Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 4, 2025, стр. 45 – 59.

ПОЛЕ ЭНЕРГИЙ ПЕРЕХОДА В МЕТОДЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. А. ХАЧАТРЯН, Б. С. НАХАПЕТЯН,

Институт математики, Национальная академия наук Республики Армения[1]
E-mails: *linda@instmath.sci.am; nahapet@instmath.sci.am*

Аннотация. В данной работе на основе понятия поля энергий перехода обобщается известный метод корреляционных уравнений построения гиббсовских мер. Используя свойства энергий перехода, получена система корреляционных уравнений для решетчатых систем с конечным пространством спинов. Показано, что при достаточно малом значении одноточечных энергий перехода соответствующая система корреляционных функций, рассматриваемая в банаховом пространстве ограниченных вещественных функций, имеет единственное решение. Показана также сходимость корреляционных функций в конечном объеме к предельной корреляционной функции.

MSC2020 numbers: 82B05; 82B20; 60G60.

Ключевые слова: поле энергий перехода; корреляционная функция; корреляционное уравнение; гиббсовская мера.

Введение

Метод корреляционных уравнений является одним из наиболее востребованных способов построения и исследования систем математической статистической физики в бесконечных объемах (см., например, [1] – [5]). В случае решеточных систем этот метод применялся, как правило, к вакуумным системам, состоящим из двух точек: спина и вакуума.

Естественно возникает задача распространения метода корреляционных уравнений на более общие системы. Эта задача рассматривалась в [6], где в качестве пространства спинов рассматривалось измеримое множество конечной меры, а мера вакуума принималась равной единице. Дальнейшее изучение таких систем проведено в работах [7, 8], где были получены их кластерные свойства, позволившие найти асимптотическое разложение логарифма статистической суммы по степеням объема, а также доказать локальную предельную теорему для числа частиц.

[1]Работа выполнена при поддержке Коммитета по науке и образования Республики Армения в рамках проекта 21AG-1A045.

Во всех упомянутых работах определение корреляционной функции основывалось на понятии потенциала взаимодействия. Сначала рассматривались потенциалы парного взаимодействия (см., например, [1, 2]), после чего полученные результаты были обобщены на случай многочастичных потенциалов (см. [3, 6, 7, 8]).

В статье [9] была предложена новая точка зрения на математические основы статистической физики систем, заданных в бесконечных объемах. Эта точка зрения базируется на введенном понятии поля энергии перехода. Приложения этого понятия в теории случайных полей получили дальнейшее развитие в работах [10, 11, 12]. В частности, было показано, что для решетчатых систем гиббсовская форма является универсальной для любых конечномерных распределений вероятностей.

Существуют различные методы построения полей энергий перехода (см. [9] и [12]), в том числе и на основе предложенного в [9] аксиоматического определения гамильтониана, не предполагающего его представление в виде суммы потенциалов взаимодействия. Этот факт позволяет обобщить известные результаты математической статистической физики.

В настоящей работе рассматриваются системы с конечным пространством спинов. На основе результатов работ [9] - [12] выписывается система корреляционных уравнений с использованием понятия поля энергий перехода. Показано, что при достаточно малом значении одноточечных энергий перехода соответствующая система корреляционных функций, рассматриваемая в банаховом пространстве ограниченных вещественных функций, имеет единственное решение. Наконец, доказана сходимость корреляционных функций в конечных объемах к предельной корреляционной функции. Для частного случая конечного радиуса взаимодействия эти вопросы рассматривались в [13].

Отметим также, что наш подход может быть применен к системам с пространством спинов, рассматриваемым в [6].

1. Обозначения

Пусть $\mathbb{Z}^d$ — d-мерная целочисленная решетка, т.е. совокупность d-мерных векторов с целыми компонентами, $d \geq 1$. Отметим, что все рассуждения настоящей статьи остаются справедливыми, если вместо $\mathbb{Z}^d$ рассмотреть произвольное счетное множество.

Обозначим через $W(S) = \{\Lambda \subset S, 0 < |\Lambda| < \infty\}$ совокупность всех непустых конечных подмножеств $S \subset \mathbb{Z}^d$, где $|\Lambda|$ есть количество точек в Λ. В случае $S = \mathbb{Z}^d$ будет использоваться более простое обозначение W. Множество S^c есть дополнение к множеству S. При обозначении одноточечных подмножеств решетки $\{t\}$, $t \in \Lambda$, фигурные скобки будут опускаться.

Для $t = (t^{(1)}, t^{(2)}, ...t^{(d)}), s = (s^{(1)}, s^{(2)}, ...s^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d$ обозначим $|t-s| = \max\limits_{1\leq j\leq d} |t^{(j)} - s^{(j)}|$ и положим $d(T,S) = \inf\limits_{t\in T, s\in S} |t-s|$, $T, S \subset \mathbb{Z}^d$.

Пусть каждой точке $t \in \mathbb{Z}^d$ отвечает множество X^t, являющееся копией некоторого конечного множества X, $1 < |X| < \infty$. Через X^S обозначим множество всех конфигураций на S, $S \subset \mathbb{Z}^d$, т.е. множество $X^S = \{x = (x_t, t \in S), x_t \in X\}$, всех функций, определенных на S и принимающих значения в X. При $S = \emptyset$ мы полагаем $X^{\emptyset} = \{\boldsymbol{\emptyset}\}$, где $\boldsymbol{\emptyset}$ есть пустая конфигурация. Для непересекающихся множеств $S, T \subset \mathbb{Z}^d$ и произвольных $x \in X^S$, $y \in X^T$, обозначим через xy конкатенацию x и y, т.е. конфигурацию на $S \cup T$, равную x на S и y на T. При $T \subset S$, через x_T обозначим сужение конфигурации $x \in X^S$ на T, т.е. $x_T = (x_t, t \in T)$.

