийся достижений теории разбиений есть явная формула $\nu(n)$, которая была почти завершена Харди и Рамануджаном и полностью завершена Радемахером (см. [3], Теорема 5.1). Эта формула не имеет простую форму, а задается в виде бесконечного ряда, содержащего некоторые тригонометрические суммы. Известна также асимптотическая формула

$$\nu(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\left(\frac{2n}{3}\right)^{1/2}\right) \tag{1.1}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию и науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения (проект № 21AG-1A045)

доказанная Мейнардусом (см. [3], Теорема 6.2), которую мы будем использовать ниже.

Данный набор конечных множеств A_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, произвольной природы (не обязательно разные) определяет набор-множеств, который обозначим $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$.

Определение 1.1. *Два набора множеств $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$ равны, если существует взаимно-однозначное отображение σ на $\{1, 2, \ldots, p\}$ такое, что $A_{\sigma(k)} = B_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, p$. Скажем, что наборы множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны, если существует взаимно-однозначное отображение*

$$\phi : \bigcup_{k=1}^{p} A_k \to \bigcup_{k=1}^{p} B_k$$

такое, что $\{\phi(A_1), \ldots, \phi(A_p)\} = \{B_1, \ldots, B_p\}$. Соотношения равенства и изоморфности для двух наборов-множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будут обозначены соответственно через $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.

Отметим, что символ $\sim$ здесь определяет соотношение эквивалентности. Пусть $[A_1, A_2, \ldots, A_p]$ есть класс эквивалентности (E-класс) порожденный набором множеств $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$. Соответственно, если $\mathcal{D}$ есть некоторое семейство наборов множеств, то мы обозначим через $[\mathcal{D}]$ E-классы, порожденные элементами семейства $\mathcal{D}$.

Данные наборы множеств $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ определяют новый набор множеств, обозначенный $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$, который состоит из всех элементов наборов множеств $\mathcal{A}_k$.

Определение 1.2. *Набор множеств $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ назовем двойным покрытием, если любой элемент $a \in \cup_{k=1}^{p} A_k$ содержится ровно в двух множествах A_k. Если же любой такой элемент a покрыт четным количеством множеств A_k, то скажем, что $\mathcal{A}$–четное покрытие.*

Определение 1.3. *Набор множеств $\mathcal{A}$ называется связным, если для любых двух элементов $A, B \in \mathcal{A}$ существует последовательность множеств $A = E_0, E_1, \ldots, E_m = B$ такая, что $E_j \in \mathcal{A}$, $E_j \cap E_{j+1} \neq \varnothing$ для всех $j = 0, 1 \ldots, m-1$.*

Определение 1.4. *Любой набор множеств $\mathcal{A}$ единственным образом представим в виде $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$, где каждый $\mathcal{A}_k$ связный. В таком случае мы скажем, что $\mathcal{A}_k$ является связным компонентом $\mathcal{A}$. Будем говорить, что набор множеств $\mathcal{A}$ стандартен, если все E-классы связных компонент $[\mathcal{A}_k]$ разные.*

Обозначим через $\#(A)$ количество элементов конечного множества A. Для данных целых чисел $l \geq 2$ и $p \geq 2$ рассматривается класс двойных покрытий

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}, \tag{1.2}$$

удовлетворяющие условию $\#(A_k) = l$. Очевидно, что количество разных Е-классов таких двойных покрытий есть число, зависящее только от l и p. Обозначим это число через $\mu_{l,p}$. Количество Е-классов стандартных двойных покрытий обозначим через $\mu_{l,p}$(стандарт). Для количества $\mu_{l,p}$ целого семейства двойных покрытий иногда будем использовать обозначение $\mu_{l,p}$(полный). Таким же образом определим более широкий класс двойных покрытий (1.2), где A_k удовлетворяют $1 \leq \#(A_k) \leq l$. Назовем покрытия первого и второго типа, (l,p) и $(l,p)^*$ покрытиями соответственно. Для количества Е-классов $(l,p)^*$ двойных покрытий будем использовать обозначение $\mu^*_{l,p}$(полный).

Величины $\mu_{l,p}$ и $\mu^*_{l,p}$ можно рассматривать как объекты в теории мультиграфов. А именно, $\mu_{l,p}$ ($\mu^*_{l,p}$)–количество мультиграфов, имеющие p вершин степени l. Действительно, каждому двойному покрытию (1.2) мы связываем мультиграф с вершинами A_k, где количество сторон, соединяющих две вершины A_k и A_j равно количеству элементов пересечения $A_k \cap A_j$. Фактически, элементы объединения $\cup_j A_j$ являются сторонами этого графа. Рассмотрим пример двойного покрытия типа $(3,6)$,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1,2,3\},\\
A_2 &= \{3,4,5\},\\
A_3 &= \{4,5,6\},\\
A_4 &= \{6,7,8\},\\
A_5 &= \{7,8,9\},\\
A_6 &= \{1,2,9\},
\end{aligned}$$

изображеный в Рис.1.

Двойные покрытия с параметром $l = 2$ имеют простую характеризацию в отличие от случая $l > 2$. Действительно, сначала обнаружим, что все связные $(2,p)$ двойные покрытия (1.2) изоморфны циклическому набору множеств $\{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{p-1,p\},\{p,1\}\}$. Если двойное покрытие (1.2)–произвольное, то мы имеем $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$, где $\mathcal{A}_k$–компоненты связностей $\mathcal{A}$. Если

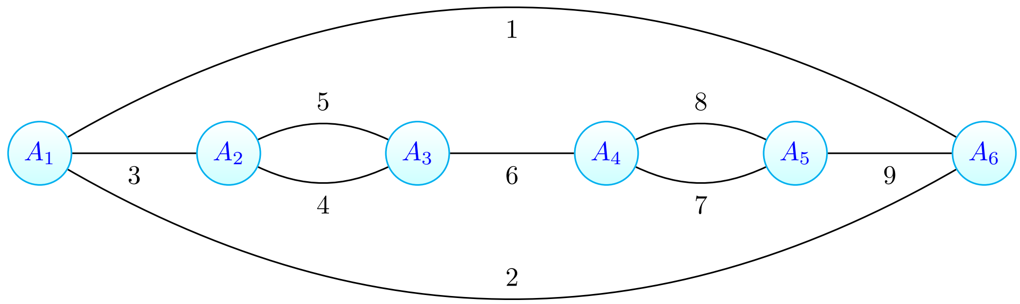

Рис. 1. мультиграф типа $(3,6)$.

$p_k = \#(\mathcal{A}_k)$, то имеем $p_k \geq 2$ и $p_1 + \ldots + p_n = p$. Таким образом мы заключаем, что $\mu_{2.p}$ есть количество разбиений числа p на сумму целых чисел $p_k \geq 2$. Отсюда легко проверить, что

$$\mu_{2,p} = \nu(p) - \nu(p-1), \tag{1.3}$$

где $\nu(n)$ есть функция разбиения (1.1) (см. Рис. 2, пример двойного покрытия с тремя компонентами связности). Далее, основываясь на (1.1) и (1.3), после простых вычислений можно установить следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Имеет место соотношение*

$$\mu_{2,p} \sim \frac{\pi\sqrt{2}}{24p\sqrt{p}} \exp\left(\pi\left(\frac{2p}{3}\right)^{1/2}\right) \text{ при } p \to \infty.$$

В работе исследуется асимптотическое поведение величин $\mu_{l,p}$ и $\mu^*_{l,p}$ при $p \to \infty$ когда $l > 2$. Основываясь на (1.3) и на вышеупомянутую формулу Харди-Рамануджан-Радемахер для $\nu(n)$, можно обнаружить, что $\mu_{2,p}$ не может иметь простой явной формулы. Случай $l > 2$ гораздо сложнее чем случай $l = 2$, и нам неизвестно точной асимптотической формулы для $\mu_{l,p}$ при $l > 2$. В работе доказывается следующая оценка, которая является главным результатом работы.

Теорема 1.2. *Если $l, p \geq 2$ целые, такие, что pl–четно, то*

$$(a(l))^p \cdot p^{p(l/2-1)} \leq \mu_{l,p}(\textit{стандарт}) \leq \mu^*_{l,p}(\textit{полный}) \leq (b(l))^p \cdot p^{p(l/2-1)}, \tag{1.4}$$

где $a(l)$ и $b(l)$ положительные постоянные, зависящие от l.

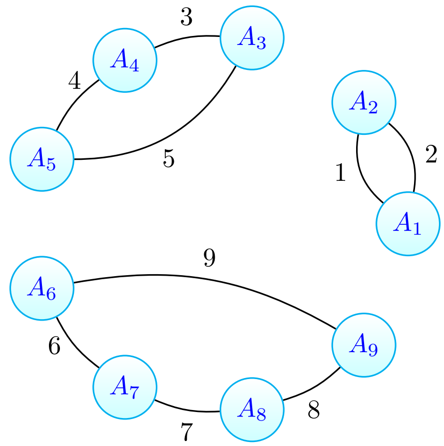

Рис. 2. мультиграф с $l = 2$, $p = 9$.

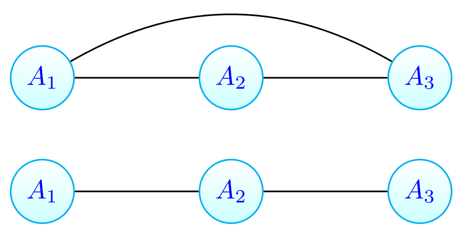

Рис. 3. два связных мультиграфа типа $(2, 3)^*$.

Используя эти оценки, дается альтернативное доказательство одного неравенства, содержащее Радемахер хаос суммы, которое было независимо доказано Бонами [1] и Киенер [2] (см. также [4] или [5]). Пусть $\{r_n\}_{n\geq 1}$ есть последовательность функций Радемахера $r_n(x) = \text{sign}\,(\sin 2^n \pi x)$. Класическое неравенство Хинчина утверждает, что для любого параметра $0 < p < \infty$, существуют постоянные A_p, B_p такие, что

$$A_p \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k(x) \right\|_p \leq B_p \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2}. \tag{1.5}$$

Неравенство Хинчина–хорошо известный объект в анализе и в теории вероятностей, имеющее разные обобщения и применения. Специальный случай этого неравенства впервые был установлен Хинчиным [6], кто установил оценку (1.5) с $B_p = \sqrt{p/2+1}$ и $p \geq 2$. Дальнейшее исследование этого неравенства дается в работах Литтлвуда [7], Пели и Зигмунда [8]. Пусть A_p и B_p есть наилучшие постоянные, для которых выполняется неравенство (1.5). Очевидно $A_p = 1$ при $2 \le p < \infty$ и $B_p = 1$ для всех $0 < p \le 2$. В 1961г; Стечкин [9] установил, что $B_p = ((p-1)!!)^{1/p}$ для четных параметров $p \ge 4$, что в дальнейшем было распространено для всех действительных $p \ge 3$ Юнгом в [10]. Решив известную проблему Литтвуда (см. [7]) Шарек [11] доказал, что $A_1 = 1/\sqrt{2}$. В 1982 году Хагерап [12] изобрел новый метод, позволяющий найти точные постоянные неравенства Хинчина для всех остальных случаев, при этом заново доказывая предыдущие результаты. Он доказал, что

$$B_p = 2^{1/2}\big(\Gamma(p+1/2)/\pi\big)^{1/p}, \quad 2 < p < \infty,$$

и

$$A_p = \begin{cases} 2^{1/2-1/p} & \text{при} \quad 0 < p < p_0, \\ 2^{1/2}\big(\Gamma(p+1/2)/\sqrt{\pi}\big)^{1/p} & \text{при} \quad p > p_0, \end{cases}$$

где $1 < p_0 < 2$ есть решение уравнения $\Gamma(p+1/2) = \sqrt{\pi}/2$.

Рассмотрим ортонормальные системы, порожденные произведениями фиксированного количества функций Радемахера. Для конечного множества $A \subset \mathbb{N}$ обозначим

$$w_A(x) = \prod_{k\in A} r_k(x).$$

Напомним, что такие произведения порождают классическую ортонормированную систему Уолша $W = \{w_A : A \subset \mathbb{N}\}$. Для данного целого $l \ge 2$ обозначим $\mathcal{Z}_l = \{A \subset \mathbb{N} : \#(A) = l\}$ и рассмотрим подсистему $W_l = \{w_A : A \in \mathcal{Z}_l\} \subset W$ системы Уолша образованную l-кратными произведениями функций Радемахера. Иногда систему W_l называют Радемахер хаос. Кратную числовую последовательность $b = \{b_A : A \in \mathcal{Z}_l\}$ с нормой $\|b\| = \big(\sum |b_A|^2\big)^{1/2}$ назовем конечной, если она содержит только конечное число ненулевых членов. Доказывается следующая оценка для Радемахер хаос сумм.

Теорема 1.3. *Если $l, p \ge 2$ целые, а p – четное число, то для любой последовательности конечного типа $\{b_A : A \in \mathcal{Z}_l\}$ имеем*

$$\frac{\big(p!\mu_{l,p}(\textit{стандарт})\big)^{1/p}}{2\sqrt{3}} \le \sup_{\|b\|\le 1}\Big\|\sum_{A\in\mathcal{Z}_l} b_A w_A\Big\|_p \le \sqrt{l!}\cdot\big(p!\mu_{l,p}(\textit{полный})\big)^{1/p}. \tag{1.6}$$

Из теорем 1.2 и 1.3 немедленно следует гиперконтракт неравенство Бонами-Киенера, которое есть обобщение неравенства Хинчина для Радемахер хаос сумм.

Следствие 1.1 (Бонами-Киенер, [1, 2])**.** *Пусть $l \geq 2$–целое, а $p > 2$–четное число. Тогда для любой последовательности конечного типа $b = \{b_A : A \in \mathcal{Z}_l\}$, имеет место неравенство*

$$c_l \cdot p^{l/2} \leq \sup_{\|b\| \leq 1} \left\| \sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A \right\|_p \leq C_l \cdot p^{l/2}, \tag{1.7}$$

где $C_l > c_l > 0$–постоянные, зависящие только от l.

Замечание 1.1. *Фактически, оригинальная оценка Бонами-Киенера это неравенство*

$$\sup_{\|b\| \leq 1} \left\| \sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A \right\|_p \leq (p-1)^{l/2},$$

которое имеет некоторое улучшение при четных $p > 2$ (см. упражнения 9.37 и 9.38 из [13]).

2. Доказательство Теоремы 1.2

Нам понадобятся несколько лемм. В этом параграфе $a \lesssim b$ будет означать неравенство $a \leq (c(l))^p \cdot b$, где $c(l)$–постоянная, зависящая только от l. Запись $a \asymp b$ означает одновременное выполнение соотношений $a \lesssim b$ и $b \lesssim a$. Обозначим $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ и пусть π_k есть семейство всех взаимно-однозначных отображений (перестановок) $\sigma : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$. В случае четной lp обозначим через $\mathcal{D}_{l,p}$ и $\mathcal{D}^*_{l,p}$ семейства двойных покрытий $\{A_1, \ldots, A_p\}$, $A_j \subset \mathbb{N}_{pl/2}$, удовлетворяющие $\#(A_j) = l$ и $\#(A_j) \leq l$, соответственно. Очевидно, что каждое двойное покрытие (1.2) имеет свой изоморфный образ в $\mathcal{D}^*_{l,p}$. Поэтому можем писать $\mu^*_{l,p} = \#([\mathcal{D}^*_{l,p}])$. Будем рассматривать разные подклассы $\mathcal{D}_{l,p}$, отметив характер наборов множеств такого или иного подкласса. Например, подсемейство стандартных наборов множеств из $\mathcal{D}_{l,p}$ обозначим через $\mathcal{D}_{l,p}$(стандарт), также записывая $\mu_{l,p}$(стандарт) $= \#([\mathcal{D}_{l,k}$(стандарт)$])$. Для целого семейства $\mathcal{D}_{l,p}$ иногда будем использовать обозначение $\mathcal{D}_{l,p}$(полный).

Лемма 2.1. *Если lp–четное число, то имеем*

$$p^{p(l-1)} \lesssim \#(\mathcal{D}_{l,p}(\textit{полный})) \leq \#(\mathcal{D}^*_{l,p}(\textit{полный})) \lesssim p^{p(l-1)}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Параллельно с $\mathcal{D}^*_{l,p}$ ($\mathcal{D}_{l,p}$) будем рассматривать семейство $\bar{\mathcal{D}}^*_{l,p}$ ($\bar{\mathcal{D}}_{l,p}$) упорядоченных наборов $(A_1, \ldots, A_p)$ таких, что $\{A_1, \ldots, A_p\} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$ ($\mathcal{D}_{l,p}$).

