

СВОЙСТВА ОБЩИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

В. ЦАГАРЕИШВИЛИ, А. КАШИБАДЗЕ

Тбилиский государственный университет им. И. Джавахиашвили, Грузия

Кутаисский интернациональный университет, Грузия

E-mails: *cagare@ymail.com*; *Kashibadzeani1996@gmail.com*

Аннотация. В статье рассматривается сходимость специального ряда модулей разностей коэффициентов Фурье относительно общих ортонормированных систем (ОНС) функций из некоторого класса дифференцируемых функций. Показано, что функции с производными из класса $Lip\ 1$ на $[0, 1]$ имеют сходящиеся ряды такого вида относительно систем Хаара или тригонометрической (см. [1, Ch. 2]). Мы доказали, что относительно общих ОНС этот ряд, вообще говоря, не сходится. Поэтому возникает необходимость найти условие, которое должно быть наложено на функции ОНС, чтобы этот специальный ряд сходил для функций с производными из класса $Lip\ 1$. Мы также показали, что полученные результаты являются наилучшими из возможных.

MSC2020 numbers: 42C10.

Ключевые слова: класс функций Липшица; ортонормированная система; коэффициенты Фурье; линейный функционал.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть (φ_k) – произвольная ортонормированная система (ОНС) на $[0, 1]$, и $\varepsilon > 0$.

Определим коэффициенты Фурье функции $f \in L_2 = L_2(0, 1)$:

$$C_n(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть

$$(1.1) \quad A_n(a) = 2^{-n} \sum_{i=1}^{2^n-1} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(a, x) dx \right|,$$

где $(\varepsilon > 0)$

$$D_n(a, x) = D_n(a, \varepsilon, x) = \sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (\phi_k(x) - \phi_{k+1}(x))$$

и

$$\phi_k(x) = \int_0^x \varphi_k(t) dt.$$

Через $\text{Lip } 1$ мы обозначаем пространство функций f (на $[0, 1]$) с

$$\max_{|x-y| \leq h} |f(x) - f(y)| = O(h).$$

$\text{Lip } 1$ – банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\text{Lip } 1} = \|f\|_C + \sup_{x, y \in [0, 1], x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|},$$

где $C = C(0, 1)$ – пространство непрерывных на $[0, 1]$ функций, и $\|f\|_C$ норма f в C .

Через C_L обозначим класс функций f с $f' \in \text{Lip } 1$.

Лемма 1.1 (см. [2]). Пусть $f, R \in L_2$, тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) R(x) dx &= m \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{1}{m}\right) \right) dx \int_0^{\frac{i}{m}} R(x) dx \\ (1.2) \quad &+ m \int_{1-\frac{1}{m}}^1 f(x) dx \int_0^1 R(x) dx + m \sum_{i=1}^m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} (f(x) - f(u)) du R(x) dx. \end{aligned}$$

Пусть (X_n) – система Хаара на $[0, 1]$. Тогда, как известно, (см. [1, Гл. 2, стр. 69]), если $m = 2^n + k$, $k = 1, 2, \dots, 2^n$ то

$$X_m(x) = X_{2^n+k}(x) = 2^{\frac{n}{2}}, \quad \text{при } x \in \left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right);$$

$$X_m(x) = X_{2^n+k}(x) = -2^{\frac{n}{2}}, \quad \text{при } x \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right);$$

$$X_m(x) = X_{2^n+k}(x) = 0, \quad \text{при } x \notin \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right];$$

В точках разрыва функции Хаара равны полусумме односторонних пределов, а в концах интервала $[0, 1]$ – пределу изнутри.

2. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Теорема 2.1. Пусть (X_n) – система Хаара. Для любых $f \in C_L$ и $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(f) - C_{k+1}(f))^2 k^{3-\varepsilon} < +\infty,$$

где $C_k(f) = \int_0^1 f(x) X_k(x) dx$.