Пусть θ_t — некоторый выделенный фиксированный элемент X^t (вакуум) и $\theta = (\theta_t, t \in \mathbb{Z}^d)$. Обозначим $X^t_* = X^t \backslash \{\theta_t\}$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Для каждого $S \subset \mathbb{Z}^d$, обозначим через X^S_* множество конфигураций на S, не содержащих вакуум, и пусть $L^S_* = \bigcup\limits_{J\in W(S)} X^J_*$ есть пространство всех конфигураций без вакуума с носителем, являющимся подмножеством S. При $S = \mathbb{Z}^d$, обозначим $L_* = L^{\mathbb{Z}^d}_*$. Отметим, что любая конфигурация из X^S может быть записана в виде $x\theta_{S\backslash I}$, где $x \in X^I_*$, $I \subset S$.

2. Поле энергий перехода

В работе [9] были введены понятия поля энергий перехода и поля одноточечных энергий перехода.

Совокупность $\Delta = \{\Delta^{\bar{x}}_{\Lambda}, \bar{x} \in X^{\Lambda^c}, \Lambda \in W\}$ вещественнозначных функций $\Delta^{\bar{x}}_{\Lambda}(x,u)$, $x, u \in X^{\Lambda}$, называется *полем энергий перехода*, если ее элементы удовлетворяют следующим условиям согласованности: для всех $\Lambda \in W$ и $\bar{x} \in X^{\Lambda^c}$ выполнено $\Delta^{\bar{x}}_{\Lambda}(x,u) = \Delta^{\bar{x}}_{\Lambda}(x,y) + \Delta^{\bar{x}}_{\Lambda}(y,u)$, $x,u,y \in X^{\Lambda}$; а для всех непересекающихся $\Lambda, V \in W$ и $\bar{x} \in X^{(\Lambda\cup V)^c}$ имеют место равенства $\Delta^{\bar{x}}_{\Lambda\cup V}(xy, uv) = \Delta^{\bar{x}y}_{\Lambda}(x,u) + \Delta^{\bar{x}u}_{V}(y,v)$, $x, u \in X^{\Lambda}, y, v \in X^V$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\Delta^{\bar{x}}_{\Lambda}(x,u) = -\Delta^{\bar{x}}_{\Lambda}(u,x), \qquad \Delta^{\bar{x}}_{\Lambda}(x,x) = 0, \qquad x, u \in X^{\Lambda},$$

$$\Delta_{\Lambda\cup V}^{\bar{x}}(xy, uy) = \Delta_{\Lambda}^{\bar{x}y}(x,u) \qquad x,u \in X^{\Lambda},\ y \in X^{V}.$$

Совокупность $\Delta_1 = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ вещественнозначных функций $\Delta_t^{\bar{x}}(x,u)$, $x,u \in X^t$, называется *полем одноточечных энергий перехода*, если ее элементы удовлетворяют следующим условиям согласованности: для всех $t \in \mathbb{Z}^d$ и $\bar{x} \in X^{t^c}$ имеют место равенства $\Delta_t^{\bar{x}}(x,u) = \Delta_t^{\bar{x}}(x,y) + \Delta_t^{\bar{x}}(y,u)$, $x,u,y \in X^t$, а для всех $t,s \in \mathbb{Z}^d$ и $\bar{x} \in X^{\{t,s\}^c}$ выполнено $\Delta_t^{\bar{x}y}(x,u) + \Delta_s^{\bar{x}u}(y,v) = \Delta_s^{\bar{x}x}(y,v) + \Delta_t^{\bar{x}v}(x,u)$, $x,u \in X^t$, $y,v \in X^s$.

Следующая теорема устанавливает связь между элементами Δ и Δ_1 (см. [9], а также [11]), согласно которой Δ_1 однозначно определяет Δ. Поэтому при получении результатов можно накладывать условия только на элементы Δ_1.

Теорема 2.1. *Совокупность* $\Delta = \{\Delta_{\Lambda}^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda^c}, \Lambda \in W\}$ *функций на* $X^{\Lambda} \times X^{\Lambda}$, $\Lambda \in W$, *является полем энергий перехода тогда и только тогда, когда ее элементы представимы в виде*

(2.1)

$$\Delta_{\Lambda}^{\bar{x}}(x,u) = \Delta_{t_1}^{\bar{x}x_{\{\Lambda\setminus t_1\}}}(x_{t_1},u_{t_1}) + \Delta_{t_2}^{\bar{x}u_{t_1}x_{\{\Lambda\setminus\{t_1,t_2\}\}}}(x_{t_2},u_{t_2}) + \ldots + \Delta_{t_n}^{\bar{x}u_{\{\Lambda\setminus t_n\}}}(x_{t_n},u_{t_n}),$$

где $x,u \in X^{\Lambda}$, $\Lambda = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ *есть некоторая нумерация точек в* Λ, $|\Lambda| = n$, *а* $\Delta_1 = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ *— поле одноточечных энергий перехода.*

Один из основных способов построения поля энергий перехода основан на использовании понятия потенциала. Совокупность $\Phi = \{\Phi, J \in W\}$ вещественнозначных функций называется потенциалом (или потенциалом взаимодействия), если для каждого $t \in \mathbb{Z}^d$ и $\bar{x} \in X^{t^c}$ существуют пределы

$$H_t^{\bar{x}}(x) = \lim_{\Lambda\uparrow t^c} \sum_{J\subset\Lambda\setminus t} \Phi\left(x_t\bar{x}_J\right), \qquad x_t \in X^t.$$

Здесь предел берется по любой возрастающей последовательности конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$, стремящейся к t^c. Семейство функций $H^{\Phi} = \{H_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ называется гамильтонианом, отвечающим потенциалу Φ.

Если потенциал Φ такой, что $\Phi_J(x) = 0$ при всех $x \in X^J$, где $|J| > 2$, $J \in W$, то он называется потенциалом парного взаимодействия.

Нетрудно видеть, что совокупность $\Delta_1^{\Phi} = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ функций

$$\Delta_t^{\bar{x}}(x,u) = H_t^{\bar{x}}(u) - H_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{s\in t^c}(\Phi_{ts}(u\bar{x}_s) - \Phi_{ts}(x\bar{x}_s)), \qquad x,u \in X^t,$$

является полем одноточечных энергий перехода, отвечающих потенциалу парного взаимодействия Φ.

