Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 4, 2025, стр. 23 – 44.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ

Г. А. КАРАГУЛЯН, В. Г. КАРАГУЛЯН

Институт математики НАН РА[1]
Ереванский государственный университет
E-mails: *g.karagulyan@gmail.com*; *vahekar2000@gmail.com*

Аннотация. Набор конечных множеств $\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ назовем двойным покрытием, если любой элемент $a \in \cup_{k=1}^{p} A_k$ содержится точно в двух множествах этого набора. Для фиксированных натуральных чисел l и p, пусть $\mu_{l,p}$ есть количество классов эквивалентности двойных покрытий с $\#(A_k) = l$, $k = 1, 2, \dots, p$. Исследуется асимптотическое поведение величины $\mu_{l,p}$ при $p \to \infty$. Применив полученные результаты, предлагается альтернативный подход к гиперконтрактивному неравенству Бонами-Киенера.

MSC2020 numbers: 05A17; 05A20; 05B40; 42C05; 60G42.

Ключевые слова: двойное покрытие; асимптотическая оценка; хаос Радемахера; безусловная сходимость.

1. Введение

Будем рассматривать комбинаторный объект двойного покрытия, который частично связан с теорией разбиений и с теорией графов. Теория разбиений имеет богатую историю, которая детально рассматривается в книге Г. Андревс [3]. Разбиение натурального числа n это есть конечная возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_m$ такая, что $\sum_{k=1}^{m} n_k = n$. Функция разбения $\nu(n)$ это есть количество всевозможных разбиений числа n. Одной из выдающийся достижений теории разбиений есть явная формула $\nu(n)$, которая была почти завершена Харди и Рамануджаном и полностью завершена Радемахером (см. [3], Теорема 5.1). Эта формула не имеет простую форму, а задается в виде бесконечного ряда, содержащего некоторые тригонометрические суммы. Известна также асимптотическая формула

$$\nu(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi \left(\frac{2n}{3}\right)^{1/2}\right) \tag{1.1}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию и науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения (проект № 21AG-1A045)

доказанная Мейнардусом (см. [3], Теорема 6.2), которую мы будем использовать ниже.

Данный набор конечных множеств A_k, $k = 1, 2, \dots, p$, произвольной природы (не обязательно разные) определяет набор-множеств, который обозначим $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$.

Определение 1.1. *Два набора множеств $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_p\}$ равны, если существует взаимно-однозначное отображение σ на $\{1, 2, \dots, p\}$ такое, что $A_{\sigma(k)} = B_k$ для всех $k = 1, 2, \dots, p$. Скажем, что наборы множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны, если существует взаимно-однозначное отображение*

$$\phi : \bigcup_{k=1}^{p} A_k \to \bigcup_{k=1}^{p} B_k$$

такое, что $\{\phi(A_1), \dots, \phi(A_p)\} = \{B_1, \dots, B_p\}$. Соотношения равенства и изоморфности для двух наборов-множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будут обозначены соответственно через $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.

Отметим, что символ $\sim$ здесь определяет соотношение эквивалентности. Пусть $[A_1, A_2, \dots, A_p]$ есть класс эквивалентности (E-класс) порожденный набором множеств $\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$. Соответственно, если $\mathcal{D}$ есть некоторое семейство наборов множеств, то мы обозначим через $[\mathcal{D}]$ E-классы, порожденные элементами семейства $\mathcal{D}$.

Данные наборы множеств $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ определяют новый набор множеств, обозначенный $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$, который состоит из всех элементов наборов множеств $\mathcal{A}_k$.

Определение 1.2. *Набор множеств $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ назовем двойным покрытием, если любой элемент $a \in \cup_{k=1}^{p} A_k$ содержится ровно в двух множествах A_k. Если же любой такой элемент a покрыт четным количеством множеств A_k, то скажем, что $\mathcal{A}$–четное покрытие.*

Определение 1.3. *Набор множеств $\mathcal{A}$ называется связным, если для любых двух элементов $A, B \in \mathcal{A}$ существует последовательность множеств $A = E_0, E_1, \dots, E_m = B$ такая, что $E_j \in \mathcal{A}$, $E_j \cap E_{j+1} \neq \varnothing$ для всех $j = 0, 1 \dots, m-1$.*