Доказательство. Известно, что (см. [3]) для $1 \leq k < 2^n - 1$

$$\begin{aligned} C_{2^n+k}(f) - C_{2^n+k+1}(f) \\ = 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \left(f\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - 2f(x) + f\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \right) dx. \end{aligned}$$

Допустим $f \in C_L$. По теореме Лагранжа,

$$\begin{aligned} f\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - f(x) &= -\frac{1}{2^{n+1}} f'(y_{k,n}) \quad \text{и} \\ f\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - f(x) &= \frac{1}{2^{n+1}} f'(y_{k+1,n}), \end{aligned}$$

где

$$y_{k,n}, y_{k+1,n} \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right).$$

Так как $f' \in \text{Lip } 1$, для $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$,

$$|f'(y_{k+1,n}) - f'(y_{k,n})| = O(2^{-n}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \left(f\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - 2f(x) + f\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \right) dx \right| \\ \leq 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \left(\left| f\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - f(x) - \left(f(x) - f\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \right) \right| dx \right) \\ \leq 2^{\frac{n}{2}} 2^{-n-1} \frac{1}{2^n} |f'(y_{k+1,n}) - f'(y_{k,n})| = O(1) 2^{-\frac{3n}{2}} 2^{-n} = O(2^{-\frac{5n}{2}}). \end{aligned}$$

Следовательно, получаем

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} (C_{2^n+k}(f) - C_{2^n+k+1}(f))^2 (2^n + k)^{3-\varepsilon} = O(1) 2^n 2^{-5n} 2^{3n-\varepsilon n} = O(2^{-n-\varepsilon n}).$$

Далее, как известно, если $f' \in \text{Lip } 1$, то $C_{2^n+k}(f) = O(2^{-\frac{3}{2}n})$ и,

$$\begin{aligned} |C_{2^n}(f) - C_{2^{n+1}}(f)| &\leq \left| 2^{\frac{n-1}{2}} \int_{1-\frac{2}{2^n}}^{1-\frac{1}{2^n}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{1}{2^n}\right) \right) dx - \right. \\ &\quad \left. - 2^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \right) dx \right| = O(1) 2^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} = O(1) 2^{-\frac{3n}{2}}. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} (C_m(f) - C_{m+1}(f))^2 m^{3-\varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} (C_k(f) - C_{k+1}(f))^2 k^{3-\varepsilon} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (C_{2^n}(f) - C_{2^{n+1}}(f))^2 2^{n(3-\varepsilon)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} (C_{2^n+k}(f) - C_{2^n+k+1}(f))^2 (2^n+k)^{3-\varepsilon} \\ &= O(1) \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-n\varepsilon} + 2^{-n\varepsilon}) < +\infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.1. Рассмотрим случай $g(x) = x$. Так как

$$\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - 2x + \left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0,$$

значит $(1 \leq k < 2^n - 1)$

$$\begin{aligned} C_{2^n+k}(g) - C_{2^n+k+1}(g) \\ = 2^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \left(g\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - 2g(x) + g\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} C_{2^n}(g) &= C_{2^{n-1}+2^{n-1}}(g) = 2^{\frac{n-1}{2}} \int_{1-\frac{2}{2^n}}^{1-\frac{1}{2^n}} \left(x - \left(x + \frac{1}{2^n}\right) \right) dx \\ &= -2^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{\sqrt{2}} 2^{\frac{-3n}{2}} \end{aligned}$$

и

$$C_{2^{n+1}}(g) = 2^{\frac{n}{2}} \int_0^{1-\frac{1}{2^{n+1}}} \left(x - \left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \right) dx = -2^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = -\frac{1}{4} 2^{\frac{-3n}{2}}.$$

Очевидно, что

$$|C_{2^n}(f) - C_{2^{n+1}}(f)| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right) 2^{\frac{-3n}{2}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_{2^n}(f) - C_{2^{n+1}}(f))^2 2^{3n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n} 2^{3n} = +\infty.$$

Теперь очевидно, что условие $\varepsilon > 0$ существенно в теореме 2.1.

Для тригонометрической системы справедливо следующее утверждение (см. [1, Гл. 2, стр. 117] или [4]).

Теорема 2.2. Пусть $(\sqrt{2} \cos 2\pi n)$ – ОНС на $[0, 1]$. Тогда для любых $f \in C_L$ и $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(f))^2 k^{3-\varepsilon} < +\infty,$$

где $C_k(f) = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \cos 2\pi kx \, dx$.

Действительно, интегрируя по частям, легко доказать, что $C_k(f) = \frac{1}{2\pi k} C_k(f')$, где $f' \in \text{Lip } 1$ и $C_k(f') = O(\frac{1}{k})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k(f))^2 k^{3-\varepsilon} &= O(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (C_k(f'))^2 k^{3-\varepsilon} \\ &= O(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} k^{3-\varepsilon} = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\varepsilon} < +\infty. \end{aligned}$$

Замечание 2.2. Из теоремы 2.2 следует, что для тригонометрической системы

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(f) - C_{k+1}(f))^2 k^{3-\varepsilon} < +\infty$$

для $f \in C_L$ и $\varepsilon > 0$.