3. Корреляционные функции

Пусть $\Delta_1 = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ — поле одноточечных энергий перехода и $\Delta = \{\Delta_\Lambda^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda^c}, \Lambda \in W\}$ — отвечающее ему поле энергий перехода. Зафиксируем некоторое $\Lambda \in W$. В целях упрощения обозначений, положим $\Delta_\Lambda = \Delta_\Lambda^{\theta_{\Lambda^c}}$, а для любых $t \in \Lambda$ и $z \in X^I$, $I \subset \Lambda \backslash t$, будем писать Δ_t^z вместо $\Delta_t^{z\theta_{(t\cup I)^c}}$.

Для заданного Δ_1, определим корреляционную функцию, отвечающую Λ, как функцию ρ_Λ на L_*, задаваемую соотношением

$$\rho_\Lambda(x) = \begin{cases} Z_\Lambda^{-1} \sum\limits_{y \in X^{\Lambda\backslash I}} \exp\{\Delta_\Lambda(xy, \theta_\Lambda)\}, & x \in X_*^I, I \subset \Lambda, \\ 0, & x \in X_*^I, I \not\subset \Lambda, \end{cases}$$

где $Z_\Lambda = \sum\limits_{x \in X^\Lambda} \exp\{\Delta_\Lambda(x, \theta_\Lambda)\}$, и $\rho_\Lambda(\varnothing) = 1$.

Таким образом, каждое Δ_1 определяет семейство $\rho(\Delta_1) = \{\rho_\Lambda, \Lambda \in W\}$ корреляционных функций в конечных объемах. Согласно приводимой ниже теореме корреляционные функции удовлетворяют определенным соотношениям при следующих ограничениях на элементы Δ_1: для всех $\Lambda \in W$, $t, s \in \Lambda$ и $I \subset \Lambda \backslash \{t, s\}$ выполнено

$$\Delta_t^{zy}(x, \theta_t) - \Delta_t^{zv}(x, \theta_t) = \Delta_t^y(x, \theta_t) - \Delta_t^v(x, \theta_t), \tag{3.1}$$

где $x \in X^t$, $y, v \in X^s$, $z \in X^I$.

Замечание 1. *Если Φ — потенциал парного взаимодействия, то элементы Δ^Φ удовлетворяют условиям* (3.1).

Наконец, подчеркнем, что доказательство следующей теоремы опирается только на свойства энергий перехода и не использует предположение о том, что энергия есть сумма взаимодействий.

Теорема 3.1. *Пусть $\Delta_1 = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{t^c}, t \in \mathbb{Z}^d\}$ — поле одноточечных энергий перехода, удовлетворяющих условиям* (3.1). *Тогда для любого $\Lambda \in W$ корреляционная функция ρ_Λ удовлетворяет уравнению*

$$\rho_\Lambda(xu) = \frac{e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}}{\sum\limits_{\alpha \in X^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}} \left(\rho_\Lambda(u) + \sum_{\alpha \in X^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)} \Big(G_\Lambda(xu) - G_\Lambda(\alpha u)\Big)\right)$$

при всех $t \in I \subset \Lambda \in W$ и $x \in X_*^t$, $u \in X_*^{I\backslash t}$, где

$$G_\Lambda(xu) = \sum_{J \subset \Lambda\backslash I} \sum_{y \in X_*^J} K_{t\cup J}(xy) \left(\rho_\Lambda(uy) - \sum_{\alpha \in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha uy)\right),$$

$$K_{t\cup J}(xy) = \prod_{s\in J}\left(e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)}-1\right).$$

Доказательство. Пусть $t \in I \subset \Lambda \in W$ и $x \in X_*^t$, $u \in X_*^{I\setminus t}$. В целях упрощения обозначений, положим $\theta = \theta_\Lambda$. В силу свойств энергий перехода, для всех $y \in X^{\Lambda\setminus I}$ имеем

$$\Delta_\Lambda(xuy,\theta) = \Delta_\Lambda(xuy,\theta_t uy) + \Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta) + \Delta_\Lambda(xu\theta_{\Lambda\setminus I},\theta_t u\theta_{\Lambda\setminus I}) -$$

$$-\Delta_\Lambda(xu\theta_{\Lambda\setminus I},\theta_t u\theta_{\Lambda\setminus I}) = \Delta_t^{uy}(x,\theta_t) + \Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta) + \Delta_t^u(x,\theta_t) - \Delta_t^u(x,\theta_t).$$

Следовательно, можем написать

$$\rho_\Lambda(xu) = \frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}}\exp\{\Delta_\Lambda(xuy,\theta)\} =$$

$$= \frac{e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}} e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)}\left(1+\exp\{\Delta_t^{uy}(x,\theta_t)-\Delta_t^u(x,\theta_t)\}-1\right) =$$

$$= e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}\left(\frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}} e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)} + \frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}}\left(e^{\Delta_t^{uy}(x,\theta_t)-\Delta_t^u(x,\theta_t)}-1\right)e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)}\right).$$

Поскольку

$$e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)} = \sum_{\alpha\in X^t} e^{\Delta_\Lambda(\alpha uy,\theta)} - \sum_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_\Lambda(\alpha uy,\theta)},$$

для первого слагаемого в полученном соотношении имеем

$$\frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}} e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)} = \rho_\Lambda(u) - \sum_{\alpha\in X_*^t}\rho_\Lambda(\alpha u).$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$G_\Lambda(xu) = \frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{y\in X^{\Lambda\setminus I}}\left(e^{\Delta_t^{uy}(x,\theta_t)-\Delta_t^u(x,\theta_t)}-1\right)e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uy,\theta)} =$$

$$= \frac{1}{Z_\Lambda}\sum_{J\subset\Lambda\setminus I}\sum_{y\in X_*^J}\left(e^{\Delta_t^{uy}(x,\theta_t)-\Delta_t^u(x,\theta_t)}-1\right)e^{\Delta_\Lambda(uy\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)},\theta)}.$$