Данное двойное покрытие $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_p\} \in \mathcal{D}_{l,p}$ и перестановка $\sigma \in \pi_p$ порождают другой упорядоченный набор

$$(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(p)}) \in \bar{\mathcal{D}}^*_{l,p}. \tag{2.2}$$

Очевидно, что количество разных таких упорядоченных наборов имеет верхнюю оценку $p!$ и эта грань достижима когда все множества A_j разные. С другой стороны заметим, что такие перестановки σ могут порождать по меньшей мере $p!/2^{p/2}$ разных упорядоченных наборов (2.2) (p может быть и четным). Действительно, так как $\mathcal{A}$ есть двойное покрытие, исключается равенство трех разных множеств A_j. Следовательно такая нижняя грань достигается, когда каждое множество A_j имеет себе равную пару $A_{j'}$, т.е. $A_j = A_{j'}$. Поэтому количество перестановок порождающих один и тот же упорядоченный набор в (2.1) не может быть больше чем $2^{p/2}$. Отсюда вытекает. что существует по меньшей мере $p!/2^{p/2}$ разных упорядоченных наборов, которые могут получится в (2.1). Таким образом, мы заключаем

$$\frac{\#(\bar{\mathcal{D}}^*_{l,p})}{p!} \le \#(\mathcal{D}^*_{l,p}) \le \frac{2^{p/2}\#(\bar{\mathcal{D}}^*_{l,p})}{p!}, \tag{2.3}$$

такое же неравенство имеет место и для $\bar{\mathcal{D}}_{l,p}$. Сначала докажем верхнюю оценку в (1.4). Рассмотрим декартово произведение $G_{l,p} = \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_{pl/2}$. Для натуральных чисел $1 \le l_j \le l$ случайным образом выберем множества $B_j \subset G_{l,p}$, $j = 1, 2, \dots, p$, так, что $\#(B_j) = l_j$. Очевидно, что количество таких выборов упорядоченных наборов ровно

$$\binom{pl}{l_1} \cdot \binom{pl - l_1}{l_2} \dots \binom{pl - l_1 - \dots - l_{p-1}}{l_p} = \frac{(pl)!}{(l!)^p} \lesssim p^{pl}.$$

Пусть $(B_1, \dots, B_p)$ есть один из таких выборов и предположим, что $A_j \subset \mathbb{N}_{pl/2}$ есть проекции множеств B_j, $j = 1, 2, \dots, p$, на $\mathbb{N}_{pl/2}$. Легко усмотреть, что среди таких множеств получаем все упорядоченные наборы $(A_1, \dots, A_p) \in \bar{\mathcal{D}}^*_{l,p}$ с $\#(B_j) = l_j$. С другой стороны количество выборов $1 \le l_j \le l$ равно l^p. Отсюда мы заключаем $\#(\bar{\mathcal{D}}^*_{l,p}) \lesssim p^{pl}$. Комбинируя это с правым неравенством в (2.3), мы получаем верхнюю оценку (2.1).

Для доказательства нижней оценки в (2.1), сначала мы предположим, что p четно. Далее мы рассмотрим только упорядоченные наборы $(A_1, \dots, A_p) \in \bar{\mathcal{D}}_{l,p}$, где $\{A_1, \dots, A_{p/2}\}$ и $\{A_{p/2+1}, \dots, A_p\}$ отдельно формируют разбиение для $\mathbb{N}_{pl/2}$. Количество таких упорядоченных наборов $(A_1, \dots, A_p)$ ровно $\left(\frac{(pl/2)!}{(l!)^{p/2}}\right)^2$. Поэтому имеем оценку

$$\#(\bar{\mathcal{D}}_{l,p}) \geq \left(\frac{(pl/2)!}{(l!)^{p/2}}\right)^2 \gtrsim p^{pl},$$

которая вместе с (2.3) дает нижнюю оценку (2.1). Если p нечетно и $p = 2t+1$, то l должно быт четным. Рассмотрим наборы $(A_1, \dots, A_p) \in \bar{\mathcal{D}}_{l,p}$, где каждый из двух наборов множеств $\{A_1, \dots, A_t\}$ и $\{A_{t+1}, \dots, A_{2t}\}$ состоит из попарно непересекающихся множеств из $\mathbb{N}_{pl/2}$. Тогда множества

$$A_{2t+1} \cap \left(\cup_{k=1}^{t} A_k\right), \quad A_{2t+1} \cap \left(\cup_{k=t+1}^{2t} A_k\right)$$

непересекаются и имеют ровно $l/2$ элемент. Используя такой же аргумент, можно получить, что количество таких упорядоченных наборов равно

$$\binom{pl/2}{l}\binom{l}{l/2}\left(\frac{(tl)!}{(l!)^t}\right)^2 \gtrsim p^{pl}.$$

Отсюда аналогичным образом получим $\#(\bar{\mathcal{D}}_{l,p}) \gtrsim p^{pl}$. Итак, используя неравенство (2.3), мы получим нижнюю оценку (2.1). □

Лемма 2.2. *Если $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_p\} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$(стандарт), то количество перестановок $\sigma \in \pi_{pl/2}$, удовлетворяющих*

$$\{\sigma(A_1), \sigma(A_2), \dots, \sigma(A_p)\} = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}, \tag{2.4}$$

не превосходит $(3l!)^{p/2}$.

Доказательство. Сначала мы предположим, что набор $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_p\} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$ связен. Используя связность, можно задавать новую нумерацию $B_1, B_2, \dots, B_p$ элементов $\mathcal{A}$ так, что

$$B_{k+1} \cap \left(\cup_{j=1}^{k} B_j\right) \neq \varnothing, \quad k = 1, 2 \dots, p-1.$$

Далее обозначим

$$B_1^* = B_1, \quad B_k^* = B_k \setminus \cup_{j=1}^{k-1} B_j, \quad k \geq 2,$$
$$l_k = \#(B_k^*).$$

Возможно некоторые l_k могут быть нулями и, очевидно, имеем

$$\sum_{k=1}^{p} l_k = pl/2.$$

Пусть σ есть случайным образом выбранная перестановка, удовлетворяющая (2.4). Заметим, что ее можно реализовать на B_1 не больше чем $p \cdot (l)!$ разными способами. Действительно, для σ-образа B_1 имеем p разных возможностей, так как по (2.4) он может совпадать с одним из множеств $A_1, A_2, \dots, A_p$. Определив образ B_1, σ над элементами B_1 можно реализовать $l!$ разными способами. Таким образом, мы получим не больше чем $p \cdot (l)!$ разных реализаций σ на B_1. По индукции предположим, что σ уже определена на $\cup_{k=1}^m B_k$. Тогда нам сначала надо определить σ-образ B_{m+1} равный одному из элементов $\mathcal{A}$, а затем значения σ над элементами множества $B_{m+1} \cap (\cup_{k=1}^m B_k)$. Поэтому для завершения определения σ на B_{m+1} остается только реализовать σ на B_{m+1}^*, для которого мы имеем не более чем $(l_{m+1})!$ разных возможностей. Отсюда мы заключаем, что количество всевозможных реализаций σ удовлетворяющий (2.4) в целом не превосходит

$$p \cdot \prod_{k=1}^{p} (l_k)! \le p \cdot (l!)^{p/2}, \tag{2.5}$$

и нам только остается показать последнее неравенство. Для этого мы будем последовательно использовать факт, что любое произведение $t!s!$ с $0 \le s \le t \le l$ не превосходит $u!v!$, где $0 \le u \le v \le l$, $u + v = t + s$ и одно из u или v равно 0 или l. Если p четное число, то применив упомянутое замечание, можно усмотреть, что левая часть (2.5) достигает своего наибольшего значения когда каждый из l_k равно 0 или l. Таким образом мы будем иметь $l!$ в количестве $p/2$ и $0! = 1$ в количестве $p/2$. Итак мы получим (2.5). Если p–нечетное число, тогда l-четное, то своего наибольшего значения (2.5) достигает, если мы имеем $l!$ в количестве $(p-1)/2$, в количестве $(p-1)/2$ имеем $0!$ и единственное $(l/2)!$. Отсюда мы снова получаем

$$p \cdot \prod_{k=1}^{p} (l_k)! \le p(l!)^{(p-1)/2}(l/2)! \le p \cdot (l!)^{p/2}.$$

Теперь предположим, что $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s\}$ общий набор множеств, где $\mathcal{A}_k$ есть классы связностей для $\mathcal{A}$. По определению все E-классы $[\mathcal{A}_k]$ разные. Отсюда любая перестановка σ, удовлетворяющая (2.4) действует внутри каждого компонента связности $\mathcal{A}_k$, т.е. $\sigma(\mathcal{A}_k) = \mathcal{A}_k$. Мы также имеем $\#(\mathcal{A}_k) = p_k \ge 2$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p$. Отсюда, применив оценку (2.5) над каждым компонентом связности, получим следующую верхнюю оценку для количества таких перестановок (2.4). А именно,

$$\prod_{k=1}^{n} p_k (l!)^{p_k/2} = (l!)^{p/2} \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

С другой стороны, применив неравенство Коши, мы получим

$$\prod_{k=1}^{n} p_k \le \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{n} \right)^n = \left(\frac{p}{n} \right)^n.$$

Так как $1 \le n \le p/2$ и функция $(p/x)^x$ принимает свое максимальное значение $(0, p/2]$ при $x = p/e$, мы заключаем $\left(\frac{p}{n}\right)^n \le e^{p/e} \le 3^{p/2}$. Отсюда получаем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} p_k (l!)^{p_k/2} \le (3l!)^{p/2},$$

которое завершает доказательство леммы. □

Замечание 2.1. *В дальнейшем для $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_p\} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$ обозначение $[\mathcal{A}]$ будет означать E-классы $\mathcal{A}$ которые находятся в $\mathcal{D}^*_{l,p}$. Напомним, что если $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_p\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_p\} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$ изоморфны, то существует перестановка $\sigma \in \pi_{pl/2}$, такая, что*

$$\{\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_p)\} = \{B_1, \dots, B_p\}.$$

Отсюда вытекает $\#[\mathcal{A}] \le (pl/2)!$ для всех $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{l,p}$. Кроме того, применив Лемму 2.2, для $\mathcal{A} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$(стандарт) имеем $\#[\mathcal{A}] \ge (pl/2)!/(3l!)^{p/2}$.

Пусть $p, l \ge 2$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{l,p}$. Набор множеств $\mathcal{A}' = \{A_1, A_2, \dots, A_r\} \subset \mathcal{A}$, $1 \le r \le p$, назовем X-звеном в $\mathcal{A}$, если

$$r \text{ четно и}$$
$$\#(A_k \cap A_{k+1}) = \begin{cases} l-1 & \text{если} \quad k \text{ нечетно}, \\ 1 & \text{если} \quad k \text{ четно}, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \dots, r-1$. Скажем, что $\mathcal{A}'$ есть Y-звено, если

$$l \text{ четно и}$$
$$\#(A_k \cap A_{k+1}) = l/2, \quad k = 1, 2, \dots, r-1.$$

Если l четно, то каждый одноэлементный набор множеств $\mathcal{A}' = \{A\}$ рассматривается как Y-звено.

Лемма 2.3. *Пусть $p, l \ge 2$, $1 \le r \le p$ целые числа и $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{l,p}$. Тогда существуют не более чем p разных X-звеньев (Y-звеньев) в $\mathcal{A}$ с длинами r.*

Доказательство. Рассмотрим все максимальные X-звенья (Y-звенья) $\mathcal{A}$. Очевидно они не имеют общих множеств в наборе $\mathcal{A}$. Любое X-звено (Y-звено) с длиной r должно содержаться в одном из максимальных звеньев. Из всего этого легко вытекает, что количество X-звеньев (Y-звеньев) в $\mathcal{A}$ с длинами r не превосходит p. □

Лемма 2.4. *Пусть $p > q \geq 2$ и $l \geq 2$–целые числа, такие, что оба числа pl и ql четные. Тогда существует отображение*

$$\phi : \mathcal{D}_{l,q}(\textit{связные}) \to \mathcal{D}_{l,p}(\textit{связные}),$$

удовлетворяющее $\#(\phi^{-1}(\mathcal{B})) \leq p$ для всех $\mathcal{B} \in \mathcal{D}_{l,p}(\textit{связные})$.

Доказательство. Сначала предположим, что l нечетно и поэтому $p - q$ четно. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_q\} \in \mathcal{D}_{l,q}$(связные). Выберем $a \in A_q$ и $b \in \mathbb{N}_{pl/2} \setminus \cup_{k=1}^{q} A_k$ произвольным образом и определим

$$\bar{A}_q = (A_q \setminus \{a\}) \cup \{b\}.$$

Так как $p-q$ четно, можно определить X-звенья $\{A_{q+1}, \dots, A_p\}$ так, что $a \in A_{q+1}$, $b \in A_p$ и

$$\mathcal{B} = \{A_1, \dots, \bar{A}_q, A_{q+1}, \dots, A_p\} \in \mathcal{D}_{l,p}(\text{связные}). \tag{2.6}$$

Далее определим $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Возможно, что $\mathcal{B}$ может быть образом разных двойных покрытий из $\mathcal{D}_{l,q}$(связные). Можно усмотреть, что количество таких двойных покрытий не может превосходить количеству X-звеньев в $\mathcal{B}$ с длинами $p-q$. Поэтому благодаря Лемме 2.3 мы всегда будем иметь $\#(\phi^{-1}(\mathcal{B})) \leq p$.

В случае четного l мы рассуждаем аналогичным образом. А именно, выберем произвольные подмножества $A \subset A_q$ и $B \subset \mathbb{N}_{pl/2} \setminus \cup_{k=1}^{q} A_k$ с $\#(A) = \#(B) = l/2$ и определим

$$\bar{A}_q = (A_q \setminus A) \cup B.$$

Потом определим $l/2$-звеньев $\{A_{q+1}, \dots, A_p\}$ с $A \subset A_{q+1}$, $B \subset A_p$ удовлетворяющие (2.6). Остальная часть доказательства аналогична предыдущему случаю. □

Доказательство Теоремы 1.2. Можно предполагать, что $l > 2$. Для доказательства левого неравенства в (1.4), сначала покажем

$$\mu_{l,p}(\text{полный}) \gtrsim p^{p(l/2-1)}. \tag{2.7}$$

Для любого $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{l,p}$(полный) имеем $\#[\mathcal{A}] \leq (pl/2)!$ (см. Замечание 2.1). Поэтому, используя также Лемму 2.1, получаем

$$\mu_{l,p}(\text{полный}) \geq \frac{\#(\mathcal{D}_{l,p}(\text{полный}))}{(pl/2)!} \gtrsim \frac{p^{p(l-1)}}{(pl/2)!} \gtrsim p^{p(l/2-1)}.$$

Остается доказать

$$\mu_{l,p}(\text{полный}) = \#[\mathcal{D}_{l,p}(\text{полный})] \lesssim \#[\mathcal{D}_{l,p}(\text{стандарт})]. \tag{2.8}$$

Пусть $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_s\} \in \mathcal{D}_{l,p}$(полный), где $\mathcal{A}_k$–компоненты связности $\mathcal{A}$, причем некоторые из них могут быть изоморными. Если некоторая группа компонентов изоморфны, то мы удаляем все компоненты этой группы кроме одного. Применив эту процедуру над всеми группами изоморфных компонентов, мы получим стандартное двойное покрытие $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ с меньшим количеством копонент связности что имеет $\mathcal{A}$. Назовем новое двойное покрытие $\mathcal{B}$ ϕ-преобразованием $\mathcal{A}$. Оно однозначно определяется с точностью до изоморфизма. Заметим, что $\mathcal{B}$ может быть ϕ-преобразованием не больше чем $p \cdot 2^p$ изоморфно разных элементов $\mathcal{D}_{l,p}$(non-стандарт), а именно,

$$\#[\phi^{-1}(\mathcal{B})] \leq p \cdot 2^p. \tag{2.9}$$

Действительно, пусть $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ есть ϕ-преобразованием $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{l,p}$ (не - стандарт). По определению ϕ-преобразования, двойное покрытие $\mathcal{A}$ состоит из связных компонентов которые изоморфны одному из связных компонент $\mathcal{B}$. Предположим, что $\mathcal{A}$ имеет p_k компонент изоморфных $\mathcal{B}_k$. Очевидно имеем $p_1 + \dots + p_m \leq p$. Можно проверить, что количество всевозможных упорядоченных наборов $(p_1, \dots, p_m)$ натуральных чисел, удовлетворяющих этому неравенству не первосходит $p \cdot 2^p$. Отсюда вытекает (2.9).

Применим еще одно преобразование над $\mathcal{B}$ следующим образом. Выберем связную компоненту $\mathcal{B}$ имеющую максимальное количество элементов. Предположим, что это есть $\mathcal{B}_1$. Применив Лемму 2.4, мы можем заменить $\mathcal{B}_1$ через более широкое связное двойное покрытие $\mathcal{B}'_1$ таким, что $\mathcal{B}' = \{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_2 \dots, \mathcal{B}_m\} \in \mathcal{D}_{l,p}$(стандарт) и $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_2 \dots, \mathcal{B}_m$ являются связными компонентами $\mathcal{B}'$. Назовем $\mathcal{B}'$ ψ-преобразованием для $\mathcal{B}$. По Лемме 2.4, можно усмотреть, что $\mathcal{B}'$ может быть ψ-преобразованием не больше чем p двойных покрытий. Отсюда, применив также (2.9), суперпозиция $\tau = \psi \circ \phi$ определяет отображение из $\mathcal{D}_{l,p}$(полный) в $\mathcal{D}_{l,p}$(стандарт) такое, что $\#[\tau^{-1}(\mathcal{B}')] \leq p^2 \cdot 2^p$. Это доказывает

$$\#[\mathcal{D}_{l,p}(\text{полный})] \leq p^2 2^p \#[\mathcal{D}_{l,p}(\text{стандарт})]$$

что дает (2.8). Комбинируя также (2.7), отсюда мы поучаем неравенство (1.4).