Замечание 2.3. Если (X_k) – система Хаара то для $u(x) = x$ и $\varepsilon \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(u))^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty$$

где $C_k(u) = \int_0^1 u(x) X_k(x) \, dx$.

Для $k = 2^m + s$, $s = 1, \dots, 2^m$ имеем:

$$C_k(u) = 2^{\frac{m}{2}} \int_{\frac{2s-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2s-1}{2^{m+1}}} \left(u(x) - u\left(x + \frac{1}{2^{m+1}}\right) \right) dx = -2^{\frac{m}{2}} 2^{-(2m+2)} = -\frac{1}{4} 2^{-\frac{3m}{2}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{s=2^m+1}^{2^{m+1}} (C_s(u))^2 s^{3-\varepsilon} \geq 2^{m(3-\varepsilon)} \cdot 2^m \frac{1}{16} 2^{-3m} > \frac{1}{16} 2^{m(1-\varepsilon)}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(u))^2 k^{3-\varepsilon} \geq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=2^m+1}^{2^{m+1}} (C_s(u))^2 s^{3-\varepsilon} > \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(1-\varepsilon)} = +\infty.$$

Пусть (φ_k) – произвольная ОНС на $[0, 1]$. Возникает вопрос: сходится ли ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(f) - C_{k+1}(f))^2 k^{3-\varepsilon}$$

для любых $\varepsilon \in (0, 3)$ и $f \in C_L$, где

$$C_k(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx?$$

Из теоремы Олевского [5] имеем:

Теорема 2.3. Если $(a_k) \in \ell_2$ – произвольная последовательность действительных чисел, и $h(x) = 1$ на $[0, 1]$, тогда существует полная ОНС (φ_k) такая, что

$$C_k(h) = \int_0^1 h(x) \varphi_k(x) dx = b \cdot a_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где b не зависит от k .

Определим последовательность (a_k) следующим образом: $a_{2k} = \frac{1}{\log(2k+1)\sqrt{2k}}$ и $a_{2k-1} = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(2k+1)\sqrt{2k}} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k \log^2(2k+1)} < +\infty.$$

По теореме 2.3,

$$C_{2k}(h) = \frac{b}{\log(2k+1)\sqrt{2k}} \quad \text{and} \quad C_{2k-1}(h) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, для $\varepsilon \in [0, 3)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(h) - C_{k+1}(h))^2 k^{3-\varepsilon} = b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k \log^2(2k+1)} (2k)^{3-\varepsilon} = +\infty.$$

Поэтому, для функции $f(x) = 1$ ($x \in [0, 1]$) и $\varepsilon \in [0, 3)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(f) - C_{k+1}(f))^2 k^{3-\varepsilon}$$

не сходится для всех ОНС (φ_k) .

Следовательно, чтобы для любой функции ряд $f \in C_L$ ($\varepsilon > 0$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(f) - C_{k+1}(f))^2 k^{3-\varepsilon}$$

сходился для ОНС (φ_k) , нам нужно наложить дополнительные условия на функции φ_k .

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 3.1. Пусть (φ_k) – ОНС на $[0, 1]$, $\int_0^1 \varphi_k(x) dx = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) и $r(x) = x$ на $[0, 1]$. Если $lkz(a_k) \in \ell_2$ и для любого $\varepsilon \in (0, 3)$,

$$(3.1) \quad \limsup_n \left| \int_0^1 D_n(a, x) dx \right| = +\infty,$$

тогда для любого $\varepsilon \in (0, 3)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(r) - C_{k+1}(r))^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty.$$

Доказательство. Мы начнем с интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} C_k(r) - C_{k+1}(r) &= \int_0^1 x (\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)) dx \\ &= \int_0^1 x d \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx = \int_0^1 (\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)) dx \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx = - \int_0^1 \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx. \end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(r) - C_{k+1}(r)) \right| \\ &= \left| \int_0^1 r(x) \sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)) dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx \right| = \left| \int_0^1 D_n(a, x) dx \right|. \end{aligned}$$

Согласно (3.1),

$$\lim_n \left| \sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(r) - C_{k+1}(r)) \right| = +\infty.$$

Следовательно, для $(a_k) \in \ell_2$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(r) - C_{k+1}(r))$$

расходится.