Используя свойства $\mathbf{\Delta}$, можем написать

$$\Delta_t^{uy}(x,\theta_t) - \Delta_t^u(x,\theta_t) = \Delta_\Lambda(xuy\theta_{\Lambda\setminus I\setminus J}, uy\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)}) - \Delta_\Lambda(xu\theta_{\Lambda\setminus I}, u\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I)}) =$$

$$= \Delta_\Lambda(xuy\theta_{\Lambda\setminus I\setminus J}, xu\theta_{\Lambda\setminus I}) + \Delta_\Lambda(xu\theta_{\Lambda\setminus I}, u\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I)}) + \Delta_\Lambda(u\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I)}, uy\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)}) -$$

$$-\Delta_\Lambda(xu\theta_{\Lambda\setminus I}, u\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I)}) =$$

$$= \Delta_J^{xu}(y,\theta_J) - \Delta_J^u(y,\theta_J) = \sum_{j=1}^{|J|}\left(\Delta_{s_j}^{xuy_{s_{j+1},\ldots,s_{|J|}}}(y_{s_j},\theta_{s_j}) - \Delta_{s_j}^{uy_{s_{j+1},\ldots,s_{|J|}}}(y_{s_j},\theta_{s_j})\right),$$

где мы воспользовались формулой (2.1), а $J = \{s_1, s_2, ..., s_{|J|}\}$ есть некоторая нумерация точек в J. Принимая во внимание условие (3.1), получаем

$$\Delta_t^{uy}(x,\theta_t) - \Delta_t^u(x,\theta_t) = \sum_{s\in J} \left(\Delta_s^x(y_s,\theta_s) - \Delta_s(y_s,\theta_s)\right).$$

Следовательно,

$$G_\Lambda(xu) = \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{J\subset\Lambda\setminus I} \sum_{y\in X_*^J} \left(\prod_{s\in J} e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right) e^{\Delta_\Lambda(uy\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)},\theta)} =$$

$$= \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{J\subset\Lambda\setminus I} \sum_{y\in X_*^J} \sum_{T\subset J} \prod_{s\in T} \left(e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right) e^{\Delta_\Lambda(uy\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)},\theta)} =$$

$$= \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{T\subset\Lambda\setminus I} \sum_{J\subset\Lambda\setminus I: T\subset J} \sum_{y\in X_*^T} \sum_{z\in X_*^J} \prod_{s\in T} \left(e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right) e^{\Delta_\Lambda(uyz\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J)},\theta)} =$$

$$= \sum_{T\subset\Lambda\setminus I} \sum_{y\in X_*^T} \prod_{s\in T} \left(e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right) \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{J\subset\Lambda\setminus I\setminus T} \sum_{z\in X_*^J} e^{\Delta_\Lambda(uyz\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J\setminus T)},\theta)}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{J\subset\Lambda\setminus I\setminus T} \sum_{z\in X_*^J} e^{\Delta_\Lambda(uyz\theta_{t\cup(\Lambda\setminus I\setminus J\setminus T)},\theta)} = \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{z\in X^{\Lambda\setminus I\setminus T}} e^{\Delta_\Lambda(\theta_t uyz,\theta)} = \rho_\Lambda(uy) - \sum_{\alpha\in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha uy),$$

окончательно получаем

$$G_\Lambda(xu) = \sum_{J\subset\Lambda\setminus I} \sum_{y\in X_*^J} K_{t\cup J}(xy) \left(\rho_\Lambda(uy) - \sum_{\alpha\in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha uy)\right),$$

где

$$K_{t\cup J}(xy) = \prod_{s\in J} \left(e^{\Delta_s^x(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right).$$

Таким образом,

$$\rho_\Lambda(xu) = e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)} \left(\rho_\Lambda(u) - \sum_{\alpha\in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha u) + G_\Lambda(xu)\right).$$

Просуммировав обе части полученного соотношения по всем $x \in X_*^t$, получим

$$\sum_{x\in X_*^t} \rho_\Lambda(xu) = \rho_\Lambda(u) \sum_{x\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)} - \left(\sum_{x\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}\right) \cdot \sum_{\alpha\in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha u) + \sum_{x\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)} G_\Lambda(xu),$$

и, следовательно,

$$\sum_{\alpha\in X_*^t} \rho_\Lambda(\alpha u) = \frac{\sum\limits_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}}{1 + \sum\limits_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}} \rho_\Lambda(u) + \frac{1}{1 + \sum\limits_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}} \sum_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)} G_\Lambda(\alpha u).$$

Поскольку $K_{t\cup J}(\theta_t y)=0$, то $G_\Lambda(\theta_t u)=0$, и окончательно получаем $\rho_\Lambda(xu)=$

$$=e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}\left(\frac{1}{\sum\limits_{\alpha\in X^t}e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}}\rho_\Lambda(u)-\frac{1}{\sum\limits_{\alpha\in X^t}e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}}\sum_{\alpha\in X_*^t}e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}G_\Lambda(\alpha u)+G_\Lambda(xu)\right)$$

$$=\frac{e^{\Delta_t^u(x,\theta_t)}}{\sum\limits_{\alpha\in X^t}e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}}\left(\rho_\Lambda(u)+\sum_{\alpha\in X^t}e^{\Delta_t^u(\alpha,\theta_t)}\Big(G_\Lambda(xu)-G_\Lambda(\alpha u)\Big)\right).\qquad\square$$

4. Уравнение для корреляционных функций

Пусть $\Delta_1=\{\Delta_t^{\bar x},\bar x\in X^{t^c},t\in\mathbb{Z}^d\}$ — поле одноточечных энергий перехода. Введем норму Δ_1 следующим образом:

$$\|\Delta_1\|=\sup_{t\in\mathbb{Z}^d}\sup_{x,u\in X^t}\sup_{\bar x\in X^{t^c}}|\Delta_t^{\bar x}(x,u)|.$$

Положим также

$$D=\sup_{t\in\mathbb{Z}^d}\sup_{x\in X^t}\sum_{s\in t^c}\sup_{y\in X^s}|\Delta_s^x(y,\theta_s)-\Delta_s(y,\theta_s)|.$$

Рассмотрим банахово пространство $\mathscr{B}_*$ ограниченных вещественнозначных функций φ на L_* с нормой

$$\|\varphi\|=\sup_{\Lambda\in W}\|\varphi\|_\Lambda,\qquad \|\varphi\|_\Lambda=\sum_{x\in X_*^\Lambda}|\varphi(x)|.$$

Пусть $\preceq$ — некоторый порядок на $\mathbb{Z}^d$, например, лексикографический порядок. Для каждого $I\in W$ обозначим $I'=I\backslash t$, где t есть наименьший элемент I относительно $\preceq$. В целях упрощения обозначений, для каждого $x\in X_*^I$ положим $x'=x_{I'}$.