Для доказательства правого неравенства в (1.4), напомним (см. Замечание 2.1), что для любого $\mathcal{A} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$(связные) имеем $\#[\mathcal{A}] \geq (pl/2)!/(3l!)^{p/2}$. Отсюда, применив Лемму 2.1, мы заключаем

$$\#[\mathcal{D}^*_{l,p}(\text{связные})] \leq \frac{(3l!)^{p/2} \cdot \#(\mathcal{D}^*_{l,p}(\text{связные}))}{(pl/2)!} \leq (d(l))^p (p!)^{l/2-1}, \tag{2.10}$$

где $d(l)$–постоянная, зависящая от l и мы можем предполагать

$$d(l) > \max_{2\le p\le 100} \#[\mathcal{D}^*_{l,p}(\text{полный})]. \tag{2.11}$$

Применив индукцию по p докажем, что

$$\#[\mathcal{D}^*_{l,p}(\text{полный})] \le 2(d(l))^p (p!)^{l/2-1}. \tag{2.12}$$

По (2.11) оно имеет место при $2 \le p \le 100$, поэтому достатачно рассматривать случай $p > 100$. Итак, предположим $q > 100$ и что мы уже доказывали неравенство для всех $p < q$. Чтобы доказать его для q оценим количество связных и несвязных двойных покрытий отдельно. Для связных компонент имеем оценку (2.10). Тогда, применив индуктивное предположение, получим

$$\begin{aligned}\#[\mathcal{D}^*_{l,q}(\text{не-связные})] &\le \sum_{2\le k\le q/2} [\mathcal{D}^*_{l,k}(\text{полный})]\cdot[\mathcal{D}^*_{l,q-k}(\text{полный})]\\ &\le 4(d(l))^q \sum_{2\le k\le q/2} (k!(q-k)!)^{l/2-1}.\end{aligned}$$

Очевидно имеем $k!(q-k)! \le 6(q-3)!$ if $3 \le k \le q/2$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}&[\mathcal{D}^*_{l,q}(\text{не-связные})]\\ &\qquad\le 4(d(l))^q \left((2(q-2)!)^{l/2-1} + \sum_{3\le k\le q/2} (k!(q-k)!)^{l/2-1}\right)\\ &\qquad\le 4(d(l))^q \left((2(q-2)!)^{l/2-1} + \frac{q}{2}\cdot(6(q-3)!)^{l/2-1}\right)\\ &\qquad\le (d(l))^q (q!)^{l/2-1}, \qquad (2.13)\end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из $q > 100$ и $l \ge 3$. Из (2.10) и (2.13) получим (2.12) для $p = q$. Это завершает доказательство теоремы. □

3. Доказательство Теоремы 1.3

Вместе с оценкой (1.4), нам также понадобятся еще две леммы. Первая есть обобщение неравенства Коши-Шварца, которое имеет сомостоятельный интерес. Пусть $G = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ есть некоторое множество переменных. Назовем G-последовательность числовую последовательность $b_G = b_{j_1,\dots,j_n}$ с конечным носителем, где переменные j_k независимо принимают натуральные значения. Обозначим

$$\sum_G{}' \, b_G = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_n\in G} b_{j_1,j_2,\dots,j_n}.$$

Лемма 3.1. *Пусть I_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, есть множество переменных, таких, что $\{I_1, \ldots, I_p\}$ образует четное покрытие и пусть $G = \cup_{j=1}^{p} I_j$. Тогда для любых положительных числовых I_k-последовательностей $a_{I_k}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, p$ имеем*

$$\sum_G{}' a_{I_1}^{(1)} \ldots a_{I_p}^{(p)} \leq \prod_{k=1}^{p} \left(\sum_{I_k}{}' \left(a_{I_k}^{(k)} \right)^2 \right)^{1/2}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Сначала предположим, что $\{I_1, \ldots, I_p\}$–двойное покрытие. Применим индукцию относительно $n = \#(G)$. Если $n = 1$, то (3.1) дает классическое неравенство Коши-Шварца. Предположим, что неравенство имеет место для всех $n < m$ и докажем ее для $n = m$. Итак предположим $\#(G) = m$ и пусть множество переменных $I_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots, p$, составляют двойное покрытие и $G = \cup_k I_k$. Предположим, что два из этих множеств, скажем I_1 и I_2, имеют непустое пересечение, $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$. По условию двойного покрытия имеем $I_j \cap (I_1 \cap I_2) = \varnothing$ для всех $j \geq 3$. Отсюда, используя неравенство Коши-Шварца, получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_G{}' a_{I_1}^{(1)} \ldots a_{I_p}^{(p)} \\
&\quad = \sum_{G \setminus (I_1 \cap I_2)}{}' a_{I_3}^{(3)} \ldots a_{I_p}^{(p)} \sum_{I_1 \cap I_2}{}' a_{I_1}^{(1)} a_{I_2}^{(2)} \\
&\quad \leq \sum_{G \setminus (I_1 \cap I_2)}{}' a_{I_3}^{(3)} \ldots a_{I_p}^{(p)} \left(\sum_{I_1 \cap I_2}{}' |a_{I_1}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{I_1 \cap I_2}{}' |a_{I_2}^{(2)}|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad = \sum_{G \setminus (I_1 \cap I_2)}{}' a'_{I_1 \setminus I_2} \cdot a''_{I_2 \setminus I_1} \cdot a_{I_3}^{(3)} \ldots a_{I_p}^{(p)},
\end{aligned}$$

где

$$a'_{I_1 \setminus I_2} = \left(\sum_{I_1 \cap I_2}{}' |a_{I_1}^{(1)}|^2 \right)^{1/2}, \quad a''_{I_2 \setminus I_1} = \left(\sum_{I_1 \cap I_2}{}' |a_{I_2}^{(2)}|^2 \right)^{1/2}.$$

Заметим, что $\{I_1 \setminus I_2, I_2 \setminus I_1, I_3, \ldots, I_p\}$ есть двойное покрытие, базис которого есть $G' = G \setminus (I_1 \cap I_2)$ и $\#(G') < m$. Отсюда, используя индуктивное предположение и обозначение, мы получим

$$\sum_{G\setminus(I_1\cap I_2)}{}' a'_{I_1\setminus I_2}\cdot a''_{I_2\setminus I_1}\cdot a^{(3)}_{I_3}\ldots a^{(p)}_{I_p}$$
$$\le\left(\sum_{I_1\setminus I_2}{}' |a'_{I_1\setminus I_2}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{I_2\setminus I_1}{}' |a''_{I_2\setminus I_1}|^2\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\sum_{I_3}{}' |a^{(3)}_{I_3}|^2\right)^{1/2}\ldots\left(\sum_{I_p}{}' |a^{(p)}_{I_p}|^2\right)^{1/2}=\prod_{k=1}^{p}\left(\sum_{I_k}{}' |a^{(k)}_{I_k}|^2\right)^{1/2}.$$

Теперь предположим, что $\{I_1,\ldots,I_p\}$–произвольное четное покрытие множества переменных и четыре среди них I_1,I_2,I_3,I_4 имеют общий элемент k. Выберем произвольную переменную $k'\notin\cup_{j=1}^p I_j$ и заменим множества I_1 и I_2 соответственно на $\tilde I_1=(I_1\setminus\{k\})\cup\{k'\}$ и $\tilde I_2=(I_2\setminus\{k\})\cup\{k'\}$. Легко проверить, что

$$\sum_{G}{}' a^{(1)}_{I_1}a^{(2)}_{I_1}a^{(3)}_{I_3}\ldots a^{(p)}_{I_p}\le\sum_{G\cup\{k'\}}{}' a^{(1)}_{\tilde I_1}a^{(2)}_{\tilde I_2}a^{(3)}_{I_3}\ldots a^{(p)}_{I_p},$$

так как первая сумма является частью второй суммы. Применив эту процедуру последовательно, в конце концов мы получим доминантную сумму с набором множеств двойного покрытия. Общий случай сводится к случаю двойного покрытия. □

Лемма 3.2. *Если $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\ldots,A_p\}$ есть четное покрытие, то существует двойное покрытие $\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\ldots,B_p\}$ и сюрективное отображение*

$$\phi:\bigcup_{k=1}^p B_k\to\bigcup_{k=1}^p A_k$$

такое, что $\phi(B_k)=A_k$, $k=1,2,\ldots,p$.

Доказательство. Определим $\mathcal{B}$ по индукции, "преобразуя" множества $\mathcal{A}$ следующим образом. Предположим, что существуют четыре множества из $\mathcal{A}$, скажем A_1,A_2,A_3,A_4, имеющие общую точку a. Выберем произвольную точку $b\notin\cup_{j=1}^p A_j$, и заменим множества A_1 и A_2 на $(A_1\setminus\{a\})\cup\{b\}$ и на $(A_2\setminus\{a\})\cup\{b\}$ соответственно. Тогда будем говорить, что b порожден из a. Применив эту процедуру последовательно, в конце концов $\mathcal{A}$ преобразуется на двойное покрытие $\mathcal{B}$. Для $a\in\cup_k A_k$ обозначим $[a]$ объединение a со всеми точками $\cup_k B_k$ которые пораждены от a. Определим отображение ϕ, сопоставив каждой точки $b\in\cup_k B_k$ точку a если $b\in[a]$. Очевидно оно удовлетворяет требованиям леммы. □

Определим виртуальную функцию $\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, где a_k могут быть целыми числами или множествами. Если все a_k разные, то $\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_p) = p!$. В противном случае группируя равные элементы вместе, мы можем разделить набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ на группы из p_k элементов, такое, что $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = p$. В этом случае мы определим

$$\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_p) = \frac{p!}{(p_1)!(p_2)!\ldots(p_m)!}. \tag{3.2}$$

Заметим, что если $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_p\}$ есть двойное покрытие, что

$$\gamma(A_1, A_2, \ldots, A_p) \geq \frac{p!}{2^p}, \tag{3.3}$$

так как не более чем два множества из $\mathcal{A}$ могут быть равными. Вот другое хорошо известное применение функции γ в полиномиальной формуле

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p = \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_p \leq n} \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_p) x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_p}. \tag{3.4}$$

Доказательство Теоремы 1.1. Сначала мы докажем правое неравенство в (1.4). Пусть $\{b_A : A \in \mathcal{Z}_l\}$ есть последовательность с конечным носителем. Используя (3.4), получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A\right)^p \\
&= \sum_{A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{Z}_l} \gamma(A_1, \ldots, A_p) b_{A_1} \ldots b_{A_p} \int_0^1 w_{A_1} \ldots w_{A_p}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Заметим, что если набор множеств $\{A_1, \ldots, A_p\}$ не является двойным покрытием, то интеграл в (3.5) равен нулю, а в противном случае 1. Отсюда мы заключаем

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A\right)^p &= \sum_{\substack{A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{A}_l \\ \{A_1, \ldots, A_p\} \text{ четно}}} \gamma(A_1, A_2, \ldots, A_p) b_{A_1} \ldots b_{A_p} \\
&\leq \sum_{\substack{A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{A}_l \\ \{A_1, \ldots, A_p\} \text{ четно}}} \gamma(A_1, A_2, \ldots, A_p) |b_{A_1} \ldots b_{A_p}|.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Мы определим $b_{j_1, j_2, \ldots, j_l} = 0$ если по меньшей мере двое из j_k равны. Заметим, что любой член $|b_{A_1} \ldots b_{A_p}|$ с четным покрытием $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_p\}$ встречается по меньшей мере один раз в штрих-сумме

$$\sum_{\cup_{j=1}^p I_j}{}' |b_{I_1} \ldots b_{I_p}|, \tag{3.7}$$

где набор переменных $I = \{I_1, \ldots, I_p\}$ образует двойное покрытие с $\#(I_k) = l$. Действительно, предположим, что $\{A_1, \ldots, A_p\}$ является четным покрытием натуральных чисел. По Лемме 3.2 существует двойное покрытие переменных $\{I_1, \ldots, I_p\}$ и сюръективное отображение

$$\phi : \bigcup_{k=1}^{p} I_k \to \bigcup_{k=1}^{p} A_k$$

такие, что $\phi(I_k) = A_k$. Таким образом, если мы сопоставим любому переменному $j \in \cup_k I_k$ в $|b_{I_1} \ldots b_{I_p}|$ величину $\phi(j) \in \mathbb{N}$, мы получим член $|b_{A_1} \ldots b_{A_p}|$ в (3.7). Это замечание и (3.2) дает нам

$$\sum_{\substack{A_1,\ldots,A_p \in \mathcal{A}_l \\ \{A_1,\ldots,A_p\} \text{ is even}}} \gamma(A_1, \ldots, A_p)|b_{A_1} \ldots b_{A_p}| \le p! \sum_{[I_1,\ldots,I_p]} {\sum_{\cup_{j=1}^{p} I_j}}' |b_{I_1} \ldots b_{I_p}|, \tag{3.8}$$

где первое суммирование берется по всем изометрично разным двойным покрытиям из переменных $\{I_1, \ldots, I_p\}$ с $\#(I_k) = l$. Напомним, что количество таких двойных покрытий равно $\mu_{l,p}$(полный). С другой стороны, применив Лемму 3.1 с последовательностями $a^{(k)}_{I_k} = b_{I_k}$, $k = 1, 2, \ldots, p$, получим

$${\sum_{\cup_{j=1}^{p} I_j}}' |b_{I_1} \ldots b_{I_p}| \le \left({\sum_{I_1}}' (b_{I_1})^2\right)^{p/2} = \left(l! \sum_{A \in \mathcal{Z}_l} (b_A)^2\right)^{p/2}. \tag{3.9}$$

Отсюда, комбинируя (3.6), (3.8) и (3.9), следует неравенство

$$\left\|\sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A\right\|_p \le \sqrt{l!} \cdot (p!\mu_{l,p}(\text{полный}))^{1/p} \left(\sum_{I \in \mathcal{Z}_l} |b_I|^2\right)^{1/2},$$

которое есть правое неравенство в (1.6). Для доказательства левой оценки рассмотрим конечную сумму

$$\sum_{A \in \mathcal{Z}_l(m)} w_A, \tag{3.10}$$

где

$$\mathcal{Z}_l(m) = \{A \subset \mathbb{N}_m = \{1, 2, \ldots, m\} : \#(A) = l\} \subset \mathcal{Z}_l.$$

Имеем,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\sum_{A\in\mathcal{Z}_l(m)} w_A\right)^p \\
&\quad= \sum_{A_1,\ldots,A_p\in\mathcal{Z}_l(m)} \gamma(A_1,A_2,\ldots,A_p)\int_0^1 w_{A_1}w_{A_2}\ldots w_{A_p} \\
&\quad= \sum_{\substack{A_1,\ldots,A_p\in\mathcal{Z}_l(m)\\ \{A_1,\ldots,A_p\}\ \text{четно}}} \gamma(A_1,A_2,\ldots,A_p) \\
&\quad\geq \sum_{\substack{A_1,\ldots,A_p\in\mathcal{Z}_l(m)\\ \{A_1,\ldots,A_p\}\ \text{стандартное двойное покрытие}}} \gamma(A_1,A_2,\ldots,A_p). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{I}=\{I_1,\ldots,I_p\}$ есть стандартное двойное покрытие переменных так, что $\#(I_k)=l$. Реализуя переменные $\cup_{j=1}^p I_k$ над $\mathbb{N}_m$ независимо, набор $\mathcal{I}$ порождает все стандартные двойные покрытия $\mathcal{A}=\{A_1,\ldots,A_p\}$ с $A_k\in\mathcal{Z}_l(m)$ которые изоморфны $\mathcal{I}$. По Лемме 2.2, любое такое $\mathcal{A}$ может встретиться в этой реализации не больше чем $(3l!)^{p/2}$ раз. Отсюда, применив (3.3) и продолжив оценку (3.11), получаем

$$\int_0^1 \left(\sum_{A\in\mathcal{Z}_l(m)} w_A\right)^p \geq \frac{1}{(3l!)^{p/2}} \sum_{[I_1,\ldots,I_p]} \ \sideset{}{'}\sum_{\cup_{j=1}^p I_j\subset\mathbb{N}_m} \gamma(I_1,I_2,\ldots,I_p) \qquad (3.12)$$

$$\geq \frac{p!}{2^p(3l!)^{p/2}}\cdot \mu_{l,p}(\text{стандарт})A_m^{pl/2}, \qquad (3.13)$$

где первая сумма берется по всем изоморфно разным стандартым двойным покрытиям из переменных так, что $\#(I_k)=l$. Величина $\mu_{l,p}(\text{стандарт})$ в (3.13) есть количество таких покрытий, а

$$A_m^{pl/2}=m(m-1)\ldots(m-pl/2+1)$$

есть количество членов во второй сумме (3.12). l^2-норма коэффициентов суммы (3.10) точно равна $\binom{m}{l}^{1/2}$ и имеем

$$\frac{\left\|\sum_{A\in\mathcal{Z}_l(m)} w_A\right\|_p}{\binom{m}{l}^{1/2}} \geq \frac{\left(p!\cdot\mu_{l,p}(\text{стандарт})A_m^{pl/2}\right)^{1/p}}{2\sqrt{3l!}\cdot\binom{m}{l}^{1/2}} \to \frac{(p!\mu_{l,p}(\text{стандарт}))^{1/p}}{2\sqrt{3}}$$

при $m\to\infty$. Это и дает левое неравенство (1.6). $\square$

4. Нерешенные проблемы

В этом параграфе будем сформулировать некоторые нерешенные проблемы, которые интересны с комбинаторной точки зрения. Рассмотрим величины

$$d(l) = \sup_{p\geq 2} \frac{(\mu_{l,p}(\text{полный}))^{1/p}}{p^{l/2-1}},$$

$$g(l) = \sup_{p\geq 2} \frac{\sup_{\|b\|\leq 1} \left\|\sum_{A\in \mathcal{Z}_l} b_A w_A\right\|_p}{p^{l/2}},$$

где первая из них имеет чисто комбинаторное значение, а вторая характеризует точную постоянную Хинчина в (1.7). Из (1.7) и (1.4) следует $d(l) < \infty$ и $g(l) < \infty$ для всех $l \geq 2$. Детальное рассмотрение доказательств дает оценку $d(l) \leq c2^{l/2}$ с абсолютной постоянной $c > 0$. Используя Утверждение 1.1, мы также можем утверждать, что $g(l) \leq c\sqrt{2^l \cdot l!}$. Применив стандартный аргумент, из неравенства Бонами-Киенера (1.7) можно вывести оценку

$$\left\|\sum_{A\in\mathcal{Z}_l} b_A w_A\right\|_p \leq C_{p,q,l} \left\|\sum_{A\in\mathcal{Z}_l} b_A w_A\right\|_q, \tag{4.1}$$

для любой Радемахер хаос суммы, где $1 \leq q < p < \infty$. В отличие от классического случая (когда $l = 1$), настолько нам известно, величина оптимальной постоянной, которая может быть в (4.1), неизвестно для всяких комбинаций параметров $p > q$. Некоторые оценки оптимальной постоянной в (4.1) можно найти в работах [13–16].