Определение 1.4. *Любой набор множеств $\mathcal{A}$ единственным образом представим в виде $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$, где каждый $\mathcal{A}_k$ связный. В таком случае мы скажем, что $\mathcal{A}_k$ является связным компонентом $\mathcal{A}$. Будем говорить, что набор множеств $\mathcal{A}$ стандартен, если все E-классы связных компонент $[\mathcal{A}_k]$ разные.*

Обозначим через $\#(A)$ количество элементов конечного множества A. Для данных целых чисел $l \geq 2$ и $p \geq 2$ рассматривается класс двойных покрытий

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}, \tag{1.2}$$

удовлетворяющие условию $\#(A_k) = l$. Очевидно, что количество разных E-классов таких двойных покрытий есть число, зависящее только от l и p. Обозначим это число через $\mu_{l,p}$. Количество E-классов стандартных двойных покрытий обозначим через $\mu_{l,p}$(стандарт). Для количества $\mu_{l,p}$ целого семейства двойных покрытий иногда будем использовать обозначение $\mu_{l,p}$(полный). Таким же образом определим более широкий класс двойных покрытий (1.2), где A_k удовлетворяют $1 \leq \#(A_k) \leq l$. Назовем покрытия первого и второго типа, (l,p) и $(l,p)^*$ покрытиями соответственно. Для количества E-классов $(l,p)^*$ двойных покрытий будем использовать обозначение $\mu^*_{l,p}$(полный).

Величины $\mu_{l,p}$ и $\mu^*_{l,p}$ можно рассматривать как объекты в теории мультиграфов. А именно, $\mu_{l,p}$ ($\mu^*_{l,p}$)–количество мультиграфов, имеющие p вершин степени l. Действительно, каждому двойному покрытию (1.2) мы связываем мультиграф с вершинами A_k, где количество сторон, соединяющих две вершины A_k и A_j равно количеству элементов пересечения $A_k \cap A_j$. Фактически, элементы объединения $\cup_j A_j$ являются сторонами этого графа. Рассмотрим пример двойного покрытия типа $(3,6)$,

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1,2,3\}, \\ A_2 &= \{3,4,5\}, \\ A_3 &= \{4,5,6\}, \\ A_4 &= \{6,7,8\}, \\ A_5 &= \{7,8,9\}, \\ A_6 &= \{1,2,9\}, \end{aligned}$$

изображеный в Рис.1.

Двойные покрытия с параметром $l = 2$ имеют простую характеризацию в отличие от случая $l > 2$. Действительно, сначала обнаружим, что все связные $(2,p)$ двойные покрытия (1.2) изоморфны циклическому набору множеств $\{\{1,2\},\{2,3\},\dots,\{p-1,p\},\{p,1\}\}$. Если двойное покрытие (1.2)–произвольное, то мы имеем $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$, где $\mathcal{A}_k$–компоненты связностей $\mathcal{A}$. Если

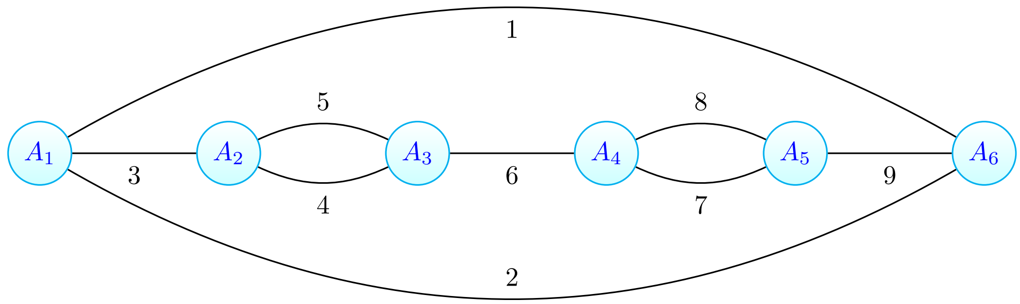

Рис. 1. мультиграф типа $(3, 6)$.