Значит (см. [6]) $((C_k(r) - C_{k+1}(r)) k^{\frac{3-\varepsilon}{2}}) \notin \ell_2$ и для любого $\varepsilon \in (0, 3)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(r) - C_{k+1}(r))^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty. \quad \square$$

Теорема 3.1. Пусть (φ_k) – ОНС на $[0, 1]$, $\int_0^1 \varphi_k(x) dx = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) и пусть (a_k) – некоторая последовательность чисел. Если для некоторого $(a_k) \in \ell_2$, для любого $\varepsilon > 0$,

$$(3.2) \quad A_n(a) = O(1),$$

Тогда для любой $f \in C_L$ и любого $\varepsilon > 0$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(f) - C_{k+1}(f))^2 k^{3-\varepsilon}$$

сходится.

Доказательство. В (1.2), подставим $m = 2^n$, $f' = f$ и $D_n(a, x) = R(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & \int_0^1 f'(x) D_n(a, x) dx \\
 &= 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(f'(x) - f' \left(x + \frac{1}{2^n} \right) \right) dx \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(a, x) dx \\
 &\quad + 2^n \int_{1-\frac{1}{2^n}}^1 f'(x) dx \int_0^1 D_n(a, x) dx \\
 &\quad + 2^n \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} (f'(x) - f'(u)) du D_n(a, x) dx = M_1 + M_2 + M_3.
 \end{aligned}$$

Оценим величины M_1 , M_2 и M_3 .

а) При $f \in C_L$ или $f' \in \text{Lip } 1$, в силу (1.1) и (3.2) имеем: $(\Delta_{in} = [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}])$, $i = 1, \dots, 2^n$)

$$\begin{aligned}
 |M_1| &\leq 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \left| \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(f'(x) - f' \left(x + \frac{1}{2^n} \right) \right) dx \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(a, x) dx \right| \\
 &\leq 2^n \frac{1}{2^n} O \left(\frac{1}{2^n} \right) \sum_{i=1}^{2^n-1} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(a, x) dx \right| = O(1) A_n(a) = O(1).
 \end{aligned}$$

б) Не умаляя общности можем считать, что (см. лемму 3.1)

$$\left| \int_0^1 D_n(a, x) dx \right| = O(1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 |M_2| &\leq 2^n \int_{1-\frac{1}{2^n}}^1 |f'(x)| dx \left| \int_0^1 D_n(a, x) dx \right| \\
 &\leq 2^n \frac{1}{2^n} \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| O(1) = O(1).
 \end{aligned}$$

с) Согласно неравенству Бесселя,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^x \varphi_k(t) dt \right)^2 \leq 1,$$

Применив неравенство Гельдера и условия $f' \in \text{Lip } 1$ и $(a_k) \in l_2$, будем иметь

$$\begin{aligned}
 |M_3| &= \left| 2^n \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} (f'(x) - f'(u)) du D_n(a, x) dx \right| \\
 &\leq 2^n \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n-1} O(2^{-n}) \max_{1 \leq i \leq 2^n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} |D_n(a, x)| dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \frac{1}{\sqrt{2^n}} \max_{1 \leq i \leq 2^n} \left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} (D_n(a, x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= O(1) \frac{1}{\sqrt{2^n}} \max_{1 \leq i \leq 2^n} \left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(\sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= O(1) \frac{1}{\sqrt{2^n}} \max_{1 \leq i \leq 2^n} \left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 k^{3-\varepsilon} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \sum_{k=1}^n \left(\int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= O(1) \frac{1}{\sqrt{2^n}} n^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O(1).
\end{aligned}$$

Из а), б), с) и (3.3) получим:

$$(3.4) \quad \left| \int_0^1 f'(x) D_n(a, x) dx \right| = O(1).$$

Интегрируя по частям, $(\int_0^1 \varphi_k(x) dx = 0, k = 1, 2, \dots)$, получим

$$\begin{aligned}
(3.5) \quad &\int_0^1 f(x) (\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)) dx = \int_0^1 f(x) d \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx \\
&= f(1) \int_0^1 (\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)) dx - \int_0^1 f'(x) \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx \\
&= - \int_0^1 f'(x) \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(f) - C_{k+1}(f)) \right| \\
&= \left| \int_0^1 f(x) \sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)) dx \right| \\
&= \left| \int_0^1 f'(x) \sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx \right| \\
&= \left| \int_0^1 f'(x) D_n(a, x) dx \right|.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.4),

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(f) - C_{k+1}(f)) \right| = O(1).$$