Рассмотрим оператор $\mathscr{K}=\mathscr{K}^{\Delta_1}$ на $\mathscr{B}_*$, определенный следующим образом

$$(\mathscr{K}\varphi)(x)=\gamma(x)\big((S\varphi)(x)+(T\varphi)(x)\big),\qquad x\in X_*^I,I\in W,$$

где

$$\gamma(x)=\frac{e^{\Delta_t^{x'}(x_t,\theta_t)}}{\sum\limits_{\alpha\in X^t}e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)}},\qquad (S\varphi)(x)=\begin{cases}\varphi(x'), & |I|>1,\\ 0, & |I|=1,\end{cases}$$

$$(T\varphi)(x)=(G\varphi)(x)+\sum_{\alpha\in X_*^t}e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)}\Big((G\varphi)(x)-(G\varphi)(\alpha x')\Big)$$

$$(G\varphi)(x)=\sum_{J\in W(I^c)}\sum_{y\in X_*^J}K_{t\cup J}(x_t y)\left(\varphi(x'y)-\sum_{\alpha\in X_*^t}\varphi(\alpha x'y)\right),$$

$$K_{t\cup J}(x_t y) = \prod_{s\in J}\left(e^{\Delta_s^{x_t}(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)} - 1\right).$$

Далее, положим

$$\delta(x) = \begin{cases} \gamma(x), & |I| = 1, \\ 0, & |I| > 1, \end{cases} \qquad x \in X_*^I, I \in W,$$

$$C_1 = \frac{e^{\|\Delta_1\|}N_X}{1 + e^{\|\Delta_1\|}N_X}, \qquad C_2 = 2\big(1+2e^{\|\Delta_1\|}N_X\big)\big(\exp\{e^D - 1\} - 1\big), \qquad N_X = |X| - 1.$$

Теорема 4.1. *Пусть Δ_1 — поле одноточечных энергий перехода, удовлетворяющее условию* (3.1) *и такое, что*

$$C_1(1 + C_2) < 1. \tag{4.1}$$

Тогда уравнение

$$\rho = \delta + \mathscr{K}\rho, \tag{4.2}$$

где $\mathscr{K} = \mathscr{K}^{\Delta_1}$, имеет единственное решение на $\mathscr{B}_*$, задаваемое соотношением

$$\rho = \big(1 - \mathscr{K}\big)^{-1}\delta = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{K}^n\right)\delta.$$

Доказательство. Указанное решение может быть получено при последовательном применении оператора $\mathscr{K}$ к обеим сторонам уравнения (4.2). Остается показать, что $\|\mathscr{K}\| < 1$.

Пусть $I \in W$ и $x \in X_*^I$. Поскольку $-\|\Delta_1\| \le \Delta_t^{x'}(x_t, \theta_t) \le \|\Delta_1\|$, имеем

$$|\gamma(x)| = \left|\frac{e^{\Delta_t^{x'}(x_t,\theta_t)}}{1 + \sum_{\alpha\in X_*^t} e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)}}\right| \le \frac{e^{\|\Delta_1\|}}{1 + e^{-\|\Delta_1\|}N_X}.$$

Следовательно, $\|\gamma S\varphi\|_I = 0$, если $|I| = 1$, а при $|I| > 1$, имеем

$$\|\gamma S\varphi\|_I = \sum_{x\in X_*^I}|\gamma(x)|\cdot|(S\varphi)(x)| \le \frac{e^{\|\Delta_1\|}}{1 + e^{-\|\Delta_1\|}N_X}\sum_{x\in X_*^t}\sum_{x'\in X_*^{I'}}|\varphi(x')| = C_1\|\varphi\|_{I'}.$$

Таким образом, $\|\gamma S\varphi\|_I \le C_1\|\varphi\|$ для всех $I \in W$.

Далее,

$$\|\gamma T\varphi\|_I = \sum_{x\in X_*^I}|\gamma(x)|\left|(G\varphi)(x)\left(1+\sum_{\alpha\in X_*^t}e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)}\right)-\sum_{\alpha\in X_*^t}e^{\Delta_t^{x'}(\alpha,\theta_t)}(G\varphi)(\alpha x')\right|\le$$

$$\le C_1\big(1+2e^{\|\Delta_1\|}N_X\big)\sum_{x'\in X_*^{I'}}\left|\sup_{\alpha\in X_*^t}(G\varphi)(\alpha x')\right|\le$$

$$\le C\sum_{x'\in X_*^{I'}}\sum_{J\in W(I^c)}\sum_{y\in X_*^J}\left|\sup_{\alpha\in X_*^t}K_{t\cup J}(\alpha y)\right|\cdot\left|\varphi(x'y)-\sum_{\alpha\in X_*^t}\varphi(\alpha x'y)\right|\le$$

$$=C\sum_{J\in W(I^c)}\sup_{\alpha\in X_*^t,y\in X_*^J}|K_{t\cup J}(\alpha y)|\left(\|\varphi\|_{I'\cup J}+\|\varphi\|_{I\cup J}\right)\le$$

$$\le 2\|\varphi\|C\sum_{J\in W(I^c)}\sup_{\alpha\in X_*^t,y\in X_*^J}|K_{t\cup J}(\alpha y)|,$$