$p_k = \#(\mathcal{A}_k)$, то имеем $p_k \geq 2$ и $p_1 + \ldots + p_n = p$. Таким образом мы заключаем, что $\mu_{2.p}$ есть количество разбиений числа p на сумму целых чисел $p_k \geq 2$. Отсюда легко проверить, что

$$\mu_{2,p} = \nu(p) - \nu(p-1), \tag{1.3}$$

где $\nu(n)$ есть функция разбиения (1.1) (см. Рис. 2, пример двойного покрытия с тремя компонентами связности). Далее, основываясь на (1.1) и (1.3), после простых вычислений можно установить следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Имеет место соотношение*

$$\mu_{2,p} \sim \frac{\pi\sqrt{2}}{24p\sqrt{p}} \exp\left(\pi\left(\frac{2p}{3}\right)^{1/2}\right) \text{ при } p \to \infty.$$

В работе исследуется асимптотическое поведение величин $\mu_{l,p}$ и $\mu^*_{l,p}$ при $p \to \infty$ когда $l > 2$. Основываясь на (1.3) и на вышеупомянутую формулу Харди-Рамануджан-Радемахер для $\nu(n)$, можно обнаружить, что $\mu_{2,p}$ не может иметь простой явной формулы. Случай $l > 2$ гораздо сложнее чем случай $l = 2$, и нам неизвестно точной асимптотической формулы для $\mu_{l,p}$ при $l > 2$. В работе доказывается следующая оценка, которая является главным результатом работы.

Теорема 1.2. *Если $l, p \geq 2$ целые, такие, что pl–четно, то*

$$(a(l))^p \cdot p^{p(l/2-1)} \leq \mu_{l,p}(\textit{стандарт}) \leq \mu^*_{l,p}(\textit{полный}) \leq (b(l))^p \cdot p^{p(l/2-1)}, \tag{1.4}$$

где $a(l)$ и $b(l)$ положительные постоянные, зависящие от l.

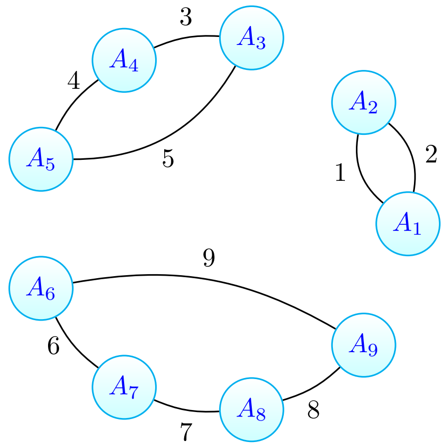

Рис. 2. мультиграф с $l = 2$, $p = 9$.

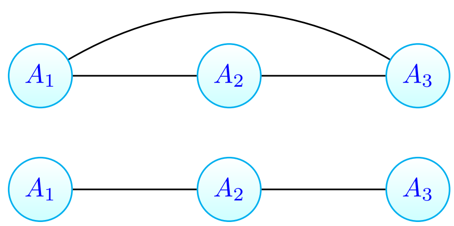

Рис. 3. два связных мультиграфа типа $(2,3)^*$.

Используя эти оценки, дается альтернативное доказательство одного неравенства, содержащее Радемахер хаос суммы, которое было независимо доказано Бонами [1] и Киенер [2] (см. также [4] или [5]). Пусть $\{r_n\}_{n\geq 1}$ есть последовательность функций Радемахера $r_n(x) = \text{sign }(\sin 2^n \pi x)$. Класическое неравенство Хинчина утверждает, что для любого параметра $0 < p < \infty$, существуют постоянные A_p, B_p такие, что

$$A_p \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(x)\right\|_p \leq B_p \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}. \tag{1.5}$$

Неравенство Хинчина–хорошо известный объект в анализе и в теории вероятностей, имеющее разные обобщения и применения. Специальный случай этого неравенства впервые был установлен Хинчиным [6], кто установил оценку (1.5) с $B_p = \sqrt{p/2+1}$ и $p \geq 2$. Дальнейшее исследование этого неравенства дается в работах Литтлвуда [7], Пели и Зигмунда [8]. Пусть A_p и B_p есть наилучшие постоянные, для которых выполняется неравенство (1.5). Очевидно $A_p = 1$ при $2 \le p < \infty$ и $B_p = 1$ для всех $0 < p \le 2$. В 1961г; Стечкин [9] установил, что $B_p = ((p-1)!!)^{1/p}$ для четных параметров $p \ge 4$, что в дальнейшем было распространено для всех действительных $p \ge 3$ Юнгом в [10]. Решив известную проблему Литтвуда (см. [7]) Шарек [11] доказал, что $A_1 = 1/\sqrt{2}$. В 1982 году Хагерап [12] изобрел новый метод, позволяющий найти точные постоянные неравенства Хинчина для всех остальных случаев, при этом заново доказывая предыдущие результаты. Он доказал, что