Далее, пусть

$$d_k = |a_k| \operatorname{sign}(C_k(f) - C_{k+1}(f)),$$

тогда для $(a_k) \in \ell_2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k (C_k(f) - C_{k+1}(f)) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k (C_k(f) - C_{k+1}(f))| < \infty.$$

Соответственно, для любой $(a_n) \in \ell_2$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(f) - C_{k+1}(f))$$

сходится. Значит, (см. [6, Ch. 2, p. 40]) $(k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(f) - C_{k+1}(f))) \in l_2$, т. е.,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(f) - C_{k+1}(f))^2 k^{3-\varepsilon} < +\infty$$

для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in C_L$. □

Теорема 3.2. Пусть (φ_k) – ОНС на $[0, 1]$, $\int_0^1 \varphi_k(x) dx = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) и (b_k) – некоторая последовательность чисел.

Если для любого $\varepsilon \in (0, 3)$,

$$(3.6) \quad \limsup_n A_n(b) = +\infty,$$

тогда существует функция $g \in C_L$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0, 3)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(g) - C_{k+1}(g))^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty.$$

Доказательство. Допустим, что для всех $\varepsilon \in (0, 3)$,

$$\limsup_n \left| \int_0^1 D_n(b, x) dx \right| = +\infty.$$

Тогда, в силу леммы 3.1, для любого $\varepsilon \in (0, 3)$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(r) - C_{k+1}(r))^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty,$$

где $r(x) = x$ на $[0, 1]$.

Так как $r \in C_L$, теорема 3.2 имеет место. Теперь допустим

$$(3.7) \quad \left| \int_0^1 D_n(b, x) dx \right| = O(1).$$

Определим последовательность функций (g_n) из банахова пространства $\operatorname{Lip} 1$:

$$g_n(x) = \int_0^x \left(\operatorname{sign} \int_0^t D_n(b, u) du \right) dt.$$

Положив в (1.2) $f = g_n$ и $a = b$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad & \int_0^1 g_n(x) D_n(b, x) dx \\
 &= 2^n \sum_{i=1}^{2^n-1} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(g_n(x) - g_n\left(x + \frac{1}{2^n}\right) \right) dx \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \\
 &\quad + 2^n \int_{1-\frac{1}{2^n}}^1 g_n(x) dx \int_0^1 D_n(b, x) dx \\
 &\quad + 2^n \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} (g_n(x) - g_n(u)) du D_n(b, x) dx = Q_1 + Q_2 + Q_3.
 \end{aligned}$$

Оценим Q_1 , Q_2 и Q_3 :

d) По определению функций g_n имеем:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(g_n(x) - g_n\left(x + \frac{1}{2^n}\right) \right) dx \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \\
 &= - \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \int_x^{x+2^{-n}} \left(\text{sign} \int_0^t D_n(b, u) du \right) dt.
 \end{aligned}$$

Допустим, что для некоторой $t_{i,n} \in (\frac{i-1}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$,

$$(3.9) \quad \text{sign} \int_0^{\frac{i-1}{2^n}} D_n(b, u) du \neq \text{sign} \int_0^{t_{i,n}} D_n(b, u) du.$$

Тогда существует точка $y_{i,n} \in (\frac{i-1}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$ такая, что $\int_0^{y_{i,n}} D_n(b, u) du = 0$. Значит, ($i = 1, \dots, 2^n - 1$)

$$\int_0^{\frac{i+1}{2^n}} D_n(b, u) du = \int_0^{y_{i,n}} D_n(b, u) du + \int_{y_{i,n}}^{\frac{i+1}{2^n}} D_n(b, u) du = \int_{y_{i,n}}^{\frac{i+1}{2^n}} D_n(b, u) du.$$

Пусть M_n – множество тех $i = 1, \dots, 2^n - 1$, для которых имеет место (3.9).