Задача 1. *Найти точные величины $d(l)$ и $g(l)$.*

Из Леммы 2.4 следует. что если $p > q$, а pl и ql четные, то

$$\#(\mathcal{D}_{l,q}(\text{связные})) \leq p \cdot \#(\mathcal{D}_{l,p}(\text{связные})).$$

Нам неизвестно можно ли множитель p в правой стороне этого неравенства убрать при $l > 2$. Более того,

Задача 2. *Пусть $l > 2$. Доказать, что для любых $p > q$ где pl и ql четные, имеем следующую оценку*

$$\#(\mathcal{D}_{l,q}(\textit{связные})) \leq \#(\mathcal{D}_{l,p}(\textit{связные})),$$

$$\#(\mathcal{D}_{l,q}(\textit{полный})) \leq \#(\mathcal{D}_{l,p}(\textit{полный})).$$

Задача 3. *Пусть $l > 2$. Доказать, что если $p > q$, а pl и ql четные, то $\mu_{l,q}(\textit{полный}) \leq \mu_{l,p}(\textit{полный})$ и $\mu_{l,q}(\textit{связные}) \leq \mu_{l,p}(\textit{связные})$.*

Как было намечено во введении $\mu_{l,p} = \#([\mathcal{D}_{l,p}(\text{полный})])$ есть количество p-вершинных мультиграфов с l-степенными вершинами. Можно проверить, что $\#(\mathcal{D}_{l,p}(\text{полный}))$ есть количество того же типа маркированных графов $\#([\mathcal{D}_{l,p}$ (полный)$])$. Соотношения (1.4) и (2.1) дают неполную характеризацию для асимптотической характеристики этих двух величин.

Задача 4. *Для $l > 2$ доказать, что пределы*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(\#([\mathcal{D}_{l,p}(\textit{полный})]))^{1/p}}{p^{l/2-1}} \quad \textit{и} \quad \lim_{p\to\infty} \frac{(\#(\mathcal{D}_{l,p}(\textit{полный})))^{1/p}}{p^{l-1}}$$

существуют и найти их величины.

Abstract. A collection of finite sets $\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ is said to be a double-covering if each $a \in \cup_{k=1}^{p} A_k$ is included in exactly two sets of the collection. For fixed integers l and p, let $\mu_{l,p}$ be the number of equivalency classes of double-coverings with $\#(A_k) = l$, $k = 1, 2, \dots, p$. We characterize the asymptotic behavior of the quantity $\mu_{l,p}$ as $p \to \infty$. The results are applied to give an alternative approach to the Bonami-Kiener hypercontraction inequality.

Список литературы

[1] A. Bonami, “Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$”, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **20**, no. 2, 335 – 402 (1971).

[2] K. Kiener, “Über Produkte von quadratisch integrierbaren Funktionenendlicher Vielfalt”, Dissertation, Universität Innsbruck (1969).

[3] G. E. Andrews, The Theory of Partitions, Cambridge Mathematical Library, Reprint of the 1976 original, Cambridge University Press, Cambridge (1998)

[4] P. F. X. Müller, Isomorphisms Between H^1 Spaces, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne (New Series), **66**, publisher=Birkhäuser Verlag, Basel (2005).

[5] R. Blei, Analysis in Integer and Fractional Dimensions, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, **71** (2001).

[6] A. Khintchine, “Über dyadische Brüche”, Math. Z. Jour., **18**, no. 1, 109 – 116 (1923).

[7] J. E. Littlewood, “On bounded bilinear forms in an infinite number of variables”, Quart. J. Math. Oxford Ser., **1**, 164 – 174 (1930).

[8] R.E.A.C. Paley, A. Zygmund, “On some series of functions”, (1), Jour. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **26**, no. 3, 337 – 357 (1930).

[9] S. B. Stečkin, “On best lacunary systems of functions”, Jour. of Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **25**, 357 – 366 (1961).

[10] R. M. G. Young, “On the best possible constants in the Khintchine inequality”, J. London Math. Soc. (2), **14**, no. 3, 496 – 504 (1976).

[11] S. J. Szarek, “On the best constants in the Khinchin inequality”, Jour. Studia Math., **58**, no. 2, 197 – 208 (1976).

[12] U. Haagerup, “The best constants in the Khintchine inequality”, Studia Math. Jour., **70**, no. 3, 231 – 283 (1981).

[13] R. O’Donnell, Analysis of Boolean Functions, Cambridge University Press, New York (2014).

[14] S. Janson, Gaussian Hilbert Spaces, Cambridge Tracts in Mathematics, **129**, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[15] L. Larsson-Cohn, "L^p-norms of Hermite polynomials and an extremal problem on Wiener chaos", Ark. Mat. Jour., **40**, no. 1, 133 – 144 (2002).

[16] P. Ivanisvili, T. Tkocz, "Comparison of moments of Rademacher chaoses", Ark. Mat. Jour., **57**, no. 1, 121 – 128 (2019).

Поступила 09 января 2025

После доработки 29 января 2025

Принята к публикации 22 апреля 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 4, 2025, стр. 45 – 59.

ПОЛЕ ЭНЕРГИЙ ПЕРЕХОДА В МЕТОДЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. А. ХАЧАТРЯН, Б. С. НАХАПЕТЯН,

Институт математики, Национальная академия наук Республики Армения[1]
E-mails: *linda@instmath.sci.am; nahapet@instmath.sci.am*

Аннотация. В данной работе на основе понятия поля энергий перехода обобщается известный метод корреляционных уравнений построения гиббсовских мер. Используя свойства энергий перехода, получена система корреляционных уравнений для решетчатых систем с конечным пространством спинов. Показано, что при достаточно малом значении одноточечных энергий перехода соответствующая система корреляционных функций, рассматриваемая в банаховом пространстве ограниченных вещественных функций, имеет единственное решение. Показана также сходимость корреляционных функций в конечном объеме к предельной корреляционной функции.

MSC2020 numbers: 82B05; 82B20; 60G60.

Ключевые слова: поле энергий перехода; корреляционная функция; корреляционное уравнение; гиббсовская мера.

Введение

Метод корреляционных уравнений является одним из наиболее востребованных способов построения и исследования систем математической статистической физики в бесконечных объемах (см., например, [1] – [5]). В случае решеточных систем этот метод применялся, как правило, к вакуумным системам, состоящим из двух точек: спина и вакуума.

Естественно возникает задача распространения метода корреляционных уравнений на более общие системы. Эта задача рассматривалась в [6], где в качестве пространства спинов рассматривалось измеримое множество конечной меры, а мера вакуума принималась равной единице. Дальнейшее изучение таких систем проведено в работах [7, 8], где были получены их кластерные свойства, позволившие найти асимптотическое разложение логарифма статистической суммы по степеням объема, а также доказать локальную предельную теорему для числа частиц.

[1]Работа выполнена при поддержке Коммитета по науке и образования Республики Армения в рамках проекта 21AG-1A045.

Во всех упомянутых работах определение корреляционной функции основывалось на понятии потенциала взаимодействия. Сначала рассматривались потенциалы парного взаимодействия (см., например, [1, 2]), после чего полученные результаты были обобщены на случай многочастичных потенциалов (см. [3, 6, 7, 8]).

В статье [9] была предложена новая точка зрения на математические основы статистической физики систем, заданных в бесконечных объемах. Эта точка зрения базируется на введенном понятии поля энергии перехода. Приложения этого понятия в теории случайных полей получили дальнейшее развитие в работах [10, 11, 12]. В частности, было показано, что для решетчатых систем гиббсовская форма является универсальной для любых конечномерных распределений вероятностей.

Существуют различные методы построения полей энергий перехода (см. [9] и [12]), в том числе и на основе предложенного в [9] аксиоматического определения гамильтониана, не предполагающего его представление в виде суммы потенциалов взаимодействия. Этот факт позволяет обобщить известные результаты математической статистической физики.

В настоящей работе рассматриваются системы с конечным пространством спинов. На основе результатов работ [9] - [12] выписывается система корреляционных уравнений с использованием понятия поля энергий перехода. Показано, что при достаточно малом значении одноточечных энергий перехода соответствующая система корреляционных функций, рассматриваемая в банаховом пространстве ограниченных вещественных функций, имеет единственное решение. Наконец, доказана сходимость корреляционных функций в конечных объемах к предельной корреляционной функции. Для частного случая конечного радиуса взаимодействия эти вопросы рассматривались в [13].

Отметим также, что наш подход может быть применен к системам с пространством спинов, рассматриваемым в [6].

1. Обозначения

Пусть $\mathbb{Z}^d$ — d-мерная целочисленная решетка, т.е. совокупность d-мерных векторов с целыми компонентами, $d \geq 1$. Отметим, что все рассуждения настоящей статьи остаются справедливыми, если вместо $\mathbb{Z}^d$ рассмотреть произвольное счетное множество.

Обозначим через $W(S) = \{\Lambda \subset S, 0 < |\Lambda| < \infty\}$ совокупность всех непустых конечных подмножеств $S \subset \mathbb{Z}^d$, где $|\Lambda|$ есть количество точек в Λ. В случае $S = \mathbb{Z}^d$ будет использоваться более простое обозначение W. Множество S^c есть дополнение к множеству S. При обозначении одноточечных подмножеств решетки $\{t\}$, $t \in \Lambda$, фигурные скобки будут опускаться.

Для $t = (t^{(1)}, t^{(2)}, ...t^{(d)}), s = (s^{(1)}, s^{(2)}, ...s^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d$ обозначим $|t-s| = \max\limits_{1\le j\le d} |t^{(j)} - s^{(j)}|$ и положим $d(T,S) = \inf\limits_{t\in T, s\in S} |t-s|$, $T, S \subset \mathbb{Z}^d$.

Пусть каждой точке $t \in \mathbb{Z}^d$ отвечает множество X^t, являющееся копией некоторого конечного множества X, $1 < |X| < \infty$. Через X^S обозначим множество всех конфигураций на S, $S \subset \mathbb{Z}^d$, т.е. множество $X^S = \{x = (x_t, t \in S), x_t \in X\}$, всех функций, определенных на S и принимающих значения в X. При $S = \emptyset$ мы полагаем $X^{\emptyset} = \{\boldsymbol{\emptyset}\}$, где $\boldsymbol{\emptyset}$ есть пустая конфигурация. Для непересекающихся множеств $S, T \subset \mathbb{Z}^d$ и произвольных $x \in X^S$, $y \in X^T$, обозначим через xy конкатенацию x и y, т.е. конфигурацию на $S \cup T$, равную x на S и y на T. При $T \subset S$, через x_T обозначим сужение конфигурации $x \in X^S$ на T, т.е. $x_T = (x_t, t \in T)$.

Пусть θ_t — некоторый выделенный фиксированный элемент X^t (вакуум) и $\theta = (\theta_t, t \in \mathbb{Z}^d)$. Обозначим $X_*^t = X^t \backslash \{\theta_t\}$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Для каждого $S \subset \mathbb{Z}^d$, обозначим через X_*^S множество конфигураций на S, не содержащих вакуум, и пусть $L_*^S = \bigcup\limits_{J\in W(S)} X_*^J$ есть пространство всех конфигураций без вакуума с носителем, являющимся подмножеством S. При $S = \mathbb{Z}^d$, обозначим $L_* = L_*^{\mathbb{Z}^d}$. Отметим, что любая конфигурация из X^S может быть записана в виде $x\theta_{S\backslash I}$, где $x \in X_*^I$, $I \subset S$.

2. Поле энергий перехода

В работе [9] были введены понятия поля энергий перехода и поля одноточечных энергий перехода.

Совокупность $\Delta = \{\Delta_\Lambda^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda^c}, \Lambda \in W\}$ вещественнозначных функций $\Delta_\Lambda^{\bar{x}}(x,u)$, $x, u \in X^\Lambda$, называется *полем энергий перехода*, если ее элементы удовлетворяют следующим условиям согласованности: для всех $\Lambda \in W$ и $\bar{x} \in X^{\Lambda^c}$ выполнено $\Delta_\Lambda^{\bar{x}}(x,u) = \Delta_\Lambda^{\bar{x}}(x,y) + \Delta_\Lambda^{\bar{x}}(y,u)$, $x,u,y \in X^\Lambda$; а для всех непересекающихся $\Lambda, V \in W$ и $\bar{x} \in X^{(\Lambda\cup V)^c}$ имеют место равенства $\Delta_{\Lambda\cup V}^{\bar{x}}(xy, uv) = \Delta_\Lambda^{\bar{x}y}(x,u) + \Delta_V^{\bar{x}u}(y,v)$, $x, u \in X^\Lambda, y, v \in X^V$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\Delta_\Lambda^{\bar{x}}(x,u) = -\Delta_\Lambda^{\bar{x}}(u,x), \qquad \Delta_\Lambda^{\bar{x}}(x,x) = 0, \qquad x, u \in X^\Lambda,$$

$$\Delta_{\Lambda\cup V}^{\bar{x}}(xy, uy) = \Delta_{\Lambda}^{\bar{x}y}(x, u) \qquad x, u \in X^{\Lambda},\ y \in X^{V}.$$

Совокупность $\Delta_1 = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ вещественнозначных функций $\Delta_t^{\bar{x}}(x, u)$, $x, u \in X^t$, называется *полем одноточечных энергий перехода*, если ее элементы удовлетворяют следующим условиям согласованности: для всех $t \in \mathbb{Z}^d$ и $\bar{x} \in X^{t^c}$ имеют место равенства $\Delta_t^{\bar{x}}(x, u) = \Delta_t^{\bar{x}}(x, y) + \Delta_t^{\bar{x}}(y, u)$, $x, u, y \in X^t$, а для всех $t, s \in \mathbb{Z}^d$ и $\bar{x} \in X^{\{t,s\}^c}$ выполнено $\Delta_t^{\bar{x}y}(x, u) + \Delta_s^{\bar{x}u}(y, v) = \Delta_s^{\bar{x}x}(y, v) + \Delta_t^{\bar{x}v}(x, u)$, $x, u \in X^t$, $y, v \in X^s$.

Следующая теорема устанавливает связь между элементами Δ и Δ_1 (см. [9], а также [11]), согласно которой Δ_1 однозначно определяет Δ. Поэтому при получении результатов можно накладывать условия только на элементы Δ_1.

Теорема 2.1. *Совокупность $\Delta = \{\Delta_{\Lambda}^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda^c}, \Lambda \in W\}$ функций на $X^{\Lambda} \times X^{\Lambda}$, $\Lambda \in W$, является полем энергий перехода тогда и только тогда, когда ее элементы представимы в виде*

(2.1)

$$\Delta_{\Lambda}^{\bar{x}}(x, u) = \Delta_{t_1}^{\bar{x}x_{\{\Lambda\setminus t_1\}}}(x_{t_1}, u_{t_1}) + \Delta_{t_2}^{\bar{x}u_{t_1}x_{\{\Lambda\setminus\{t_1,t_2\}\}}}(x_{t_2}, u_{t_2}) + \ldots + \Delta_{t_n}^{\bar{x}u_{\{\Lambda\setminus t_n\}}}(x_{t_n}, u_{t_n}),$$

где $x, u \in X^{\Lambda}$, $\Lambda = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ есть некоторая нумерация точек в Λ, $|\Lambda| = n$, а $\Delta_1 = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ — поле одноточечных энергий перехода.

Один из основных способов построения поля энергий перехода основан на использовании понятия потенциала. Совокупность $\Phi = \{\Phi, J \in W\}$ вещественнозначных функций называется потенциалом (или потенциалом взаимодействия), если для каждого $t \in \mathbb{Z}^d$ и $\bar{x} \in X^{t^c}$ существуют пределы

$$H_t^{\bar{x}}(x) = \lim_{\Lambda\uparrow t^c} \sum_{J\subset\Lambda\setminus t} \Phi\left(x_t \bar{x}_J\right), \qquad x_t \in X^t.$$

Здесь предел берется по любой возрастающей последовательности конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$, стремящейся к t^c. Семейство функций $H^{\Phi} = \{H_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ называется гамильтонианом, отвечающим потенциалу Φ.

Если потенциал Φ такой, что $\Phi_J(x) = 0$ при всех $x \in X^J$, где $|J| > 2$, $J \in W$, то он называется потенциалом парного взаимодействия.

Нетрудно видеть, что совокупность $\Delta_1^{\Phi} = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ функций

$$\Delta_t^{\bar{x}}(x, u) = H_t^{\bar{x}}(u) - H_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{s\in t^c}(\Phi_{ts}(u\bar{x}_s) - \Phi_{ts}(x\bar{x}_s)), \qquad x, u \in X^t,$$

является полем одноточечных энергий перехода, отвечающих потенциалу парного взаимодействия Φ.

3. Корреляционные функции

Пусть $\Delta_1 = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ — поле одноточечных энергий перехода и $\Delta = \{\Delta_\Lambda^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda^c}, \Lambda \in W\}$ — отвечающее ему поле энергий перехода. Зафиксируем некоторое $\Lambda \in W$. В целях упрощения обозначений, положим $\Delta_\Lambda = \Delta_\Lambda^{\theta_{\Lambda^c}}$, а для любых $t \in \Lambda$ и $z \in X^I$, $I \subset \Lambda \backslash t$, будем писать Δ_t^z вместо $\Delta_t^{z\theta_{(t\cup I)^c}}$.