$$B_p = 2^{1/2}\big(\Gamma(p+1/2)/\pi\big)^{1/p}, \quad 2 < p < \infty,$$

и

$$A_p = \begin{cases} 2^{1/2-1/p} & \text{при} \quad 0 < p < p_0, \\ 2^{1/2}\big(\Gamma(p+1/2)/\sqrt{\pi}\big)^{1/p} & \text{при} \quad p > p_0, \end{cases}$$

где $1 < p_0 < 2$ есть решение уравнения $\Gamma(p+1/2) = \sqrt{\pi}/2$.

Рассмотрим ортонормальные системы, порожденные произведениями фиксированного количества функций Радемахера. Для конечного множества $A \subset \mathbb{N}$ обозначим

$$w_A(x) = \prod_{k \in A} r_k(x).$$

Напомним, что такие произведения порождают классическую ортонормированную систему Уолша $W = \{w_A : A \subset \mathbb{N}\}$. Для данного целого $l \ge 2$ обозначим $\mathcal{Z}_l = \{A \subset \mathbb{N} : \#(A) = l\}$ и рассмотрим подсистему $W_l = \{w_A : A \in \mathcal{Z}_l\} \subset W$ системы Уолша образованную l-кратными произведениями функций Радемахера. Иногда систему W_l называют Радемахер хаос. Кратную числовую последовательность $b = \{b_A : A \in \mathcal{Z}_l\}$ с нормой $\|b\| = \big(\sum |b_A|^2\big)^{1/2}$ назовем конечной, если она содержит только конечное число ненулевых членов. Доказывается следующая оценка для Радемахер хаос сумм.

Теорема 1.3. *Если $l, p \ge 2$ целые, а p – четное число, то для любой последовательности конечного типа $\{b_A : A \in \mathcal{Z}_l\}$ имеем*

$$\frac{\big(p!\mu_{l,p}(\textit{стандарт})\big)^{1/p}}{2\sqrt{3}} \le \sup_{\|b\| \le 1} \Big\| \sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A \Big\|_p \le \sqrt{l!} \cdot \big(p!\mu_{l,p}(\textit{полный})\big)^{1/p}. \tag{1.6}$$

Из теорем 1.2 и 1.3 немедленно следует гиперконтракт неравенство Бонами-Киенера, которое есть обобщение неравенства Хинчина для Радемахер хаос сумм.

Следствие 1.1 (Бонами-Киенер, [1, 2])**.** *Пусть $l \geq 2$–целое, а $p > 2$–четное число. Тогда для любой последовательности конечного типа $b = \{b_A : A \in \mathcal{Z}_l\}$, имеет место неравенство*

$$c_l \cdot p^{l/2} \leq \sup_{\|b\| \leq 1} \left\| \sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A \right\|_p \leq C_l \cdot p^{l/2}, \tag{1.7}$$

где $C_l > c_l > 0$–постоянные, зависящие только от l.

Замечание 1.1. *Фактически, оригинальная оценка Бонами-Киенера это неравенство*

$$\sup_{\|b\| \leq 1} \left\| \sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A \right\|_p \leq (p-1)^{l/2},$$

которое имеет некоторое улучшение при четных $p > 2$ (см. упражнения 9.37 и 9.38 из [13]).