Тогда, если $\Delta\phi_k = \phi_k(x) - \phi_{k+1}(x)$, используя неравенство $\sum_{k=1}^n \phi_k^2(x) \leq 1$, мы получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in M_n} \left| \int_0^{\frac{i+1}{2^n}} D_n(b, u) du \right| &\leq \sum_{i=1}^{2^n-1} \left| \int_{y_{i,n}}^{\frac{i+1}{2^n}} D_n(b, u) du \right| \leq \int_0^1 |D_n(b, u)| du \\
 &\leq \left(\int_0^1 D_n^2(b, u) du \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n a_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \Delta\phi_k(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq n^{\frac{3}{2}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \int_0^1 \sum_{k=1}^n \Delta\phi_k^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = O(n^{\frac{3}{2}}).
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad & 2^n \left| \sum_{i \in M_n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(g_n(x) - g_n \left(x + \frac{1}{2^n} \right) \right) dx \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right| \\
 & = 2^n O(2^{-n}) 2^{-n} \sum_{i \in M_n} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right| = O(1) 2^{-n} n^{\frac{3}{2}} = O(1).
 \end{aligned}$$

С другой стороны, если $i \in V_n = \{1, 2, \dots, 2^n - 1\} \setminus M_n$, то

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(g_n(x) - g_n \left(x + \frac{1}{2^n} \right) \right) dx \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right| \\
 & = \left| 2^{-n} 2^{-n} \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right|.
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad & 2^n \left| \sum_{i \in V_n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(g_n(x) - g_n \left(x + \frac{1}{2^n} \right) \right) dx \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right| \\
 & = 2^n 2^{-n} 2^{-n} \sum_{i \in V_n} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right| = 2^{-n} \sum_{i \in V_n} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right|.
 \end{aligned}$$

Тогда, из (3.10) и (3.11) следует, что

$$\begin{aligned}
 |Q_1| &= 2^n \left| \sum_{i=1}^{2^n-1} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(g_n(x) - g_n \left(x + \frac{1}{2^n} \right) \right) dx \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right| \\
 &\geq 2^{-n} \sum_{i \in V_n} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right| - 2^{-n} \sum_{i \in M_n} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right| \\
 &= 2^{-n} \sum_{i=1}^{2^n-1} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right| - 2 \cdot 2^{-n} \sum_{i \in M_n} \left| \int_0^{\frac{i}{2^n}} D_n(b, x) dx \right| \geq A_n(b) - O(1).
 \end{aligned}$$

е) Используя (3.7) и определение g_n ,

$$|Q_2| \leq 2^n \left| \int_{1-\frac{1}{2^n}}^1 g_n(x) dx \right| \left| \int_0^1 D_n(b, x) dx \right| = O(1).$$

ф) Далее, в силу определения функций g_n , и неравенств Бесселя, $(\sum_{k=1}^{\infty} (\int_0^x \varphi_k(t) dt)^2 \leq 1)$ и Гельдера, получим:

$$\begin{aligned}
 |Q_3| &\leq 2^n \frac{1}{2^n} \max_{1 \leq i \leq 2^n} \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} |D_n(b, x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}} \max_{1 \leq i \leq 2^n} \left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} (D_n(b, x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= O(1) \frac{1}{\sqrt{2^n}} \max_{1 \leq i \leq 2^n} \left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(\sum_{k=1}^n b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$= O(1) \frac{1}{\sqrt{2^n}} \max_{1 \leq i \leq 2^n} \left(\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 k^{3-\varepsilon} \right) \right. \\ \left. \times \left(\sum_{k=1}^n \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = O(1) \frac{1}{\sqrt{2^n}} n^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O(1).$$

Наконец, из d) (см. Q_1), e), f) и (3.8), имеем:

$$\left| \int_0^1 g_n(x) D_n(b, x) dx \right| \geq A_n(b) - O(1) - O(1).$$

Согласно (3.6), для любого $\varepsilon \in (0, 3)$,

$$(3.12) \quad \lim_n \left| \int_0^1 g_n(x) D_n(b, x) dx \right| = +\infty.$$

Очевидно, что

$$\|g_n\|_A = \|g_n\|_C + \sup_{x, y \in [0, 1], x \neq y} \frac{|g_n(x) - g_n(y)|}{|x - y|} \leq 2.$$

Так как интегралы $\int_0^1 g(x) D_n(b, x) dx$ образуют последовательность в банаховом пространстве $\text{Lip } 1$, по теореме Банаха-Штейнгауза, существует функция $g \in \text{Lip } 1$ такая, что (см. (3.12)) для любого $\varepsilon \in (0, 3)$,

$$(3.13) \quad \lim_n \left| \int_0^1 g(x) D_n(b, x) dx \right| = +\infty.$$

Обозначим

$$S(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

Подставив в (3.5) $f(x) = s(x)$ и $s'(x) = g(x)$, получим:

$$\int_0^1 s(x) (\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)) dx = - \int_0^1 s'(x) \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx \\ = - \int_0^1 g(x) \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(s) - C_{k+1}(s)) \right| \\ = \left| \int_0^1 s(x) \sum_{k=1}^n b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)) dx \right| \\ = \left| \int_0^1 g(x) \sum_{k=1}^n b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \int_0^x (\varphi_k(t) - \varphi_{k+1}(t)) dt dx \right| = \left| \int_0^1 g(x) D_n(a, x) dx \right|.$$