Для заданного Δ_1, определим корреляционную функцию, отвечающую Λ, как функцию ρ_Λ на L_*, задаваемую соотношением

$$\rho_\Lambda(x) = \begin{cases} Z_\Lambda^{-1} \sum\limits_{y \in X^{\Lambda \backslash I}} \exp\{\Delta_\Lambda(xy, \theta_\Lambda)\}, & x \in X_*^I, I \subset \Lambda, \\ 0, & x \in X_*^I, I \not\subset \Lambda, \end{cases}$$

где $Z_\Lambda = \sum\limits_{x \in X^\Lambda} \exp\{\Delta_\Lambda(x, \theta_\Lambda)\}$, и $\rho_\Lambda(\varnothing) = 1$.

Таким образом, каждое Δ_1 определяет семейство $\rho(\Delta_1) = \{\rho_\Lambda, \Lambda \in W\}$ корреляционных функций в конечных объемах. Согласно приводимой ниже теореме корреляционные функции удовлетворяют определенным соотношениям при следующих ограничениях на элементы Δ_1: для всех $\Lambda \in W$, $t, s \in \Lambda$ и $I \subset \Lambda \backslash \{t, s\}$ выполнено

$$\Delta_t^{zy}(x, \theta_t) - \Delta_t^{zv}(x, \theta_t) = \Delta_t^{y}(x, \theta_t) - \Delta_t^{v}(x, \theta_t), \tag{3.1}$$

где $x \in X^t$, $y, v \in X^s$, $z \in X^I$.

Замечание 1. *Если Φ — потенциал парного взаимодействия, то элементы Δ^Φ удовлетворяют условиям* (3.1).

Наконец, подчеркнем, что доказательство следующей теоремы опирается только на свойства энергий перехода и не использует предположение о том, что энергия есть сумма взаимодействий.

Теорема 3.1. *Пусть $\Delta_1 = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ — поле одноточечных энергий перехода, удовлетворяющих условиям* (3.1). *Тогда для любого $\Lambda \in W$ корреляционная функция ρ_Λ удовлетворяет уравнению*

$$\rho_\Lambda(xu) = \frac{e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}}{\sum\limits_{\alpha \in X^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}} \left(\rho_\Lambda(u) + \sum_{\alpha \in X^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)} \Big(G_\Lambda(xu) - G_\Lambda(\alpha u) \Big) \right)$$

при всех $t \in I \subset \Lambda \in W$ и $x \in X_*^t$, $u \in X_*^{I \backslash t}$, где

$$G_\Lambda(xu) = \sum_{J \subset \Lambda \backslash I} \sum_{y \in X_*^J} K_{t \cup J}(xy) \left(\rho_\Lambda(uy) - \sum_{\alpha \in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha uy) \right),$$

$$K_{t\cup J}(xy) = \prod_{s\in J}\left(e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right).$$

Доказательство. Пусть $t \in I \subset \Lambda \in W$ и $x \in X_*^t$, $u \in X_*^{I\setminus t}$. В целях упрощения обозначений, положим $\theta = \theta_\Lambda$. В силу свойств энергий перехода, для всех $y \in X^{\Lambda\setminus I}$ имеем

$$\Delta_\Lambda(xuy,\theta) = \Delta_\Lambda(xuy,\theta_t uy) + \Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta) + \Delta_\Lambda(xu\theta_{\Lambda\setminus I},\theta_t u\theta_{\Lambda\setminus I}) -$$

$$-\Delta_\Lambda(xu\theta_{\Lambda\setminus I},\theta_t u\theta_{\Lambda\setminus I}) = \Delta_t^{uy}(x,\theta_t) + \Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta) + \Delta_t^u(x,\theta_t) - \Delta_t^u(x,\theta_t).$$

Следовательно, можем написать

$$\rho_\Lambda(xu) = \frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}}\exp\{\Delta_\Lambda(xuy,\theta)\} =$$

$$= \frac{e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}} e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)}\left(1+\exp\{\Delta_t^{uy}(x,\theta_t)-\Delta_t^u(x,\theta_t)\}-1\right) =$$

$$= e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}\left(\frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}} e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)} + \frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}}\left(e^{\Delta_t^{uy}(x,\theta_t)-\Delta_t^u(x,\theta_t)}-1\right)e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)}\right).$$

Поскольку

$$e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)} = \sum_{\alpha\in X^t} e^{\Delta_\Lambda(\alpha uy,\theta)} - \sum_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_\Lambda(\alpha uy,\theta)},$$

для первого слагаемого в полученном соотношении имеем

$$\frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}} e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)} = \rho_\Lambda(u) - \sum_{\alpha\in X_*^t}\rho_\Lambda(\alpha u).$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$G_\Lambda(xu) = \frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}}\left(e^{\Delta_t^{uy}(x,\theta_t)-\Delta_t^u(x,\theta_t)}-1\right)e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)} =$$

$$= \frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{J\subset\Lambda\setminus I}\sum_{y\in X_*^J}\left(e^{\Delta_t^{uy}(x,\theta_t)-\Delta_t^u(x,\theta_t)}-1\right)e^{\Delta_\Lambda(uy\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)},\theta)}.$$

Используя свойства $\mathbf{\Delta}$, можем написать

$$\Delta_t^{uy}(x,\theta_t) - \Delta_t^u(x,\theta_t) = \Delta_\Lambda(xuy\theta_{\Lambda\setminus I\setminus J}, uy\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)}) - \Delta_\Lambda(xu\theta_{\Lambda\setminus I}, u\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I)}) =$$

$$= \Delta_\Lambda(xuy\theta_{\Lambda\setminus I\setminus J}, xu\theta_{\Lambda\setminus I}) + \Delta_\Lambda(xu\theta_{\Lambda\setminus I}, u\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I)}) + \Delta_\Lambda(u\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I)}, uy\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)}) -$$

$$-\Delta_\Lambda(xu\theta_{\Lambda\setminus I}, u\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I)}) =$$

$$= \Delta_J^{xu}(y,\theta_J) - \Delta_J^u(y,\theta_J) = \sum_{j=1}^{|J|}\left(\Delta_{s_j}^{xuy_{s_{j+1},\ldots,s_{|J|}}}(y_{s_j},\theta_{s_j}) - \Delta_{s_j}^{uy_{s_{j+1},\ldots,s_{|J|}}}(y_{s_j},\theta_{s_j})\right),$$

где мы воспользовались формулой (2.1), а $J = \{s_1, s_2, ..., s_{|J|}\}$ есть некоторая нумерация точек в J. Принимая во внимание условие (3.1), получаем

$$\Delta_t^{uy}(x,\theta_t) - \Delta_t^u(x,\theta_t) = \sum_{s\in J} \left(\Delta_s^x(y_s,\theta_s) - \Delta_s(y_s,\theta_s)\right).$$

Следовательно,

$$G_\Lambda(xu) = \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{J\subset\Lambda\setminus I} \sum_{y\in X_*^J} \left(\prod_{s\in J} e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right) e^{\Delta_\Lambda(uy\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)},\theta)} =$$

$$= \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{J\subset\Lambda\setminus I} \sum_{y\in X_*^J} \sum_{T\subset J} \prod_{s\in T} \left(e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right) e^{\Delta_\Lambda(uy\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)},\theta)} =$$

$$= \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{T\subset\Lambda\setminus I} \sum_{J\subset\Lambda\setminus I: T\subset J} \sum_{y\in X_*^T} \sum_{z\in X_*^J} \prod_{s\in T} \left(e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right) e^{\Delta_\Lambda(uyz\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)},\theta)} =$$

$$= \sum_{T\subset\Lambda\setminus I} \sum_{y\in X_*^T} \prod_{s\in T} \left(e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right) \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{J\subset\Lambda\setminus I\setminus T} \sum_{z\in X_*^J} e^{\Delta_\Lambda(uyz\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J\setminus T)},\theta)}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{J\subset\Lambda\setminus I\setminus T} \sum_{z\in X_*^J} e^{\Delta_\Lambda(uyz\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J\setminus T)},\theta)} = \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{z\in X^{\Lambda\setminus I\setminus T}} e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uyz,\theta)} = \rho_\Lambda(uy) - \sum_{\alpha\in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha uy),$$

окончательно получаем

$$G_\Lambda(xu) = \sum_{J\subset\Lambda\setminus I} \sum_{y\in X_*^J} K_{t\cup J}(xy) \left(\rho_\Lambda(uy) - \sum_{\alpha\in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha uy)\right),$$

где

$$K_{t\cup J}(xy) = \prod_{s\in J} \left(e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right).$$

Таким образом,

$$\rho_\Lambda(xu) = e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)} \left(\rho_\Lambda(u) - \sum_{\alpha\in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha u) + G_\Lambda(xu)\right).$$

Просуммировав обе части полученного соотношения по всем $x \in X_*^t$, получим

$$\sum_{x\in X_*^t} \rho_\Lambda(xu) = \rho_\Lambda(u) \sum_{x\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)} - \left(\sum_{x\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}\right) \cdot \sum_{\alpha\in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha u) + \sum_{x\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)} G_\Lambda(xu),$$

и, следовательно,

$$\sum_{\alpha\in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha u) = \frac{\sum_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}}{1 + \sum_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}} \rho_\Lambda(u) + \frac{1}{1 + \sum_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}} \sum_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)} G_\Lambda(\alpha u).$$

Поскольку $K_{t\cup J}(\theta_t y) = 0$, то $G_\Lambda(\theta_t u) = 0$, и окончательно получаем $\rho_\Lambda(xu) =$

$$= e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)} \left(\frac{1}{\sum\limits_{\alpha\in X^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}} \rho_\Lambda(u) - \frac{1}{\sum\limits_{\alpha\in X^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}} \sum_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)} G_\Lambda(\alpha u) + G_\Lambda(xu) \right)$$

$$= \frac{e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}}{\sum\limits_{\alpha\in X^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}} \left(\rho_\Lambda(u) + \sum_{\alpha\in X^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)} \Big(G_\Lambda(xu) - G_\Lambda(\alpha u) \Big) \right). \qquad \square$$

4. Уравнение для корреляционных функций

Пусть $\Delta_1 = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ — поле одноточечных энергий перехода. Введем норму Δ_1 следующим образом:

$$\|\Delta_1\| = \sup_{t\in\mathbb{Z}^d} \sup_{x,u\in X^t} \sup_{\bar{x}\in X^{t^c}} |\Delta_t^{\bar{x}}(x,u)|.$$

Положим также

$$D = \sup_{t\in\mathbb{Z}^d} \sup_{x\in X^t} \sum_{s\in t^c} \sup_{y\in X^s} |\Delta_s^x(y,\theta_s) - \Delta_s(y,\theta_s)|.$$

Рассмотрим банахово пространство $\mathscr{B}_*$ ограниченных вещественнозначных функций φ на L_* с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{\Lambda\in W} \|\varphi\|_\Lambda, \qquad \|\varphi\|_\Lambda = \sum_{x\in X_*^\Lambda} |\varphi(x)|.$$

Пусть $\preceq$ — некоторый порядок на $\mathbb{Z}^d$, например, лексикографический порядок. Для каждого $I \in W$ обозначим $I' = I \backslash t$, где t есть наименьший элемент I относительно $\preceq$. В целях упрощения обозначений, для каждого $x \in X_*^I$ положим $x' = x_{I'}$.

Рассмотрим оператор $\mathscr{K} = \mathscr{K}^{\Delta_1}$ на $\mathscr{B}_*$, определенный следующим образом

$$(\mathscr{K}\varphi)(x) = \gamma(x)\big((S\varphi)(x) + (T\varphi)(x)\big), \qquad x \in X_*^I, I \in W,$$

где

$$\gamma(x) = \frac{e^{\Delta_t^{x'}(x_t,\theta_t)}}{\sum\limits_{\alpha\in X^t} e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)}}, \qquad (S\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x'), & |I| > 1, \\ 0, & |I| = 1, \end{cases}$$

$$(T\varphi)(x) = (G\varphi)(x) + \sum_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)} \Big((G\varphi)(x) - (G\varphi)(\alpha x') \Big)$$

$$(G\varphi)(x) = \sum_{J\in W(I^c)} \sum_{y\in X_*^J} K_{t\cup J}(x_t y) \left(\varphi(x'y) - \sum_{\alpha\in X_*^t} \varphi(\alpha x' y) \right),$$

$$K_{t\cup J}(x_t y) = \prod_{s\in J}\left(e^{\Delta_s^{x_t}(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right).$$

Далее, положим

$$\delta(x) = \begin{cases} \gamma(x), & |I| = 1, \\ 0, & |I| > 1, \end{cases} \qquad x \in X_*^I, I \in W,$$

$$C_1 = \frac{e^{\|\Delta_1\|}N_X}{1+e^{\|\Delta_1\|}N_X}, \qquad C_2 = 2\big(1+2e^{\|\Delta_1\|}N_X\big)\big(\exp\{e^D-1\}-1\big), \qquad N_X = |X|-1.$$

Теорема 4.1. *Пусть Δ_1 — поле одноточечных энергий перехода, удовлетворяющее условию* (3.1) *и такое, что*

$$C_1(1+C_2) < 1. \tag{4.1}$$

Тогда уравнение

$$\rho = \delta + \mathscr{K}\rho, \tag{4.2}$$

где $\mathscr{K} = \mathscr{K}^{\Delta_1}$, имеет единственное решение на $\mathscr{B}_*$, задаваемое соотношением

$$\rho = \big(1-\mathscr{K}\big)^{-1}\delta = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{K}^n\right)\delta.$$

Доказательство. Указанное решение может быть получено при последовательном применении оператора $\mathscr{K}$ к обеим сторонам уравнения (4.2). Остается показать, что $\|\mathscr{K}\| < 1$.

Пусть $I \in W$ и $x \in X_*^I$. Поскольку $-\|\Delta_1\| \le \Delta_t^{x'}(x_t,\theta_t) \le \|\Delta_1\|$, имеем

$$|\gamma(x)| = \left|\frac{e^{\Delta_t^{x'}(x_t,\theta_t)}}{1+\sum\limits_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)}}\right| \le \frac{e^{\|\Delta_1\|}}{1+e^{-\|\Delta_1\|}N_X}.$$

Следовательно, $\|\gamma S\varphi\|_I = 0$, если $|I| = 1$, а при $|I| > 1$, имеем

$$\|\gamma S\varphi\|_I = \sum_{x\in X_*^I}|\gamma(x)|\cdot|(S\varphi)(x)| \le \frac{e^{\|\Delta_1\|}}{1+e^{-\|\Delta_1\|}N_X}\sum_{x\in X_*^t}\sum_{x'\in X_*^{I'}}|\varphi(x')| = C_1\|\varphi\|_{I'}.$$

Таким образом, $\|\gamma S\varphi\|_I \le C_1\|\varphi\|$ для всех $I \in W$.

Далее,

$$\|\gamma T\varphi\|_I = \sum_{x\in X_*^I}|\gamma(x)|\left|(G\varphi)(x)\left(1+\sum_{\alpha\in X_*^t}e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)}\right)-\sum_{\alpha\in X_*^t}e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)}(G\varphi)(\alpha x')\right|\le$$

$$\le C_1\big(1+2e^{\|\Delta_1\|}N_X\big)\sum_{x'\in X_*^{I'}}\left|\sup_{\alpha\in X_*^t}(G\varphi)(\alpha x')\right|\le$$

$$\le C\sum_{x'\in X_*^{I'}}\sum_{J\in W(I^c)}\sum_{y\in X_*^J}\left|\sup_{\alpha\in X_*^t}K_{t\cup J}(\alpha y)\right|\cdot\left|\varphi(x'y)-\sum_{\alpha\in X_*^t}\varphi(\alpha x'y)\right|\le$$

$$=C\sum_{J\in W(I^c)}\sup_{\alpha\in X_*^t,y\in X_*^J}|K_{t\cup J}(\alpha y)|\left(\|\varphi\|_{I'\cup J}+\|\varphi\|_{I\cup J}\right)\le$$

$$\le 2\|\varphi\|C\sum_{J\in W(I^c)}\sup_{\alpha\in X_*^t,y\in X_*^J}|K_{t\cup J}(\alpha y)|,$$

где $C=C_1\big(1+2e^{\|\Delta_1\|}N_X\big)$. Для всех $\alpha\in X_*^t$ и $y\in X_*^{I^c}$, используя свойства экспоненциальной функции, можем написать

$$\sum_{J\in W(I^c)}|K_{t\cup J}(\alpha y_J)|=\sum_{J\in W(I^c)}\prod_{s\in J}|e^{\Delta_s^\alpha(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)}-1|=$$

$$=\sum_{n=1}^\infty\sum_{J\in W(I^c):|J|=n}\prod_{s\in J}|e^{\Delta_s^\alpha(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)}-1|=$$

$$=\sum_{n=1}^\infty\sum_{s_1\in I^c}\sum_{s_2\in I^c\setminus s_1}\cdots\sum_{s_n\in I^c\setminus\{s_1,s_2,\dots,s_{n-1}\}}\prod_{j=1}^n|e^{\Delta_{s_j}^\alpha(y_{s_j},\theta_{s_j})-\Delta_{s_j}(y_{s_j},\theta_{s_j})}-1|<$$

$$<\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\left(\sum_{s\in I^c}|e^{\Delta_s^\alpha(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)}-1|\right)^n\le\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\left(e^{\sum\limits_{s\in I^c}|\Delta_s^\alpha(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)|}-1\right)^n<$$

$$<\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\left(e^D-1\right)^n=\exp\{e^D-1\}-1,$$

откуда окончательно получаем

$$\|\gamma T\varphi\|_I\le 2C_1\big(1+2e^{\|\Delta_1\|}N_X\big)\big(\exp\{e^D-1\}-1\big)\|\varphi\|$$

при всех $I\in W$. Таким образом,

$$\|\mathscr{K}\|\le C_1+2C_1\big(1+2e^{\|\Delta_1\|}N_X\big)\big(\exp\{e^D-1\}-1\big)=C_1(1+C_2)<1.\qquad\square$$

Следующая теорема является основным результатом настоящей статьи. При ее доказательстве мы следуем работам Рюэля [1, 4].