2. Доказательство Теоремы 1.2

Нам понадобятся несколько лемм. В этом параграфе $a \lesssim b$ будет означать неравенство $a \leq (c(l))^p \cdot b$, где $c(l)$–постоянная, зависящая только от l. Запись $a \asymp b$ означает одновременное выполнение соотношений $a \lesssim b$ и $b \lesssim a$. Обозначим $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ и пусть π_k есть семейство всех взаимно-однозначных отображений (перестановок) $\sigma : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$. В случае четной lp обозначим через $\mathcal{D}_{l,p}$ и $\mathcal{D}^*_{l,p}$ семейства двойных покрытий $\{A_1, \ldots, A_p\}$, $A_j \subset \mathbb{N}_{pl/2}$, удовлетворяющие $\#(A_j) = l$ и $\#(A_j) \leq l$, соответственно. Очевидно, что каждое двойное покрытие (1.2) имеет свой изоморфный образ в $\mathcal{D}^*_{l,p}$. Поэтому можем писать $\mu^*_{l,p} = \#([\mathcal{D}^*_{l,p}])$. Будем рассматривать разные подклассы $\mathcal{D}_{l,p}$, отметив характер наборов множеств такого или иного подкласса. Например, подсемейство стандартных наборов множеств из $\mathcal{D}_{l,p}$ обозначим через $\mathcal{D}_{l,p}$(стандарт), также записывая $\mu_{l,p}$(стандарт) $= \#([\mathcal{D}_{l,k}$(стандарт)$])$. Для целого семейства $\mathcal{D}_{l,p}$ иногда будем использовать обозначение $\mathcal{D}_{l,p}$(полный).

Лемма 2.1. *Если lp–четное число, то имеем*

$$p^{p(l-1)} \lesssim \#(\mathcal{D}_{l,p}(\textit{полный})) \leq \#(\mathcal{D}^*_{l,p}(\textit{полный})) \lesssim p^{p(l-1)}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Параллельно с $\mathcal{D}^*_{l,p}$ ($\mathcal{D}_{l,p}$) будем рассматривать семейство $\bar{\mathcal{D}}^*_{l,p}$ ($\bar{\mathcal{D}}_{l,p}$) упорядоченных наборов $(A_1, \ldots, A_p)$ таких, что $\{A_1, \ldots, A_p\} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$ ($\mathcal{D}_{l,p}$).

Данное двойное покрытие $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_p\} \in \mathcal{D}_{l,p}$ и перестановка $\sigma \in \pi_p$ порождают другой упорядоченный набор

$$(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(p)}) \in \bar{\mathcal{D}}^*_{l,p}. \tag{2.2}$$

Очевидно, что количество разных таких упорядоченных наборов имеет верхную оценку $p!$ и эта грань достижима когда все множества A_j разные. С другой стороны заметим, что такие перестановки σ могут порождать по меньшей мере $p!/2^{p/2}$ разных упорядоченных наборов (2.2) (p может быть и четным). Действительно, так как $\mathcal{A}$ есть двойное покрытие, исключается равенство трех разных множеств A_j. Следовательно такая нижняя грань достигается, когда каждое множество A_j имеет себе равную пару $A_{j'}$, т.е. $A_j = A_{j'}$. Поэтому количество перестановок порождающих один и тот же упорядоченный набор в (2.1) не может быть больше чем $2^{p/2}$. Отсюда вытекает. что существует по меньшей мере $p!/2^{p/2}$ разных упорядоченных наборов, которые могут получится в (2.1). Таким образом, мы заключаем

$$\frac{\#(\bar{\mathcal{D}}^*_{l,p})}{p!} \le \#(\mathcal{D}^*_{l,p}) \le \frac{2^{p/2}\#(\bar{\mathcal{D}}^*_{l,p})}{p!}, \tag{2.3}$$

такое же неравенство имеет место и для $\bar{\mathcal{D}}_{l,p}$. Сначала докажем верхнюю оценку в (1.4). Рассмотрим декартово произведение $G_{l,p} = \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_{pl/2}$. Для натуральных чисел $1 \le l_j \le l$ случайным образом выберем множества $B_j \subset G_{l,p}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, так, что $\#(B_j) = l_j$. Очевидно, что количество таких выборов упорядоченных наборов ровно

$$\binom{pl}{l_1} \cdot \binom{pl - l_1}{l_2} \cdots \binom{pl - l_1 - \ldots - l_{p-1}}{l_p} = \frac{(pl)!}{(l!)^p} \lesssim p^{pl}.$$

Пусть $(B_1, \ldots, B_p)$ есть один из таких выборов и предположим, что $A_j \subset \mathbb{N}_{pl/2}$ есть проекции множеств B_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, на $\mathbb{N}_{pl/2}$. Легко усмотреть, что среди таких множеств получаем все упорядоченные наборы $(A_1, \ldots, A_p) \in \bar{\mathcal{D}}^*_{l,p}$ с $\#(B_j) = l_j$. С другой стороны количество выборов $1 \le l_j \le l$ равно l^p. Отсюда мы заключаем $\#(\bar{\mathcal{D}}^*_{l,p}) \lesssim p^{pl}$. Комбинируя это с правым неравенством в (2.3), мы получаем верхную оценку (2.1).