где $C=C_1\big(1+2e^{\|\Delta_1\|}N_X\big)$. Для всех $\alpha\in X_*^t$ и $y\in X_*^{I^c}$, используя свойства экспоненциальной функции, можем написать

$$\sum_{J\in W(I^c)}|K_{t\cup J}(\alpha y_J)|=\sum_{J\in W(I^c)}\prod_{s\in J}|e^{\Delta_s^\alpha(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)}-1|=$$

$$=\sum_{n=1}^\infty\sum_{J\in W(I^c):|J|=n}\prod_{s\in J}|e^{\Delta_s^\alpha(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)}-1|=$$

$$=\sum_{n=1}^\infty\sum_{s_1\in I^c}\sum_{s_2\in I^c\setminus s_1}\cdots\sum_{s_n\in I^c\setminus\{s_1,s_2,\dots,s_{n-1}\}}\prod_{j=1}^n|e^{\Delta_{s_j}^\alpha(y_{s_j},\theta_{s_j})-\Delta_{s_j}(y_{s_j},\theta_{s_j})}-1|<$$

$$<\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\left(\sum_{s\in I^c}|e^{\Delta_s^\alpha(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)}-1|\right)^n\le\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\left(e^{\sum\limits_{s\in I^c}|\Delta_s^\alpha(y_s,\theta_s)-\Delta_s(y_s,\theta_s)|}-1\right)^n<$$

$$<\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\left(e^D-1\right)^n=\exp\{e^D-1\}-1,$$

откуда окончательно получаем

$$\|\gamma T\varphi\|_I\le 2C_1\big(1+2e^{\|\Delta_1\|}N_X\big)\big(\exp\{e^D-1\}-1\big)\|\varphi\|$$

при всех $I\in W$. Таким образом,

$$\|\mathscr{K}\|\le C_1+2C_1\big(1+2e^{\|\Delta_1\|}N_X\big)\big(\exp\{e^D-1\}-1\big)=C_1(1+C_2)<1. \qquad\square$$

Следующая теорема является основным результатом настоящей статьи. При ее доказательстве мы следуем работам Рюэля [1, 4].

Теорема 4.2. *Пусть Δ_1 — поле одноточечных энергий перехода, удовлетворяющее условиям (3.1) и (4.1), и пусть $\rho(\Delta_1)=\{\rho_\Lambda,\Lambda\in W\}$ — отвечающее* *ему семейство корреляционных функций в конечных объемах. Тогда существует положительная убывающая функция* ε*, такая, что* $\lim_{d\to\infty}\varepsilon(d)=0$*, а при всех* $x\in X_*^I$*,* $I\subset\Lambda\in W$*,* $|\rho_\Lambda(x)-\rho(x)|<\varepsilon\big(d(I,\Lambda^c)\big)$*, где* ρ *есть решение уравнения* (4.2).

Доказательство. Для каждого $\Lambda\in W$ рассмотрим оператор ψ_Λ на $\mathscr{B}_*$, задаваемый следующим образом

$$(\psi_\Lambda\varphi)(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in L_*^\Lambda,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Понятно, что $\|\psi_\Lambda\|=\sup\limits_{\|\varphi\|=1}\|\psi_\Lambda\varphi\|=1$, и при всех $V\subset\Lambda$ выполнено $\psi_V\psi_\Lambda=\psi_V$.

Согласно Теореме 3.1, при каждом $\Lambda\in W$ соответствующий элемент ρ_Λ семейства $\rho(\Delta_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho_\Lambda=\psi_\Lambda\delta+\psi_\Lambda\mathscr{K}\rho_\Lambda. \tag{4.3}$$

Поскольку $\|\psi_\Lambda\mathscr{K}\|\le\|\mathscr{K}\|$, согласно Теореме 4.1 имеем $\|\psi_\Lambda\mathscr{K}\|<1$, и, следовательно, ρ_Λ является единственным решением уравнения (4.3), которое может быть записано следующим образом

$$\rho_\Lambda=\big(1-\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^{-1}\psi_\Lambda\delta=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\big(\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^n\right)\psi_\Lambda\delta.$$

Для всех $V\subset\Lambda\in W$ и $n\ge1$ можем написать

$$\psi_V\rho_\Lambda-\psi_V\rho=\psi_V\left(\big(1-\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^{-1}\psi_\Lambda-\big(1-\mathscr{K}\big)^{-1}\right)\delta=$$

$$=\psi_V\left(\big(1-\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^{-1}-\big(1+\sum_{k=1}^{n}(\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\big)\right)\psi_\Lambda\delta+\psi_V\psi_\Lambda\delta+\psi_V\big(\sum_{k=1}^{n}(\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\big)\psi_\Lambda\delta-$$

$$-\psi_V\left(\big(1-\mathscr{K}\big)^{-1}-\big(1+\sum_{k=1}^{n}\mathscr{K}^k\big)\right)\delta-\psi_V\delta-\psi_V\big(\sum_{k=1}^{n}\mathscr{K}^k\big)\delta=$$

$$=\psi_V\big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\big)\psi_\Lambda\delta-\psi_V\big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathscr{K}^k\big)\delta+\psi_V\sum_{k=1}^{n}\big((\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\psi_\Lambda-\mathscr{K}^k\big)\delta.$$

Далее,

$$\left\|\psi_V\big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\big)\psi_\Lambda\right\|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\|\mathscr{K}\|^k=\frac{\|\mathscr{K}\|^{n+1}}{1-\|\mathscr{K}\|},$$

$$\left\|\psi_V\big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathscr{K}^k\big)\right\|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\|\mathscr{K}\|^k=\frac{\|\mathscr{K}\|^{n+1}}{1-\|\mathscr{K}\|},$$

и остается оценить $\left\|\psi_V\sum\limits_{k=1}^{n}\big((\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\psi_\Lambda-\mathscr{K}^k\big)\right\|$.