Теорема 4.2. *Пусть* Δ_1 *— поле одноточечных энергий перехода, удовлетворяющее условиям* (3.1) *и* (4.1), *и пусть* $\rho(\Delta_1)=\{\rho_\Lambda,\Lambda\in W\}$ *— отвечающее* *ему семейство корреляционных функций в конечных объемах. Тогда существует положительная убывающая функция ε, такая, что $\lim\limits_{d\to\infty}\varepsilon(d)=0$, а при всех $x\in X_*^I$, $I\subset\Lambda\in W$, $|\rho_\Lambda(x)-\rho(x)|<\varepsilon\big(d(I,\Lambda^c)\big)$, где ρ есть решение уравнения* (4.2).

Доказательство. Для каждого $\Lambda\in W$ рассмотрим оператор ψ_Λ на $\mathscr{B}_*$, задаваемый следующим образом

$$(\psi_\Lambda\varphi)(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in L_*^\Lambda,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Понятно, что $\|\psi_\Lambda\|=\sup\limits_{\|\varphi\|=1}\|\psi_\Lambda\varphi\|=1$, и при всех $V\subset\Lambda$ выполнено $\psi_V\psi_\Lambda=\psi_V$.

Согласно Теореме 3.1, при каждом $\Lambda\in W$ соответствующий элемент ρ_Λ семейства $\rho(\Delta_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho_\Lambda=\psi_\Lambda\delta+\psi_\Lambda\mathscr{K}\rho_\Lambda. \tag{4.3}$$

Поскольку $\|\psi_\Lambda\mathscr{K}\|\le\|\mathscr{K}\|$, согласно Теореме 4.1 имеем $\|\psi_\Lambda\mathscr{K}\|<1$, и, следовательно, ρ_Λ является единственным решением уравнения (4.3), которое может быть записано следующим образом

$$\rho_\Lambda=\big(1-\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^{-1}\psi_\Lambda\delta=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\big(\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^n\right)\psi_\Lambda\delta.$$

Для всех $V\subset\Lambda\in W$ и $n\ge1$ можем написать

$$\psi_V\rho_\Lambda-\psi_V\rho=\psi_V\left(\big(1-\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^{-1}\psi_\Lambda-\big(1-\mathscr{K}\big)^{-1}\right)\delta=$$

$$=\psi_V\left(\big(1-\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^{-1}-\big(1+\sum_{k=1}^{n}(\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\big)\right)\psi_\Lambda\delta+\psi_V\psi_\Lambda\delta+\psi_V\big(\sum_{k=1}^{n}(\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\big)\psi_\Lambda\delta-$$

$$-\psi_V\left(\big(1-\mathscr{K}\big)^{-1}-\big(1+\sum_{k=1}^{n}\mathscr{K}^k\big)\right)\delta-\psi_V\delta-\psi_V\big(\sum_{k=1}^{n}\mathscr{K}^k\big)\delta=$$

$$=\psi_V\big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\big)\psi_\Lambda\delta-\psi_V\big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathscr{K}^k\big)\delta+\psi_V\sum_{k=1}^{n}\big((\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\psi_\Lambda-\mathscr{K}^k\big)\delta.$$

Далее,

$$\left\|\psi_V\big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\big)\psi_\Lambda\right\|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\|\mathscr{K}\|^k=\frac{\|\mathscr{K}\|^{n+1}}{1-\|\mathscr{K}\|},$$

$$\left\|\psi_V\big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathscr{K}^k\big)\right\|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\|\mathscr{K}\|^k=\frac{\|\mathscr{K}\|^{n+1}}{1-\|\mathscr{K}\|},$$

и остается оценить $\left\|\psi_V\sum\limits_{k=1}^{n}\big((\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\psi_\Lambda-\mathscr{K}^k\big)\right\|$.

Для каждого $V \subset \Lambda \in W$ и $S \subset \mathbb{Z}^d$, такого, что $\Lambda \subset S$, и всех $x \in X_*^I$, $I \subset V$, можем написать

$$|(\psi_V \mathscr{K} \psi_S \varphi)(x) - (\psi_V \mathscr{K} \psi_\Lambda \varphi)(x)| \le |\gamma(x)| \sum_{\alpha \in X_*^t} e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)} \times$$

$$\sum_{\substack{J \in W(S\setminus I):\\ J\cap(S\setminus\Lambda)\neq\varnothing}} \sum_{y \in X_*^J} |K_{t\cup J}(x_t y) - K_{t\cup J}(\alpha y)| \cdot \left| \varphi(x'y) - \sum_{\beta \in X_*^t} \varphi(\beta x' y) \right| \le$$

$$\le \frac{e^{\|\Delta_1\|}}{1 + e^{-\|\Delta_1\|} N_X} e^{\|\Delta_1\|} N_X \sum_{J \in W(\Lambda^c)} 2 \sup_{\alpha \in X_*^t, y \in X_*^J} \times$$

$$\times |K_{t\cup J}(\alpha y)| \left(\sum_{y \in X_*^J} |\varphi(x'y)| + \sum_{y \in X_*^J, \beta \in X_*^t} |\varphi(\beta x' y)| \right) \le$$

$$\le 4C_1 e^{\|\Delta_1\|} \|\varphi\| \sum_{J \in W(\Lambda^c)} \sup_{\alpha \in X_*^t, y \in X_*^J} |K_{t\cup J}(\alpha y)| \,.$$

Применив те же рассуждения, что и при доказательстве Теоремы 4.1, для всех $\alpha \in X_*^t$ и $y \in X_*^{\Lambda^c}$ получим

$$\sum_{J \in W(\Lambda^c)} |K_{t\cup J}(\alpha y_J)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(e^{\sum\limits_{s\in\Lambda^c} |\Delta_s^\alpha(y_s,\theta_s) - \Delta_s(y_s,\theta_s)|} - 1 \right)^n < \exp\{e^{\sigma(\Lambda)} - 1\} - 1,$$

где

$$\sigma(\Lambda) = \sum_{s \in \Lambda^c} \sup_{\alpha \in X^t, y \in X^s} |\Delta_s^\alpha(y,\theta_s) - \Delta_s(y,\theta_s)| \to 0 \quad \text{при } \Lambda \uparrow V^c.$$

Следовательно, существует положительная убывающая функция f, такая, что $\lim\limits_{d\to\infty} f(d) = 0$ и при всех $V \subset \Lambda \subset S$,

$$\|\psi_V \mathscr{K} \psi_S - \psi_V \mathscr{K} \psi_\Lambda\| \le f(d(V,\Lambda^c)). \tag{4.4}$$

Для $\Lambda \in W$ обозначим через $\Lambda(r) = \{s \in \Lambda : d(s,\Lambda^c) > r\}$ множество точек Λ, находящихся на расстоянии больше чем r от Λ^c, $r \ge 1$. Понятно, что при $r_1 > r_2$, $\Lambda(r_1) \subset \Lambda(r_2) \subset \Lambda$. Из (4.4) следует, что для всех $r \ge 1$ и $k \ge 1$ выполнено

$$\|\psi_{\Lambda(kr)} \mathscr{K} \psi_{\Lambda(jr)} - \psi_{\Lambda(kr)} \mathscr{K} \psi_{\Lambda((k-1)r)}\| \le f(r), \qquad 1 \le j < k,$$

$$\|\psi_{\Lambda(kr)} \mathscr{K} - \psi_{\Lambda(kr)} \mathscr{K} \psi_{\Lambda((k-1)r)}\| \le f(r).$$

Тогда

$$\|\psi_k (\psi_\Lambda \mathscr{K})^k \psi_\Lambda - \psi_k \mathscr{K} \psi_{k-1} ... \mathscr{K} \psi_1 \mathscr{K} \psi_\Lambda\| \le (k-1) f(r) \|\mathscr{K}\|^{k-1},$$

$$\|\psi_k \mathscr{K}^k - \psi_k \mathscr{K} \psi_{k-1} ... \mathscr{K} \psi_1 \mathscr{K} \psi_\Lambda\| \le k f(r) \|\mathscr{K}\|^{k-1}.$$

Следовательно,

$$\|\psi_{\Lambda(kr)}\big(\mathscr{K}\psi_{\Lambda(kr)}\big)^k - \psi_{\Lambda(kr)}\mathscr{K}^k\| \le 2kf(r)\|\mathscr{K}\|^{k-1},$$

и заменяя r на nr/k, получаем

$$\|\psi_{\Lambda(nr)}\big(\mathscr{K}\psi_{\Lambda(kr)}\big)^k - \psi_{\Lambda(nr)}\mathscr{K}^k\| \le 2kf(r)\|\mathscr{K}\|^{k-1}$$

при всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Принимая во внимание все вышеприведенные оценки, можем написать

$$\begin{aligned}
&\Big\|\psi_{\Lambda(nr)}\big(1-\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^{-1}\psi_\Lambda - \psi_{\Lambda(nr)}\big(1-\mathscr{K}\big)^{-1}\Big\| \le \\
&\le \left\|\psi_{\Lambda(nr)}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\Big)\psi_\Lambda\right\| + \left\|\psi_{\Lambda(nr)}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathscr{K}^k\Big)\right\| \\
&+ \left\|\psi_{\Lambda(nr)}\sum_{k=1}^{n}\big((\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\psi_\Lambda - \mathscr{K}^k\big)\right\| \le \\
&\le \frac{2\|\mathscr{K}\|^{n+1}}{1-\|\mathscr{K}\|} + 2f(r)\sum_{k=1}^{n}k\|\mathscr{K}\|^{k-1} < \frac{2\|\mathscr{K}\|^{n+1}}{1-\|\mathscr{K}\|} + \frac{2f(r)}{\big(1-\|\mathscr{K}\|\big)^2}.
\end{aligned}$$

Правая часть полученного неравенства стремится к нулю когда n и r возрастают. Полагая $d = nr$, можно найти положительную убывающую функцию ε, такую, что $\lim\limits_{d\to\infty}\varepsilon(d) = 0$ и

$$\Big\|\psi_{\Lambda(d)}\big(1-\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^{-1}\psi_\Lambda - \psi_{\Lambda(d)}\big(1-\mathscr{K}\big)^{-1}\Big\| < \frac{\varepsilon(d)}{\|\delta\|}.$$

Отсюда вытекает $\|\psi_{\Lambda(d)}\rho_\Lambda - \psi_{\Lambda(d)}\rho\| < \varepsilon(d)$, и, следовательно, при всех $I \subset \Lambda$ и $x \in X_*^I$ имеем $|\rho_\Lambda(x) - \rho(x)| \le \|\psi_I\rho_\Lambda - \psi_I\rho\| < \varepsilon(d)$ как только $d(I, \Lambda^c) > d$. $\square$

Замечание 2. *Пусть Φ — вакуумный потенциал парного взаимодействия (с вакуумом θ), т.е. $\Phi_J(x) = 0$, если $x_t = \theta_t$ хотя бы при одном $t \in J$, $J \in W$. Норма Φ определяется следующим образом*

$$\|\Phi\| = \sup_{t\in\mathbb{Z}^d}\sup_{x\in X_*^t}\sum_{s\in t^c}\sup_{y\in X_*^s}|\Phi_{ts}(xy)|.$$

Пусть Δ_1^Φ — соответствующее поле одноточечных энергий перехода. Тогда $\|\Delta_1\| \le 2\|\Phi\|$, $D \le \|\Phi\|$, и Теорема 4.2 выполнена, если

$$\frac{e^{2\|\Phi\|}N_X}{1+e^{-2\|\Phi\|}N_X}\Big(1 + 2\big(1+2e^{2\|\Phi\|}N_X\big)\big(\exp\{e^{\|\Phi\|}-1\}-1\big)\Big) < 1.$$

Замечание 3. *В работе* [9] *(см. также* [11]*) было показано, что любое распределение вероятностей P_Λ на X^Λ, $\Lambda \in W$, с необходимостью имеет гиббсовскую форму*

$$P_\Lambda(x) = \frac{e^{\Delta_\Lambda(x,u)}}{\sum\limits_{z \in X^\Lambda} e^{\Delta_\Lambda(z,u)}}, \qquad x \in X^\Lambda,$$

где $u \in X^\Lambda$ и Δ_Λ — функция энергии перехода, т.е. функция на $X^\Lambda \times X^\Lambda$, удовлетворяющая условию $\Delta_\Lambda(x,u) = \Delta_\Lambda(x,z) + \Delta_\Lambda(z,u)$, $x, u, z \in X^\Lambda$. Корреляционная функция ρ_Λ для P_Λ определяется следующим образом

$$\rho_\Lambda(x) = \sum_{y \in X^{\Lambda \setminus I}} P_\Lambda(xy),$$

где $x \in X_*^I$, $I \subset \Lambda$, и мы приходим к определению корреляционной функции, использованному в настоящей работе.

Благодарность. Авторы выражают благодарность анонимному рецензенту за ценные замечания, которые помогли улучшить статью.

Abstract. In this paper, the well-known method of correlation equations for constructing Gibbs measures is generalized based on the concept of the transition energy field. Using the properties of transition energies, we obtain the system of correlation equations for lattice systems with finite spin space. It is shown that for a sufficiently small value of the one-point transition energies, the corresponding system of correlation functions, considered in the Banach space of bounded real-valued functions, has a solution which is unique. Finally, the convergence of finite-volume correlation functions to the limiting correlation function is shown.

Список литературы

[1] D. Ruelle, “Correlation functions of classical gases”, Ann. Phys. (N. Y.), **25**, 109 – 120 (1963).
[2] R. A. Minlos, “Limiting Gibbs’ distribution”, Funct. Anal. Appl. **1** (2), 140 – 150 (1967).
[3] G. Gallavotti and S. Miracle-Sole, “Correlation functions of a lattice system”, Comm. Math. Phys., **7** (4), 274 – 288 (1968).
[4] D. Ruelle, Statistical Mechanics, Rigorous Results, New York, Benjamin (1969).
[5] R. A. Minlos, Introduction to Mathematical Statistical Physics, University Lecture Series **19**, Amer Mathematical Society (1999).
[6] B. S. Nahapetian, “Strong mixing of a Gibbs random field with a discrete argument and some of its applications” [in Russian], Izv. AN Arm.SSR, series “Mathematics”, **3**, 242 – 254 (1975).
[7] V. A. Arzumanyan, B. S. Nakhapetyan, S. K. Pogosyan, “Cluster properties of classical lattice spin systems with vacuum” [in Russian], Theor. Math. Phys., **67** (1), 331 – 339 (1986).
[8] V. A. Arzumanyan, B. S. Nakhapetyan, S. K. Pogosyan, “Classical spin lattice systems with vacuum”, Acta Appl. Math., **22**, 33 – 53 (1991).
[9] S. Dachian and B. S. Nahapetian, “On the relationship of energy and probability in models of classical statistical physics”, Markov Processes Relat. Fields, **25** (4), 649 – 681 (2019).

[10] L. A. Khachatryan and B. S. Nahapetian, “On the characterization of a finite random field by conditional distribution and its Gibbs form”, J. Theor. Probab. **36**, 1743 – 1761 (2023).
[11] L. A. Khachatryan and B. S. Nahapetian, “Duality of energy and probability in finite-volume models of statistical physics”, Reports of NAS RA **123** (3-4), 7 – 14 (2023).
[12] L. A. Khachatryan and B. S. Nahapetian, “Gibbs scheme in the theory of random fields”, Submitted to Annales Henri Poincaré (2025), (https://doi.org/10.1007/s00023-025-01573-z).
[13] L. A. Khachatryan and B. S. Nahapetian, “Transition energy field and correlation equations”, Reports of NAS RA, **125** (1), 7 -– 14 (2025).

Поступила 25 февраля 2025

После доработки 18 апреля 2025

Принята к публикации 22 апреля 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 4, 2025, стр. 60 – 76.

СВОЙСТВА ОБЩИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

В. ЦАГАРЕИШВИЛИ, А. КАШИБАДЗЕ

Тбилиский государственный университет им. И. Джавахиашвили, Грузия
Кутаисский интернациональный университет, Грузия
E-mails: *cagare@ymail.com; Kashibadzeani1996@gmail.com*

Аннотация. В статье рассматривается сходимость специального ряда модулей разностей коэффициентов Фурье относительно общих ортонормированных систем (ОНС) функций из некоторого класса дифференцируемых функций. Показано, что функции с производными из класса Lip 1 на $[0, 1]$ имеют сходящиеся ряды такого вида относительно систем Хаара или тригонометрической (см. [1, Ch. 2]). Мы доказали, что относительно общих ОНС этот ряд, вообще говоря, не сходится. Поэтому возникает необходимость найти условие, которое должно быть наложено на функции ОНС, чтобы этот специальный ряд сходился для функций с производными из класса Lip 1. Мы также показали, что полученные результаты являются наилучшими из возможных.

MSC2020 numbers: 42C10.

Ключевые слова: класс функций Липшица; ортонормированная система; коэффициенты Фурье; линейный функционал.

1. Введение

Пусть (φ_k) – произвольная ортонормированная система (ОНС) на $[0, 1]$), и $\varepsilon > 0$.

Определим коэффициенты Фурье функции $f \in L_2 = L_2(0, 1)$:

$$C_n(f) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть

$$A_n(a) = 2^{-n} \sum_{i=1}^{2^n-1} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(a, x)\,dx \right|, \tag{1.1}$$

где $(\varepsilon > 0)$

$$D_n(a, x) = D_n(a, \varepsilon, x) = \sum_{k=1}^{n} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \big(\phi_k(x) - \phi_{k+1}(x)\big)$$

и

$$\phi_k(x) = \int_0^x \varphi_k(t)\,dt.$$

Через Lip 1 мы обозначаем пространство функций f (на $[0,1]$) с

$$\max_{|x-y|\le h} |f(x) - f(y)| = O(h).$$

Lip 1 – банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}\,1} = \|f\|_C + \sup_{x,y\in[0,1],\,x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|},$$

где $C = C(0,1)$ – пространство непрерывных на $[0,1]$ функций, и $\|f\|_C$ норма f в C.