Для доказательства нижней оценки в (2.1), сначала мы предположим, что p четно. Далее мы рассмотрим только упорядоченные наборы $(A_1, \ldots, A_p) \in \bar{\mathcal{D}}_{l,p}$, где $\{A_1, \ldots, A_{p/2}\}$ и $\{A_{p/2+1}, \ldots, A_p\}$ отдельно формируют разбиение для $\mathbb{N}_{pl/2}$. Количество таких упорядоченных наборов $(A_1, \ldots, A_p)$ ровно $\left(\frac{(pl/2)!}{(l!)^{p/2}}\right)^2$. Поэтому имеем оценку

$$\#(\bar{\mathfrak{D}}_{l,p}) \geq \left(\frac{(pl/2)!}{(l!)^{p/2}}\right)^2 \gtrsim p^{pl},$$

которая вместе с (2.3) дает нижнюю оценку (2.1). Если p нечетно и $p = 2t+1$, то l должно быт четным. Рассмотрим наборы $(A_1, \ldots, A_p) \in \bar{\mathfrak{D}}_{l,p}$, где каждый из двух наборов множеств $\{A_1, \ldots, A_t\}$ и $\{A_{t+1}, \ldots, A_{2t}\}$ состоит из попарно непересекающихся множеств из $\mathbb{N}_{pl/2}$. Тогда множества

$$A_{2t+1} \cap \left(\cup_{k=1}^{t} A_k\right), \quad A_{2t+1} \cap \left(\cup_{k=t+1}^{2t} A_k\right)$$

непересекаются и имеют ровно $l/2$ элемент. Используя такой же аргумент, можно получить, что количество таких упорядоченных наборов равно

$$\binom{pl/2}{l}\binom{l}{l/2}\left(\frac{(tl)!}{(l!)^t}\right)^2 \gtrsim p^{pl}.$$

Отсюда аналогичным образом получим $\#(\bar{\mathfrak{D}}_{l,p}) \gtrsim p^{pl}$. Итак, используя неравенство (2.3), мы получим нижнюю оценку (2.1). □

Лемма 2.2. *Если $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\} \in \mathfrak{D}^*_{l,p}$(стандарт), то количество перестановок $\sigma \in \pi_{pl/2}$, удовлетворяющих*

$$\{\sigma(A_1), \sigma(A_2), \ldots, \sigma(A_p)\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}, \tag{2.4}$$

не превосходит $(3l!)^{p/2}$.

Доказательство. Сначала мы предположим, что набор $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\} \in \mathfrak{D}^*_{l,p}$ связен. Используя связность, можно задавать новую нумерацию $B_1, B_2, \ldots, B_p$ элементов $\mathcal{A}$ так, что

$$B_{k+1} \cap \left(\cup_{j=1}^{k} B_j\right) \neq \varnothing, \quad k = 1, 2 \ldots, p-1.$$

Далее обозначим

$$B_1^* = B_1, \quad B_k^* = B_k \setminus \cup_{j=1}^{k-1} B_j, \quad k \geq 2,$$
$$l_k = \#(B_k^*).$$