Поэтому (см. (3.13)), для любого $\varepsilon \in (0, 3)$,

$$\lim_n \left| \sum_{k=1}^n b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(s) - C_{k+1}(s)) \right| = +\infty.$$

Значит, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(s) - C_{k+1}(s))$$

расходится для некоторого $(b_k) \in \ell_2$, что означает, что (см. [6, Гл. 2, стр. 40])

$(k^{\frac{3-\varepsilon}{2}} (C_k(s) - C_{k+1}(s))) \notin \ell_2$ для любого $\varepsilon \in (0, 3)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_k(s) - C_{k+1}(s))^2 k^{3-\varepsilon} = +\infty. \quad \square$$

Теорема 3.3. *Существуют функция $q \in C_L$ и ОНС (d_n) такие, что*

- 1) $\int_0^1 d_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots;$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (C_k(q, d) - C_{k+1}(q, d))^2 n^{3-\varepsilon} = +\infty$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$, и

$$C_k(q, d) = \int_0^1 q(x) d_n(x) dx.$$

Доказательство. Пусть $u(x) = 0$, где $x = 0, \frac{1}{4}$ и $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $u(x) = 1$ при $x = \frac{1}{8}$, и $u(x) = -1$ при $x = \frac{3}{8}$. Кроме того, $u(x)$ линейна и непрерывна на $[0, \frac{1}{8}]$, $[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ и $[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$. Далее пусть

$$f(x) = \int_0^x u(t) dt.$$

Очевидно, что $f \in C_L$. Допустим, что $(n > 1) a_n = \frac{1}{\log n \sqrt{n}}$ – последовательность чисел. Тогда, в силу теоремы А. Олевского[5], существует ОНС (φ_n) такая, что

$$C_n(f, \varphi) = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx = b a_n,$$

где b – некоторое действительное число. Тогда,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{1}{\log n \sqrt{n}} - \frac{1}{\log(n+1) \sqrt{n+1}} \\ &\geq \frac{1}{\log(n+1) \sqrt{n}} - \frac{1}{\log(n+1) \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\log(n+1) \sqrt{n} \sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{2 \log(n+1) \sqrt{n} (n+1)}, \end{aligned}$$

значит, $(\varepsilon \in (0, 1))$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})^2 n^{3-\varepsilon} \geq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^2(n+1) n (n+1)^2} n^{3-\varepsilon}$$

$$\geq \frac{1}{16} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2 \log^2(n+1)} n^{-\varepsilon} = +\infty.$$

Таким образом, $(\varepsilon \in (0, 1))$

$$(3.14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (C_n(f, \varphi) - C_{n+1}(f, \varphi))^2 n^{3-\varepsilon} = +\infty.$$

Определим систему (d_n) следующим образом:

$$d_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(2x), & \text{где } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ -\varphi_n(2(x - \frac{1}{2})), & \text{где } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Пусть $q(x) = f(2x)$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, и $q(x) = 0$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} 1) \quad \int_0^1 d_n(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_n(2x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_n\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_n(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \int_0^1 d_n^2(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_n^2(2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_n^2\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_n^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_n^2(x) dx = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \int_0^1 d_n(x) d_m(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_n(2x) \varphi_m(2x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi_n\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \varphi_m\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Т.е. система (d_n) ортонормирована. Далее,

$$\begin{aligned} C_n(q, d) &= \int_0^1 q(x) d_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) \varphi_n(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx = \frac{1}{2} C_n(f, \varphi). \end{aligned}$$

Согласно (3.11), для любого $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n(q, d) - C_{n+1}(q, d))^2 n^{3-\varepsilon} = +\infty.$$

Так как $u \in \text{Lip } 1$, значит $q \in C_L$. □

Аналогичные результаты опубликованы в [7] – [12].