Для каждого $V \subset \Lambda \in W$ и $S \subset \mathbb{Z}^d$, такого, что $\Lambda \subset S$, и всех $x \in X_*^I$, $I \subset V$, можем написать

$$|(\psi_V \mathscr{K} \psi_S \varphi)(x) - (\psi_V \mathscr{K} \psi_\Lambda \varphi)(x)| \leq |\gamma(x)| \sum_{\alpha \in X_*^t} e^{\Delta_t^{x'}(\alpha, \theta_t)} \times$$

$$\sum_{\substack{J \in W(S \setminus I): \\ J \cap (S \setminus \Lambda) \neq \varnothing}} \sum_{y \in X_*^J} |K_{t \cup J}(x_t y) - K_{t \cup J}(\alpha y)| \cdot \left| \varphi(x' y) - \sum_{\beta \in X_*^t} \varphi(\beta x' y) \right| \leq$$

$$\leq \frac{e^{\|\Delta_1\|}}{1 + e^{-\|\Delta_1\|} N_X} e^{\|\Delta_1\|} N_X \sum_{J \in W(\Lambda^c)} 2 \sup_{\alpha \in X_*^t, y \in X_*^J} \times$$

$$\times |K_{t \cup J}(\alpha y)| \left(\sum_{y \in X_*^J} |\varphi(x' y)| + \sum_{y \in X_*^J, \beta \in X_*^t} |\varphi(\beta x' y)| \right) \leq$$

$$\leq 4 C_1 e^{\|\Delta_1\|} \|\varphi\| \sum_{J \in W(\Lambda^c)} \sup_{\alpha \in X_*^t, y \in X_*^J} |K_{t \cup J}(\alpha y)|.$$

Применив те же рассуждения, что и при доказательстве Теоремы 4.1, для всех $\alpha \in X_*^t$ и $y \in X_*^{\Lambda^c}$ получим

$$\sum_{J \in W(\Lambda^c)} |K_{t \cup J}(\alpha y_J)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(e^{\sum\limits_{s \in \Lambda^c} |\Delta_s^\alpha(y_s, \theta_s) - \Delta_s(y_s, \theta_s)|} - 1 \right)^n < \exp\{e^{\sigma(\Lambda)} - 1\} - 1,$$

где

$$\sigma(\Lambda) = \sum_{s \in \Lambda^c} \sup_{\alpha \in X^t, y \in X^s} |\Delta_s^\alpha(y, \theta_s) - \Delta_s(y, \theta_s)| \to 0 \quad \text{при } \Lambda \uparrow V^c.$$

Следовательно, существует положительная убывающая функция f, такая, что $\lim\limits_{d \to \infty} f(d) = 0$ и при всех $V \subset \Lambda \subset S$,

$$\|\psi_V \mathscr{K} \psi_S - \psi_V \mathscr{K} \psi_\Lambda\| \leq f(d(V, \Lambda^c)). \tag{4.4}$$

Для $\Lambda \in W$ обозначим через $\Lambda(r) = \{s \in \Lambda : d(s, \Lambda^c) > r\}$ множество точек Λ, находящихся на расстоянии больше чем r от Λ^c, $r \geq 1$. Понятно, что при $r_1 > r_2$, $\Lambda(r_1) \subset \Lambda(r_2) \subset \Lambda$. Из (4.4) следует, что для всех $r \geq 1$ и $k \geq 1$ выполнено

$$\|\psi_{\Lambda(kr)} \mathscr{K} \psi_{\Lambda(jr)} - \psi_{\Lambda(kr)} \mathscr{K} \psi_{\Lambda((k-1)r)}\| \leq f(r), \qquad 1 \leq j < k,$$

$$\|\psi_{\Lambda(kr)} \mathscr{K} - \psi_{\Lambda(kr)} \mathscr{K} \psi_{\Lambda((k-1)r)}\| \leq f(r).$$

Тогда

$$\|\psi_k (\psi_\Lambda \mathscr{K})^k \psi_\Lambda - \psi_k \mathscr{K} \psi_{k-1} \ldots \mathscr{K} \psi_1 \mathscr{K} \psi_\Lambda\| \leq (k-1) f(r) \|\mathscr{K}\|^{k-1},$$

$$\|\psi_k \mathscr{K}^k - \psi_k \mathscr{K} \psi_{k-1} \ldots \mathscr{K} \psi_1 \mathscr{K} \psi_\Lambda\| \leq k f(r) \|\mathscr{K}\|^{k-1}.$$

Следовательно,

$$\|\psi_{\Lambda(kr)}\big(\mathscr{K}\psi_{\Lambda(kr)}\big)^k-\psi_{\Lambda(kr)}\mathscr{K}^k\|\le 2kf(r)\|\mathscr{K}\|^{k-1},$$

и заменяя r на nr/k, получаем

$$\|\psi_{\Lambda(nr)}\big(\mathscr{K}\psi_{\Lambda(kr)}\big)^k-\psi_{\Lambda(nr)}\mathscr{K}^k\|\le 2kf(r)\|\mathscr{K}\|^{k-1}$$

при всех $k=1,2,\dots,n$.

Принимая во внимание все вышеприведенные оценки, можем написать

$$\begin{aligned}&\Big\|\psi_{\Lambda(nr)}\big(1-\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^{-1}\psi_\Lambda-\psi_{\Lambda(nr)}\big(1-\mathscr{K}\big)^{-1}\Big\|\le\\ &\le\Bigg\|\psi_{\Lambda(nr)}\big(\sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\big)\psi_\Lambda\Bigg\|+\Bigg\|\psi_{\Lambda(nr)}\big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathscr{K}^k\big)\Bigg\|\\ &+\Bigg\|\psi_{\Lambda(nr)}\sum_{k=1}^{n}\big((\psi_\Lambda\mathscr{K})^k\psi_\Lambda-\mathscr{K}^k\big)\Bigg\|\le\\ &\le\frac{2\|\mathscr{K}\|^{n+1}}{1-\|\mathscr{K}\|}+2f(r)\sum_{k=1}^{n}k\|\mathscr{K}\|^{k-1}<\frac{2\|\mathscr{K}\|^{n+1}}{1-\|\mathscr{K}\|}+\frac{2f(r)}{\big(1-\|\mathscr{K}\|\big)^2}.\end{aligned}$$