Через C_L обозначим класс функций f с $f' \in \mathrm{Lip}\,1$.

Лемма 1.1 (см. [2])**.** *Пусть $f, R \in L_2$, тогда*

$$\int_0^1 f(x)R(x)\,dx = m\sum_{i=1}^{m-1}\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \left(f(x) - f\left(x+\frac{1}{m}\right)\right) dx \int_0^{\frac{i}{m}} R(x)\,dx$$

$$(1.2) \qquad + m\int_{1-\frac{1}{m}}^1 f(x)\,dx \int_0^1 R(x)\,dx + m\sum_{i=1}^{m}\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}}\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} (f(x)-f(u))\,du\,R(x)\,dx.$$

Пусть (X_n) – система Хаара на $[0,1]$. Тогда, как известно, (см. [1, Гл. 2, стр. 69]), если $m = 2^n + k$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ то

$$X_m(x) = X_{2^n+k}(x) = 2^{\frac{n}{2}}, \quad \text{при} \quad x \in \big(\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\big);$$

$$X_m(x) = X_{2^n+k}(x) = -2^{\frac{n}{2}}, \quad \text{при} \quad x \in \big(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\big);$$

$$X_m(x) = X_{2^n+k}(x) = 0, \quad \text{при} \quad x \notin \big[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\big];$$

В точках разрыва функции Хаара равны полусумме односторонних пределов, а в концах интервала $[0,1]$ – пределу изнутри.

2. Основные проблемы

Теорема 2.1. *Пусть (X_n) – система Хаара. Для любых $f \in C_L$ и $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(f) - C_{k+1}(f)\big)^2 k^{3-\varepsilon} < +\infty,$$

где $C_k(f) = \int_0^1 f(x)X_k(x)\,dx$.

Доказательство. Известно, что (см. [3]) для $1 \le k < 2^n - 1$

$$C_{2^n+k}(f) - C_{2^n+k+1}(f)$$
$$= 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \left(f\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - 2f(x) + f\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) dx.$$

Допустим $f \in C_L$. По теореме Лагранжа,

$$f\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - f(x) = -\frac{1}{2^{n+1}} f'(y_{k,n}) \quad \text{и}$$
$$f\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} f'(y_{k+1,n}),$$

где

$$y_{k,n}, y_{k+1,n} \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right).$$

Так как $f' \in \mathrm{Lip}\,1$, для $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$,

$$|f'(y_{k+1}) - f'(y_k)| = O\left(2^{-n}\right).$$

Следовательно,

$$\left| 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \left(f\Big(x - \frac{1}{2^{n+1}}\Big) - 2f(x) + f\Big(x + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\right) dx \right|$$
$$\le 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \left(\left| f\Big(x - \frac{1}{2^{n+1}}\Big) - f(x) - \left(f(x) - f\Big(x + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\right) dx \right| \right)$$
$$\le 2^{\frac{n}{2}} 2^{-n-1} \frac{1}{2^n} \big| f'(y_{k+1,n}) - f'(y_{k,n}) \big| = O(1) 2^{-\frac{3n}{2}} 2^{-n} = O\big(2^{-\frac{5n}{2}}\big).$$

Следовательно, получаем

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \big(C_{2^n+k}(f) - C_{2^n+k+1}(f) \big)^2 (2^n + k)^{3-\varepsilon} = O(1) 2^n 2^{-5n} 2^{3n-\varepsilon n} = O(2^{-n-\varepsilon n}).$$

Далее, как известно, если $f' \in \mathrm{Lip}\,1$, то $C_{2^n+k}(f) = O\big(2^{-\frac{3}{2}n}\big)$ и,

$$\big| C_{2^n}(f) - C_{2^n+1}(f) \big| \le \Bigg| 2^{\frac{n-1}{2}} \int_{1-\frac{2}{2^n}}^{1-\frac{1}{2^n}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{1}{2^n}\right)\right) dx -$$
$$-2^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) dx| = O(1) 2^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} = O(1) 2^{-\frac{3n}{2}}.$$

Окончательно,

$$\sum_{m=2}^{\infty}(C_m(f)-C_{m+1}(f))^2m^{3-\varepsilon}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\big(C_k(f)-C_{k+1}(f)\big)^2k^{3-\varepsilon}$$
$$\le\sum_{n=0}^{\infty}\big(C_{2^n}(f)-C_{2^n+1}(f)\big)^22^{n(3-\varepsilon)}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n-1}\big(C_{2^n+k}(f)-C_{2^n+k+1}(f)\big)^2(2^n+k)^{3-\varepsilon}$$
$$=O(1)\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-n\varepsilon}+2^{-n\varepsilon}\big)<+\infty.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.1. *Рассмотрим случай $g(x)=x$. Так как*

$$\left(x-\frac{1}{2^{n+1}}\right)-2x+\left(x+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=0,$$

значит $(1\le k<2^n-1)$

$$C_{2^n+k}(g)-C_{2^n+k+1}(g)$$
$$=2^{\frac{n}{2}}\int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}\left(g\left(x-\frac{1}{2^{n+1}}\right)-2g(x)+g\left(x+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)dx=0.$$

Далее,

$$C_{2^n}(g)=C_{2^{n-1}+2^{n-1}}(g)=2^{\frac{n-1}{2}}\int_{1-\frac{2}{2^n}}^{1-\frac{1}{2^n}}\left(x-\left(x+\frac{1}{2^n}\right)\right)dx$$
$$=-2^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}2^{\frac{-3n}{2}}$$

и

$$C_{2^n+1}(g)=2^{\frac{n}{2}}\int_0^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}\left(x-\left(x+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)dx=-2^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{2^{n+1}}=-\frac{1}{4}\,2^{\frac{-3n}{2}}.$$

Очевидно, что

$$\big|C_{2^n}(f)-C_{2^n+1}(f)\big|=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)2^{\frac{-3n}{2}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(C_{2^n}(f)-C_{2^n+1}(f)\big)^22^{3n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}2^{-3n}2^{3n}=+\infty.$$

Теперь очевидно, что условие $\varepsilon>0$ существенно в теореме 2.1.

Для тригонометрической системы справедливо следующее утверждение (см. [1, Гл. 2, стр. 117] или [4]).

Теорема 2.2. *Пусть* $(\sqrt{2}\cos 2\pi n)$ *– ОНС на* $[0,1]$. *Тогда для любых* $f \in C_L$ *и* $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(f)\big)^2 k^{3-\varepsilon} < +\infty,$$

где $C_k(f) = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\cos 2\pi kx\,dx$.

Действительно, интегрируя по частям, легко доказать, что $C_k(f) = \frac{1}{2\pi k}C_k(f')$, где $f' \in \operatorname{Lip} 1$ и $C_k(f') = O(\frac{1}{k})$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(f)\big)^2 k^{3-\varepsilon} &= O(1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\big(C_k(f')\big)^2 k^{3-\varepsilon}\\ &= O(1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}k^{3-\varepsilon} = O(1)\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1-\varepsilon} < +\infty.\end{aligned}$$

Замечание 2.2. *Из теоремы 2.2 следует, что для тригонометрической системы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(f) - C_{k+1}(f)\big)^2 k^{3-\varepsilon} < +\infty$$

для $f \in C_L$ *и* $\varepsilon > 0$.

Замечание 2.3. *Если* (X_k) *– система Хаара то для* $u(x) = x$ *и* $\varepsilon \in [0,1]$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(u)\big)^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty$$

где $C_k(u) = \int_0^1 u(x)X_k(x)\,dx$.

Для $k = 2^m + s$, $s = 1,\dots,2^m$ имеем:

$$C_k(u) = 2^{\frac{m}{2}}\int_{\frac{2s-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2s-1}{2^{m+1}}}\left(u(x) - u\left(x + \frac{1}{2^{m+1}}\right)\right)dx = -2^{\frac{m}{2}}2^{-(2m+2)} = -\frac{1}{4}2^{\frac{-3m}{2}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{s=2^m+1}^{2^{m+1}} \big(C_s(u)\big)^2 s^{3-\varepsilon} \ge 2^{m(3-\varepsilon)}\cdot 2^m\frac{1}{16}2^{-3m} > \frac{1}{16}2^{m(1-\varepsilon)}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(C_k(u)\big)^2 k^{3-\varepsilon} \ge \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=2^m+1}^{2^{m+1}}\big(C_s(u)\big)^2 s^{3-\varepsilon} > \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}2^{m(1-\varepsilon)} = +\infty.$$

Пусть (φ_k) – произвольная ОНС на $[0,1]$. Возникает вопрос: сходится ли ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(C_k(f) - C_{k+1}(f)\big)^2 k^{3-\varepsilon}$$

для любых $\varepsilon \in (0,3)$ и $f \in C_L$, где

$$C_k(f) = \int_0^1 f(x)\varphi_k(x)\,dx?$$

Из теоремы Олевского [5] имеем:

Теорема 2.3. *Если $(a_k) \in \ell_2$ – произвольная последовательность действительных чисел, и $h(x) = 1$ on $[0,1]$, тогда существует полная ОНС (φ_k) такая, что*

$$C_k(h) = \int_0^1 h(x)\varphi_k(x)\,dx = b \cdot a_k, \quad k = 1,2,\dots,$$

где b не зависит от k.

Определим последовательность (a_k) следующим образом: $a_{2k} = \frac{1}{\log(2k+1)\sqrt{2k}}$ и $a_{2k-1} = 0$, $k = 1,2,\dots$. Тогда,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(2k+1)\sqrt{2k}}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\log^2(2k+1)} < +\infty.$$

По теореме 2.3,

$$C_{2k}(h) = \frac{b}{\log(2k+1)\sqrt{2k}} \quad \text{and} \quad C_{2k-1}(h) = 0, \quad k = 1,2,\dots.$$

Тогда, для $\varepsilon \in [0,3)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(h) - C_{k+1}(h)\big)^2 k^{3-\varepsilon} = b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\log^2(2k+1)}(2k)^{3-\varepsilon} = +\infty.$$

Поэтому, для функции $f(x) = 1$ ($x \in [0,1]$) и $\varepsilon \in [0,3)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(f) - C_{k+1}(f)\big)^2 k^{3-\varepsilon}$$

не сходится для всех ОНС (φ_k).

Следовательно, чтобы для любой функции ряд $f \in C_L$ ($\varepsilon > 0$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(f) - C_{k+1}(f)\big)^2 k^{3-\varepsilon}$$

сходился для ОНС (φ_k), нам нужно наложить дополнительные условия на функции φ_k.

3. Основные результаты

Лемма 3.1. *Пусть (φ_k) – ОНС на $[0,1]$, $\int_0^1 \varphi_k(x)\,dx = 0$ ($k = 1,2,\dots$) и $r(x) = x$ на $[0,1]$. Если lkz $(a_k) \in \ell_2$ и для любого $\varepsilon \in (0,3)$,*

$$\limsup_n \left| \int_0^1 D_n(a,x)\,dx \right| = +\infty, \tag{3.1}$$

тогда для любого $\varepsilon \in (0,3)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(r) - C_{k+1}(r)\big)^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty.$$

Доказательство. Мы начнем с интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} C_k(r) - C_{k+1}(r) &= \int_0^1 x\left(\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)\right)\,dx \\ &= \int_0^1 x\; d\int_0^x \big(\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)\big)\,dt\,dx = \int_0^1 \left(\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)\right)\,dx \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^x \big(\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)\big)\,dt\,dx = -\int_0^1 \int_0^x \big(\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)\big)\,dt\,dx. \end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k=1}^{n} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \left(C_k(r) - C_{k+1}(r)\right)\right| \\ &\qquad = \left|\int_0^1 r(x) \sum_{k=1}^{n} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \left(\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)\right)\,dx\right| \\ &\qquad = \left|\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \int_0^x \big(\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)\big)\,dt\,dx\right| = \left|\int_0^1 D_n(a,x)\,dx\right|. \end{aligned}$$

Согласно (3.1),

$$\lim_n \left|\sum_{k=1}^{n} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \left(C_k(r) - C_{k+1}(r)\right)\right| = +\infty.$$

Следовательно, для $(a_k) \in \ell_2$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \left(C_k(r) - C_{k+1}(r)\right)$$

расходится.

Значит (см. [6]) $\left(\left(C_k(r) - C_{k+1}(r)\right) k^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\right) \notin \ell_2$ и для любого $\varepsilon \in (0,3)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(r) - C_{k+1}(r)\big)^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty. \qquad \square$$

Теорема 3.1. *Пусть* (φ_k) *– ОНС на* $[0,1]$, $\int_0^1 \varphi_k(x)\,dx = 0$ $(k = 1,2,\ldots)$ *и пусть* (a_k) *– некоторая последовательность чисел. Если для некоторого* $(a_k) \in \ell_2$, *для любого* $\varepsilon > 0$,

$$A_n(a) = O(1), \tag{3.2}$$

Тогда для любой $f \in C_L$ *и любого* $\varepsilon > 0$, *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(C_k(f) - C_{k+1}(f)\big)^2 k^{3-\varepsilon}$$

сходится.

Доказательство. В (1.2), подставим $m = 2^n$, $f' = f$ и $D_n(a,x) = R(x)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
(3.3)\quad & \int_0^1 f'(x) D_n(a,x)\,dx \\
&= 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(f'(x) - f'\left(x + \frac{1}{2^n}\right)\right) dx \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(a,x)\,dx \\
&\qquad + 2^n \int_{1-\frac{1}{2^n}}^1 f'(x)\,dx \int_0^1 D_n(a,x)\,dx \\
&+ 2^n \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} (f'(x) - f'(u))\ du\, D_n(a,x)\,dx = M_1 + M_2 + M_3.
\end{aligned}
$$

Оценим величины M_1, M_2 и M_3.

a) При $f \in C_L$ или $f' \in \mathrm{Lip}\,1$, в силу (1.1) и (3.2) имеем: ($\Delta_{in} = [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]$, $i = 1, \dots, 2^n$)

$$
\begin{aligned}
|M_1| &\le 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \left| \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(f'(x) - f'\left(x + \frac{1}{2^n}\right)\right) dx \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(a,x)\,dx \right| \\
&\le 2^n \frac{1}{2^n} O\left(\frac{1}{2^n}\right) \sum_{i=1}^{2^n-1} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(a,x)\,dx \right| = O(1) A_n(a) = O(1).
\end{aligned}
$$

b) Не умаляя общности можем считать, что (см. лемму 3.1)

$$\left| \int_0^1 D_n(a,x)\,dx \right| = O(1).$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
|M_2| &\le 2^n \int_{1-\frac{1}{2^n}}^1 |f'(x)|\ dx \left| \int_0^1 D_n(a,x)\,dx \right| \\
&\le 2^n \frac{1}{2^n} \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|\ O(1) = O(1).
\end{aligned}
$$

c) Согласно неравенству Бесселя,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^x \varphi_k(t)\,dt \right)^2 \le 1,$$

Применив неравенство Гельдера и условия $f' \in \mathrm{Lip}\,1$ и $(a_k) \in l_2$, будем иметь

$$
\begin{aligned}
|M_3| &= \left| 2^n \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} (f'(x) - f'(u))\ du\, D_n(a,x)\,dx \right| \\
&\le 2^n \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n-1} O(2^{-n}) \max_{1 \le i \le 2^n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} |D_n(a,x)|\,dx
\end{aligned}
$$

$$= O(1)\,\frac{1}{\sqrt{2^n}}\,\max_{1\le i\le 2^n}\left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} (D_n(a,x))^2\,dx\right)^{\frac12}$$

$$= O(1)\,\frac{1}{\sqrt{2^n}}\,\max_{1\le i\le 2^n}\left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \int_0^x \left(\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)\right)\,dt\right)^2 dx\right)^{\frac12}$$

$$= O(1)\,\frac{1}{\sqrt{2^n}}\,\max_{1\le i\le 2^n}\left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 k^{3-\varepsilon}\right)\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^x \left(\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)\right)\,dt\right)^2 dx\right)^{\frac12}$$

$$= O(1)\,\frac{1}{\sqrt{2^n}} n^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac12} = O(1).$$

Из a), b), c) и (3.3) получим:

$$\left|\int_0^1 f'(x) D_n(a,x)\,dx\right| = O(1). \tag{3.4}$$

Интегрируя по частям, ($\int_0^1 \varphi_k(x)\,dx = 0,\ k=1,2,\ldots$), получим

$$\int_0^1 f(x)\left(\varphi_k(x)-\varphi_{k+1}(x)\right)\,dx = \int_0^1 f(x)\,d\int_0^x \left(\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)\right)dt\,dx \tag{3.5}$$

$$= f(1)\int_0^1 \left(\varphi_k(x)-\varphi_{k+1}(x)\right)\,dx - \int_0^1 f'(x)\int_0^x \left(\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)\right)dt\,dx$$

$$= -\int_0^1 f'(x)\int_0^x \left(\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)\right)dt\,dx.$$

Таким образом,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\left(C_k(f)-C_{k+1}(f)\right)\right|$$

$$= \left|\int_0^1 f(x)\sum_{k=1}^{n} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\left(\varphi_k(x)-\varphi_{k+1}(x)\right)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 f'(x)\sum_{k=1}^{n} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\int_0^x \left(\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)\right)dt\,dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 f'(x) D_n(a,x)\,dx\right|.$$

Отсюда и из (3.4),

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\left(C_k(f)-C_{k+1}(f)\right)\right| = O(1).$$

Далее, пусть

$$d_k = |a_k| \operatorname{sign}(C_k(f) - C_{k+1}(f)),$$

тогда для $(a_k) \in \ell_2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k(C_k(f) - C_{k+1}(f)) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(C_k(f) - C_{k+1}(f))| < \infty.$$

Соответственно, для любой $(a_n) \in \ell_2$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(f) - C_{k+1}(f))$$

сходится. Значит, (см. [6, Ch. 2, p. 40]) $(k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(f) - C_{k+1}(f))) \in l_2$, т. е.,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(f) - C_{k+1}(f))^2 \, k^{3-\varepsilon} < +\infty$$

для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in C_L$. □

Теорема 3.2. *Пусть* (φ_k) *– ОНС на* $[0,1]$, $\int_0^1 \varphi_k(x)\,dx = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *и* (b_k) *– некоторая последовательность чисел.*

Если для любого $\varepsilon \in (0,3)$,

$$\limsup_n A_n(b) = +\infty, \tag{3.6}$$

тогда существует функция $g \in C_L$ *такая, что для любого* $\varepsilon \in (0,3)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(g) - C_{k+1}(g))^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty.$$

Доказательство. Допустим, что для всех $\varepsilon \in (0,3)$,

$$\limsup_n \left| \int_0^1 D_n(b,x)\,dx \right| = +\infty.$$

Тогда, в силу леммы 3.1, для любого $\varepsilon \in (0,3)$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(r) - C_{k+1}(r))^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty,$$

где $r(x) = x$ на $[0,1]$.