Возможно некоторые l_k могут быть нулями и, очевидно, имеем

$$\sum_{k=1}^{p} l_k = pl/2.$$

Пусть σ есть случайным образом выбранная перестановка, удовлетворяющая (2.4). Заметим, что ее можно реализовать на B_1 не больше чем $p \cdot (l)!$ разными способами. Действительно, для σ-образа B_1 имеем p разных возможностей, так как по (2.4) он может совпадать с одним из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Определив образ B_1, σ над элементами B_1 можно реализовать $l!$ разными способами. Таким образом, мы получим не больше чем $p \cdot (l)!$ разных реализаций σ на B_1. По индукции предположим, что σ уже определена на $\cup_{k=1}^m B_k$. Тогда нам сначала надо определить σ-образ B_{m+1} равный одному из элементов $\mathcal{A}$, а затем значения σ над элементами множества $B_{m+1} \cap (\cup_{k=1}^m B_k)$. Поэтому для завершения определения σ на B_{m+1} остается только реализовать σ на B^*_{m+1}, для которого мы имеем не более чем $(l_{m+1})!$ разных возможностей. Отсюда мы заключаем, что количество всевозможных реализаций σ удовлетворяющий (2.4) в целом не превосходит

$$p \cdot \prod_{k=1}^{p} (l_k)! \le p \cdot (l!)^{p/2}, \tag{2.5}$$

и нам только остается показать последнее неравенство. Для этого мы будем последовательно использовать факт, что любое произведение $t!s!$ с $0 \le s \le t \le l$ не превосходит $u!v!$, где $0 \le u \le v \le l$, $u + v = t + s$ и одно из u или v равно 0 или l. Если p четное число, то применив упомянутое замечание, можно усмотреть, что левая часть (2.5) достигает своего наибольшего значения когда каждый из l_k равно 0 или l. Таким образом мы будем иметь $l!$ в количестве $p/2$ и $0! = 1$ в количестве $p/2$. Итак мы получим (2.5). Если p–нечетное число, тогда l-четное, то своего наибольшего значения (2.5) достигает, если мы имеем $l!$ в количестве $(p-1)/2$, в количестве $(p-1)/2$ имеем $0!$ и единственное $(l/2)!$. Отсюда мы снова получаем

$$p \cdot \prod_{k=1}^{p} (l_k)! \le p(l!)^{(p-1)/2}(l/2)! \le p \cdot (l!)^{p/2}.$$

Теперь предположим, что $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_s\}$ общий набор множеств, где $\mathcal{A}_k$ есть классы связностей для $\mathcal{A}$. По определению все E-классы $[\mathcal{A}_k]$ разные. Отсюда любая перестановка σ, удовлетворяющая (2.4) действует внутри каждого компонента связности $\mathcal{A}_k$, т.е. $\sigma(\mathcal{A}_k) = \mathcal{A}_k$. Мы также имеем $\#(\mathcal{A}_k) = p_k \ge 2$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p$. Отсюда, применив оценку (2.5) над каждым компонентом связности, получим следующую верхнюю оценку для количества таких перестановок (2.4). А именно,

$$\prod_{k=1}^{n} p_k (l!)^{p_k/2} = (l!)^{p/2} \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

С другой стороны, применив неравенство Коши, мы получим

$$\prod_{k=1}^{n} p_k \le \left(\frac{\sum_{k=1}^n p_k}{n} \right)^n = \left(\frac{p}{n} \right)^n.$$

Так как $1 \le n \le p/2$ и функция $(p/x)^x$ принимает свое максимальное значение $(0, p/2]$ при $x = p/e$, мы заключаем $\left(\frac{p}{n}\right)^n \le e^{p/e} \le 3^{p/2}$. Отсюда получаем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} p_k (l!)^{p_k/2} \le (3l!)^{p/2},$$

которое завершает доказательство леммы. □

Замечание 2.1. *В дальнейшем для $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_p\} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$ обозначение $[\mathcal{A}]$ будет означать E-классы $\mathcal{A}$ которые находятся в $\mathcal{D}^*_{l,p}$. Напомним, что если $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_p\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_p\} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$ изоморфны, то существует перестановка $\sigma \in \pi_{pl/2}$, такая, что*

$$\{\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_p)\} = \{B_1, \dots, B_p\}.$$

Отсюда вытекает $\#[\mathcal{A}] \le (pl/2)!$ для всех $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{l,p}$. Кроме того, применив Лемму 2.2, для $\mathcal{A} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$(стандарт) имеем $\#[\mathcal{A}] \ge (pl/2)!/(3l!)^{p/2}$.