Правая часть полученного неравенства стремится к нулю когда n и r возрастают. Полагая $d=nr$, можно найти положительную убывающую функцию ε, такую, что $\lim\limits_{d\to\infty}\varepsilon(d)=0$ и

$$\Big\|\psi_{\Lambda(d)}\big(1-\psi_\Lambda\mathscr{K}\big)^{-1}\psi_\Lambda-\psi_{\Lambda(d)}\big(1-\mathscr{K}\big)^{-1}\Big\|<\frac{\varepsilon(d)}{\|\delta\|}.$$

Отсюда вытекает $\|\psi_{\Lambda(d)}\rho_\Lambda-\psi_{\Lambda(d)}\rho\|<\varepsilon(d)$, и, следовательно, при всех $I\subset\Lambda$ и $x\in X_*^I$ имеем $|\rho_\Lambda(x)-\rho(x)|\le\|\psi_I\rho_\Lambda-\psi_I\rho\|<\varepsilon(d)$ как только $d(I,\Lambda^c)>d$. $\square$

Замечание 2. *Пусть Φ — вакуумный потенциал парного взаимодействия (с вакуумом θ), т.е. $\Phi_J(x)=0$, если $x_t=\theta_t$ хотя бы при одном $t\in J$, $J\in W$. Норма Φ определяется следующим образом*

$$\|\Phi\|=\sup_{t\in\mathbb{Z}^d}\sup_{x\in X_*^t}\sum_{s\in t^c}\sup_{y\in X_*^s}|\Phi_{ts}(xy)|.$$

Пусть Δ_1^Φ — соответствующее поле одноточечных энергий перехода. Тогда $\|\Delta_1\|\le 2\|\Phi\|$, $D\le\|\Phi\|$, и Теорема 4.2 выполнена, если

$$\frac{e^{2\|\Phi\|}N_X}{1+e^{-2\|\Phi\|}N_X}\Big(1+2\big(1+2e^{2\|\Phi\|}N_X\big)\big(\exp\{e^{\|\Phi\|}-1\}-1\big)\Big)<1.$$

Замечание 3. *В работе* [9] *(см. также* [11]*) было показано, что любое распределение вероятностей P_Λ на X^Λ, $\Lambda \in W$, с необходимостью имеет гиббсовскую форму*

$$P_\Lambda(x) = \frac{e^{\Delta_\Lambda(x,u)}}{\sum\limits_{z \in X^\Lambda} e^{\Delta_\Lambda(z,u)}}, \qquad x \in X^\Lambda,$$

где $u \in X^\Lambda$ и Δ_Λ — функция энергии перехода, т.е. функция на $X^\Lambda \times X^\Lambda$, удовлетворяющая условию $\Delta_\Lambda(x,u) = \Delta_\Lambda(x,z) + \Delta_\Lambda(z,u)$, $x, u, z \in X^\Lambda$. Корреляционная функция ρ_Λ для P_Λ определяется следующим образом

$$\rho_\Lambda(x) = \sum_{y \in X^{\Lambda \setminus I}} P_\Lambda(xy),$$

где $x \in X_*^I$, $I \subset \Lambda$, и мы приходим к определению корреляционной функции, использованному в настоящей работе.

Благодарность. Авторы выражают благодарность анонимному рецензенту за ценные замечания, которые помогли улучшить статью.

Abstract. In this paper, the well-known method of correlation equations for constructing Gibbs measures is generalized based on the concept of the transition energy field. Using the properties of transition energies, we obtain the system of correlation equations for lattice systems with finite spin space. It is shown that for a sufficiently small value of the one-point transition energies, the corresponding system of correlation functions, considered in the Banach space of bounded real-valued functions, has a solution which is unique. Finally, the convergence of finite-volume correlation functions to the limiting correlation function is shown.

Список литературы

[1] D. Ruelle, “Correlation functions of classical gases”, Ann. Phys. (N. Y.), **25**, 109 – 120 (1963).
[2] R. A. Minlos, “Limiting Gibbs’ distribution”, Funct. Anal. Appl. **1** (2), 140 – 150 (1967).
[3] G. Gallavotti and S. Miracle-Sole, “Correlation functions of a lattice system”, Comm. Math. Phys., **7** (4), 274 – 288 (1968).
[4] D. Ruelle, Statistical Mechanics, Rigorous Results, New York, Benjamin (1969).
[5] R. A. Minlos, Introduction to Mathematical Statistical Physics, University Lecture Series **19**, Amer Mathematical Society (1999).
[6] B. S. Nahapetian, “Strong mixing of a Gibbs random field with a discrete argument and some of its applications” [in Russian], Izv. AN Arm.SSR, series “Mathematics”, **3**, 242 – 254 (1975).
[7] V. A. Arzumanyan, B. S. Nakhapetyan, S. K. Pogosyan, “Cluster properties of classical lattice spin systems with vacuum” [in Russian], Theor. Math. Phys., **67** (1), 331 – 339 (1986).
[8] V. A. Arzumanyan, B. S. Nakhapetyan, S. K. Pogosyan, “Classical spin lattice systems with vacuum”, Acta Appl. Math., **22**, 33 – 53 (1991).
[9] S. Dachian and B. S. Nahapetian, “On the relationship of energy and probability in models of classical statistical physics”, Markov Processes Relat. Fields, **25** (4), 649 – 681 (2019).

[10] L. A. Khachatryan and B. S. Nahapetian, “On the characterization of a finite random field by conditional distribution and its Gibbs form”, J. Theor. Probab. **36**, 1743 – 1761 (2023).

[11] L. A. Khachatryan and B. S. Nahapetian, “Duality of energy and probability in finite-volume models of statistical physics”, Reports of NAS RA **123** (3-4), 7 – 14 (2023).

[12] L. A. Khachatryan and B. S. Nahapetian, “Gibbs scheme in the theory of random fields”, Submitted to Annales Henri Poincaré (2025), (https://doi.org/10.1007/s00023-025-01573-z).

[13] L. A. Khachatryan and B. S. Nahapetian, “Transition energy field and correlation equations”, Reports of NAS RA, **125** (1), 7 -– 14 (2025).

Поступила 25 февраля 2025

После доработки 18 апреля 2025

Принята к публикации 22 апреля 2025