Так как $r \in C_L$, теорема 3.2 имеет место. Теперь допустим

$$\left| \int_0^1 D_n(b,x)\,dx \right| = O(1). \tag{3.7}$$

Определим последовательность функций (g_n) из банахова пространства $\mathrm{Lip}\,1$:

$$g_n(x) = \int_0^x \left(\operatorname{sign} \int_0^t D_n(b,u)\,du \right) dt.$$

Положив в (1.2) $f = g_n$ и $a = b$, будем иметь:

$$\text{(3.8)}\quad \int_0^1 g_n(x) D_n(b,x)\,dx$$
$$= 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(g_n(x) - g_n\left(x + \frac{1}{2^n}\right)\right) dx \ \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b,x)\,dx$$
$$+ 2^n \int_{1-\frac{1}{2^n}}^1 g_n(x)\,dx \ \int_0^1 D_n(b,x)$$
$$+ 2^n \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} (g_n(x) - g_n(u))\ du\ D_n(b,x)\,dx = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Оценим Q_1, Q_2 и Q_3:

d) По определению функций g_n имеем:

$$\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(g_n(x) - g_n\left(x + \frac{1}{2^n}\right)\right) dx \ \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b,x)\,dx$$
$$= -\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \int_x^{x+2^{-n}} \left(\operatorname{sign} \int_0^t D_n(b,u)\,du\right) dt.$$

Допустим, что для некоторой $t_{i,n} \in (\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i+1}{2^n}]$,

$$\text{(3.9)}\qquad \operatorname{sign} \int_0^{\frac{i-1}{2^n}} D_n(b,u)\,du \neq \operatorname{sign} \int_0^{t_{i,n}} D_n(b,u)\,du.$$

Тогда существует точка $y_{i,n} \in (\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i+1}{2^n}]$ такая, что $\int_0^{y_{i,n}} D_n(b,u)\,du = 0$. Значит, $(i = 1, \dots, 2^n - 1)$

$$\int_0^{\frac{i+1}{2^n}} D_n(b,u)\,du = \int_0^{y_{i,n}} D_n(b,u)\,du + \int_{y_{i,n}}^{\frac{i+1}{2^n}} D_n(b,u)\,du = \int_{y_{i,n}}^{\frac{i+1}{2^n}} D_n(b,u)\,du.$$

Пусть M_n – множество тех $i = 1, \dots, 2^n - 1$, для которых имеет место (3.9). Тогда, если $\Delta\phi_k = \phi_k(x) - \phi_{k+1}(x)$, используя неравенство $\sum_{k=1}^n \phi_k^2(x) \le 1$, мы получаем

$$\sum_{i\in M_n} \left| \int_0^{\frac{i+1}{2^n}} D_n(b,u)\,du \right| \le \sum_{i=1}^{2^n-1} \left| \int_{y_{i,n}}^{\frac{i+1}{2^n}} D_n(b,u)\,du \right| \le \int_0^1 |D_n(b,u)|\,du$$
$$\le \left(\int_0^1 D_n^2(b,u)\,du \right)^{\frac12} = \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \Delta\phi_k(x) \right)^2 dx \right)^{\frac12}$$
$$\le n^{\frac32} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \int_0^1 \sum_{k=1}^n \Delta\phi_k^2(x)\,dx \right)^{\frac12} = O(n^{\frac32}).$$

Далее,

$$(3.10)\quad 2^n\Big|\sum_{i\in M_n}\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}\left(g_n(x)-g_n\left(x+\frac{1}{2^n}\right)\right)dx\int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|$$
$$=2^nO(2^{-n})2^{-n}\sum_{i\in M_n}\Big|\int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|=O(1)2^{-n}n^{\frac{3}{2}}=O(1).$$

С другой стороны, если $i\in V_n=\{1,2,\dots,2^n-1\}\setminus M_n$, то

$$\Big|\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}\left(g_n(x)-g_n\left(x+\frac{1}{2^n}\right)\right)dx\ \int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|$$
$$=\Big|2^{-n}2^{-n}\int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|.$$

Отсюда имеем:

$$(3.11)\quad 2^n\Big|\sum_{i\in V_n}\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}\left(g_n(x)-g_n\left(x+\frac{1}{2^n}\right)\right)dx\ \int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|$$
$$=2^n2^{-n}2^{-n}\sum_{i\in V_n}\Big|\int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|=2^{-n}\sum_{i\in V_n}\Big|\int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|.$$

Тода, из (3.10) и (3.11) следует, что

$$|Q_1|=2^n\Big|\sum_{i=1}^{2^n-1}\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}\left(g_n(x)-g_n\left(x+\frac{1}{2^n}\right)\right)dx\ \int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|$$
$$\geq 2^{-n}\sum_{i\in V_n}\Big|\int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|-2^{-n}\sum_{i\in M_n}\Big|\int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|$$
$$=2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n-1}\Big|\int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|-2\cdot 2^{-n}\sum_{i\in M_n}\Big|\int_0^{\frac{i}{2^n}}D_n(b,x)\,dx\Big|\geq A_n(b)-O(1).$$

e) Используя (3.7) и определение g_n,

$$|Q_2|\leq 2^n\Big|\int_{1-\frac{1}{2^n}}^1 g_n(x)\,dx\Big|\,\Big|\int_0^1 D_n(b,x)\,dx\Big|=O(1).$$

f) Далее, в силу определения функций g_n, и неравенств Бесселя, $\left(\sum_{k=1}^\infty\left(\int_0^x\varphi_k(t)\,dt\right)^2\leq 1\right)$ и Гельдера, получим:

$$|Q_3|\leq 2^n\frac{1}{2^n}\max_{1\leq i\leq 2^n}\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}|D_n(b,x)|\,dx\leq\frac{1}{\sqrt{2^n}}\max_{1\leq i\leq 2^n}\left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}\left(D_n(b,x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=O(1)\,\frac{1}{\sqrt{2^n}}\max_{1\leq i\leq 2^n}\left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}\left(\sum_{k=1}^n b_kk^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\int_0^x\left(\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)\right)dt\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= O(1)\,\frac{1}{\sqrt{2^n}} \max_{1\le i\le 2^n}\left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^2 k^{3-\varepsilon}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{k=1}^n \int_0^x \left(\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)\right)\,dt\right)^2 dx\right)^{\frac12} = O(1)\,\frac{1}{\sqrt{2^n}} n^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac12} = O(1).$$

Наконец, из d) (см. $Q_1|$), e), f) и (3.8), имеем:

$$\left|\int_0^1 g_n(x)D_n(b,x)\,dx\right| \ge A_n(b) - O(1) - O(1).$$

Согласно (3.6), для любого $\varepsilon\in(0,3)$,

$$\lim_n \left|\int_0^1 g_n(x)D_n(b,x)\,dx\right| = +\infty. \tag{3.12}$$

Очевидно, что

$$\|g_n\|_A = \|g_n\|_C + \sup_{x,y\in[0,1],\,x\ne y}\frac{|g_n(x)-g_n(y)|}{|x-y|} \le 2.$$

Так как интегралы $\int_0^1 g(x)D_n(b,x)\,dx$ образуют последовательность в банаховом пространстве $\mathrm{Lip}\,1$, по теореме Банаха-Штейнгауза, существует функция $g\in\mathrm{Lip}\,1$ такая, что (см. (3.12)) для любого $\varepsilon\in(0,3)$,

$$\lim_n \left|\int_0^1 g(x)D_n(b,x)\,dx\right| = +\infty. \tag{3.13}$$

Обозначим

$$S(x) = \int_0^x g(t)\,dt.$$

Подставив в (3.5) $f(x)=s(x)$ и $s'(x)=g(x)$, получим:

$$\int_0^1 s(x)\left(\varphi_k(x)-\varphi_{k+1}(x)\right)\,dx = -\int_0^1 s'(x)\int_0^x (\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t))\,dt\,dx$$

$$= -\int_0^1 g(x)\int_0^x (\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t))\,dt\,dx.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{k=1}^n b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\left(C_k(s)-C_{k+1}(s)\right)\right|$$

$$= \left|\int_0^1 s(x)\sum_{k=1}^n b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\left(\varphi_k(x)-\varphi_{k+1}(x)\right)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 g(x)\sum_{k=1}^n b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}}\int_0^x \left(\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)\right)\,dt\,dx\right| = \left|\int_0^1 g(x)D_n(a,x)\,dx\right|.$$

Поэтому (см. (3.13)), для любого $\varepsilon \in (0,3)$,

$$\lim_n \left| \sum_{k=1}^{n} b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \left(C_k(s) - C_{k+1}(s)\right) \right| = +\infty.$$

Значит, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(s) - C_{k+1}(s))$$

расходится для некоторого $(b_k) \in \ell_2$, что означает, что (см. [6, Гл. 2, стр. 40]) $(k^{\frac{3-\varepsilon}{2}}(C_k(s) - C_{k+1}(s)) \notin \ell_2$ для любого $\varepsilon \in (0,3)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(s) - C_{k+1}(s))^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty. \qquad \square$$

Теорема 3.3. *Существуют функция $q \in C_L$ и ОНС (d_n) такие, что*

1) $\displaystyle\int_0^1 d_n(x)\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots;$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (C_k(q,d) - C_{k+1}(q,d))^2 n^{3-\varepsilon} = +\infty$ *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$, *и*

$$C_k(q,d) = \int_0^1 q(x) d_n(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $u(x) = 0$, где $x = 0, \frac{1}{4}$ и $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $u(x) = 1$ при $x = \frac{1}{8}$, и $u(x) = -1$ при $x = \frac{3}{8}$. Кроме того, $u(x)$ линейна и непрерывна на $[0, \frac{1}{8}]$, $[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ и $[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$. Далее пусть

$$f(x) = \int_0^x u(t)\,dt.$$

Очевидно, что $f \in C_L$. Допустим, что $(n > 1)$ $a_n = \frac{1}{\log n \sqrt{n}}$ – последовательность чисел. Тогда, в силу теоремы А. Олевского[5], существует ОНС (φ_n) такая, что

$$C_n(f, \varphi) = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x)\,dx = b a_n,$$

где b – некоторое действительное число. Тогда,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{1}{\log n \sqrt{n}} - \frac{1}{\log(n+1)\sqrt{n+1}} \\ &\geq \frac{1}{\log(n+1)\sqrt{n}} - \frac{1}{\log(n+1)\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\log(n+1)\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{2\log(n+1)\sqrt{n}(n+1)}, \end{aligned}$$

значит, $(\varepsilon \in (0,1))$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})^2 n^{3-\varepsilon} \geq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2(n+1) n (n+1)^2}\, n^{3-\varepsilon}$$

$$\geq \frac{1}{16} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2\log^2(n+1)}\, n^{-\varepsilon} = +\infty.$$

Таким образом, $(\varepsilon \in (0,1))$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n(f,\varphi) - C_{n+1}(f,\varphi))^2 n^{3-\varepsilon} = +\infty. \tag{3.14}$$

Определим систему (d_n) следующим образом:

$$d_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(2x), & \text{где } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ -\varphi_n\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), & \text{где } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Пусть $q(x) = f(2x)$ при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, и $q(x) = 0$ при $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Очевидно, что

$$1)\quad \int_0^1 d_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_n(2x)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_n\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = 0;$$

$$2)\quad \int_0^1 d_n^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_n^2(2x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_n^2\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx = 1;$$

$$3)\quad \int_0^1 d_n(x) d_m(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_n(2x)\varphi_m(2x)\,dx$$
$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_n\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\varphi_m\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0.$$

Т.е. система (d_n) ортонормирована. Далее,

$$C_n(q,d) = \int_0^1 q(x) d_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)\varphi_n(2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{2} C_n(f,\varphi).$$

Согласно (3.11), для любого $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n(q,d) - C_{n+1}(q,d))^2 n^{3-\varepsilon} = +\infty.$$

Так как $u \in \operatorname{Lip} 1$, значит $q \in C_L$. □

Аналогичные результаты опубликованы в [7] – [12].

Abstract. The paper deals with the convergence of the special series of moduli of difference of general Fourier coefficients of functions from some differentiable class, with respect to general orthonormal systems (ONS). It has been shown that the functions with derivatives from the class Lip 1 on $[0, 1]$ have convergent series of that kind with respect to Haar or trigonometric systems (see [1, Ch. 2]). We have proven that with respect to general ONS this series, in general, is not convergent. For this reason, it becomes necessary to find a condition that must be imposed on the functions of ONS so that this special series converges for functions with derivatives from the class Lip 1. We have also shown that the obtained results are the best possible.

Список литературы

[1] B. S. Kashin, A. A. Saakyan, Orthogonal Series, Translated from the Russian by Ralph P. Boas. Translation edited by Ben Silver, Translations of Mathematical Monographs, **75**, American Mathematical Society, Providence, RI (1989).

[2] V. Sh. Tsagareishvili, "On the Fourier coefficients of functions with respect to general orthonormal systems" [in Russian], translated from Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **81**, no. 1, 183 – 202 (2017); Izv. Math. **81**, no. 1, 179 – 198 (2017).

[3] V. Tsagareishvili, "Fourier-Haar coefficients of continuous functions", Acta Math. Hungar. **132**, no. 1 - 2, 1 –14 (2011).

[4] A. Zygmund, Trigonometric Series, 2nd ed., **I, II**, Cambridge University Press, New York (1959).

[5] A. M. Olevskiĭ, "Orthogonal series in terms of complete systems" [in Russian], Mat. Sb. (N.S.) **58**(100), 707 – 748 (1962).

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Inequalities. Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge (1934); Russian translation: Gosudarstv. Izdat. Inostran. Lit., Moscow (1948).

[7] V. Tsagareishvili, "The variation of general Fourier coefficients", Funct. Approx. Comment. Math. **69**, no. 1, 27 – 42 (2023).

[8] V. Tsagareishvili, "The variation of general Fourier coefficients of Lipschitz class functions", Acta Math. Hungar., **166**, no. 1, 142 – 161 (2022).

[9] V. Tsagareishvili, "Smooth functions and general Fourier coefficients", translated from Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **57**, no. 2, 70 –80 (2022), J. Contemp. Math. Anal. **57**, no. 2, 102 – 111 (2022).

[10] V. Tsagareishvili, "Differentiable functions and their Fourier coefficients", Georgian Math. J. **29**, no. 3, 471 – 480 (2022).

[11] V. Tsagareishvili, "Lipschitz class functions and their general Fourier coefficients", Math. Slovaca **72**, no. 3, 709 – 718 (2022).

[12] V. Tsagareishvili, "Some properties of general Fourier coefficients of Lipschitz functions", Anal. Math. **47**, no. 1, 229 – 241 (2021).

[13] V. Sh. Tsagareishvili, "Absolute convergence of Fourier series of functions of the class Lip 1 and of functions of bounded variation" [in Russian], translated from Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **76**, no. 2, 215 – 224 (2012), Izv. Math. **76**, no. 2, 419 – 429 (2012).

[14] L. D. Gogoladze and V. Sh. Tsagareishvili, "Unconditional convergence of Fourier series of functions of bounded variation" [in Russian], translated from Sibirsk. Mat. Zh. **59**, no. 1, 86 – 94 (2018), Sib. Math. J. **59**, no. 1, 65 – 72 (2018).

[15] V. Sh. Tsagareishvili, G. Tutberidze, "Multipliers of absolute convergence" [in Russian], translated from Mat. Zametki **105**, no. 3, 433 – 443 (2019), Math. Notes **105**, no. 3-4, 439 – 448 (2019).

[16] L. D. Gogoladze and G. Cagareishvili, "General Fourier coefficients and convergence almost everywhere" [in Russian], translated from Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **85**, no. 2, 60 – 72 (2021), Izv. Math. **85**, no. 2, 228 – 240 (2021).

[17] L. Gogoladze, V. Tsagareishvili, “Unconditional convergence of general Fourier series”, [in Russian], translated from Tr. Mat. Inst. Steklova **319**, Teoriya Priblizheniĭ, Funktsional’nye Ănaliz i Prilozheniya, 83 – 93 (2022), Proc. Steklov Inst. Math. **319**, no. 1, 74 – 84 (2022).

[18] V. Tsagareishvili, “Problems of unconditional convergence”, Anal. Math. **48**, no. 4, 1213 – 1229 (2022).

[19] V. Tsagareishvili and G. Tutberidze, “Some problems of convergence of general Fourier series”, translated from Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **57**, no. 6, 70 – 80 (2022), J. Contemp. Math. Anal. **57**, no. 6, 369 – 379 (2022).

Поступила 18 сентября 2024

После доработки 26 ноября 2024

Принята к публикации 03 декабря 2024

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 60, номер 4, 2025

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 60, No. 4, 2025

Contents