Abstract. The paper deals with the convergence of the special series of moduli of difference of general Fourier coefficients of functions from some differentiable class, with respect to general orthonormal systems (ONS). It has been shown that the functions with derivatives from the class Lip 1 on $[0, 1]$ have convergent series of that kind with respect to Haar or trigonometric systems (see [1, Ch. 2]). We have proven that with respect to general ONS this series, in general, is not convergent. For this reason, it becomes necessary to find a condition that must be imposed on the functions of ONS so that this special series converges for functions with derivatives from the class Lip 1. We have also shown that the obtained results are the best possible.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal Series*, Translated from the Russian by Ralph P. Boas. Translation edited by Ben Silver, *Translations of Mathematical Monographs*, **75**, American Mathematical Society, Providence, RI (1989).
- [2] V. Sh. Tsagareishvili, "On the Fourier coefficients of functions with respect to general orthonormal systems" [in Russian], translated from *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **81**, no. 1, 183 – 202 (2017); *Izv. Math.* **81**, no. 1, 179 – 198 (2017).
- [3] V. Tsagareishvili, "Fourier-Haar coefficients of continuous functions", *Acta Math. Hungar.* **132**, no. 1 - 2, 1 – 14 (2011).
- [4] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2nd ed., **I, II**, Cambridge University Press, New York (1959).
- [5] A. M. Olevskii, "Orthogonal series in terms of complete systems" [in Russian], *Mat. Sb. (N.S.)* **58**(100), 707 – 748 (1962).
- [6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge (1934); Russian translation: Gosudarstv. Izdat. Inostran. Lit., Moscow (1948).
- [7] V. Tsagareishvili, "The variation of general Fourier coefficients", *Funct. Approx. Comment. Math.* **69**, no. 1, 27 – 42 (2023).
- [8] V. Tsagareishvili, "The variation of general Fourier coefficients of Lipschitz class functions", *Acta Math. Hungar.*, **166**, no. 1, 142 – 161 (2022).
- [9] V. Tsagareishvili, "Smooth functions and general Fourier coefficients", translated from *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.* **57**, no. 2, 70 – 80 (2022), *J. Contemp. Math. Anal.* **57**, no. 2, 102 – 111 (2022).
- [10] V. Tsagareishvili, "Differentiable functions and their Fourier coefficients", *Georgian Math. J.* **29**, no. 3, 471 – 480 (2022).
- [11] V. Tsagareishvili, "Lipschitz class functions and their general Fourier coefficients", *Math. Slovaca* **72**, no. 3, 709 – 718 (2022).
- [12] V. Tsagareishvili, "Some properties of general Fourier coefficients of Lipschitz functions", *Anal. Math.* **47**, no. 1, 229 – 241 (2021).
- [13] V. Sh. Tsagareishvili, "Absolute convergence of Fourier series of functions of the class Lip 1 and of functions of bounded variation" [in Russian], translated from *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **76**, no. 2, 215 – 224 (2012), *Izv. Math.* **76**, no. 2, 419 – 429 (2012).
- [14] L. D. Gogoladze and V. Sh. Tsagareishvili, "Unconditional convergence of Fourier series of functions of bounded variation" [in Russian], translated from *Sibirsk. Mat. Zh.* **59**, no. 1, 86 – 94 (2018), *Sib. Math. J.* **59**, no. 1, 65 – 72 (2018).
- [15] V. Sh. Tsagareishvili, G. Tutberidze, "Multipliers of absolute convergence" [in Russian], translated from *Mat. Zametki* **105**, no. 3, 433 – 443 (2019), *Math. Notes* **105**, no. 3-4, 439 – 448 (2019).
- [16] L. D. Gogoladze and G. Tsagareishvili, "General Fourier coefficients and convergence almost everywhere" [in Russian], translated from *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **85**, no. 2, 60 – 72 (2021), *Izv. Math.* **85**, no. 2, 228 – 240 (2021).

- [17] L. Gogoladze, V. Tsagareishvili, “Unconditional convergence of general Fourier series”, [in Russian], translated from Tr. Mat. Inst. Steklova **319**, Teoriya Priblizheniĭ, Funktsional'nye Ānaliz i Prilozheniya, 83 – 93 (2022), Proc. Steklov Inst. Math. **319**, no. 1, 74 – 84 (2022).
- [18] V. Tsagareishvili, “Problems of unconditional convergence”, Anal. Math. **48**, no. 4, 1213 – 1229 (2022).
- [19] V. Tsagareishvili and G. Tutberidze, “Some problems of convergence of general Fourier series”, translated from Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **57**, no. 6, 70 – 80 (2022), J. Contemp. Math. Anal. **57**, no. 6, 369 – 379 (2022).

Поступила 18 сентября 2024

После доработки 26 ноября 2024

Принята к публикации 03 декабря 2024