Пусть $p, l \ge 2$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{l,p}$. Набор множеств $\mathcal{A}' = \{A_1, A_2, \dots, A_r\} \subset \mathcal{A}$, $1 \le r \le p$, назовем X-звеном в $\mathcal{A}$, если

$$r \text{ четно и}$$
$$\#(A_k \cap A_{k+1}) = \begin{cases} l-1 & \text{если} \quad k \text{ нечетно}, \\ 1 & \text{если} \quad k \text{ четно}, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \dots, r-1$. Скажем, что $\mathcal{A}'$ есть Y-звено, если

$$l \text{ четно и}$$
$$\#(A_k \cap A_{k+1}) = l/2, \quad k = 1, 2, \dots, r-1.$$

Если l четно, то каждый одноэлементный набор множеств $\mathcal{A}' = \{A\}$ рассматривается как Y-звено.

Лемма 2.3. *Пусть $p, l \ge 2$, $1 \le r \le p$ целые числа и $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{l,p}$. Тогда существуют не более чем p разных X-звеньев (Y-звеньев) в $\mathcal{A}$ с длинами r.*

Доказательство. Рассмотрим все максимальные X-звенья (Y-звенья) $\mathcal{A}$. Очевидно они не имеют общих множеств в наборе $\mathcal{A}$. Любое X-звено (Y-звено) с длиной r должно содержаться в одном из максимальных звеньев. Из всего этого легко вытекает, что количество X-звеньев (Y-звеньев) в $\mathcal{A}$ с длинами r не превосходит p. □

Лемма 2.4. *Пусть $p > q \geq 2$ и $l \geq 2$–целые числа, такие, что оба числа pl и ql четные. Тогда существует отображение*

$$\phi : \mathcal{D}_{l,q}(\textit{связные}) \to \mathcal{D}_{l,p}(\textit{связные}),$$

удовлетворяющее $\#(\phi^{-1}(\mathcal{B})) \leq p$ для всех $\mathcal{B} \in \mathcal{D}_{l,p}(\textit{связные})$.

Доказательство. Сначала предположим, что l нечетно и поэтому $p - q$ четно. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_q\} \in \mathcal{D}_{l,q}$(связные). Выберем $a \in A_q$ и $b \in \mathbb{N}_{pl/2} \setminus \cup_{k=1}^{q} A_k$ произвольным образом и определим

$$\bar{A}_q = (A_q \setminus \{a\}) \cup \{b\}.$$

Так как $p-q$ четно, можно определить X-звенья $\{A_{q+1}, \ldots, A_p\}$ так, что $a \in A_{q+1}$, $b \in A_p$ и

$$\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, \bar{A}_q, A_{q+1}, \ldots, A_p\} \in \mathcal{D}_{l,p}(\text{связные}). \tag{2.6}$$

Далее определим $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Возможно, что $\mathcal{B}$ может быть образом разных двойных покрытий из $\mathcal{D}_{l,q}$(связные). Можно усмотреть, что количество таких двойных покрытий не может превосходить количеству X-звеньев в $\mathcal{B}$ с длинами $p-q$. Поэтому благодаря Лемме 2.3 мы всегда будем иметь $\#(\phi^{-1}(\mathcal{B})) \leq p$.

В случае четного l мы рассуждаем аналогичным образом. А именно, выберем произвольные подмножества $A \subset A_q$ и $B \subset \mathbb{N}_{pl/2} \setminus \cup_{k=1}^{q} A_k$ с $\#(A) = \#(B) = l/2$ и определим

$$\bar{A}_q = (A_q \setminus A) \cup B.$$

Потом определим $l/2$-звеньев $\{A_{q+1}, \ldots, A_p\}$ с $A \subset A_{q+1}$, $B \subset A_p$ удовлетворяющие (2.6). Остальная часть доказательства аналогична предыдущему случаю. $\square$

Доказательство Теоремы 1.2. Можно предполагать, что $l > 2$. Для доказательства левого неравенства в (1.4), сначала покажем

$$\mu_{l,p}(\text{полный}) \gtrsim p^{p(l/2-1)}. \tag{2.7}$$

Для любого $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{l,p}$(полный) имеем $\#[\mathcal{A}] \leq (pl/2)!$ (см. Замечание 2.1). Поэтому, используя также Лемму 2.1, получаем

$$\mu_{l,p}(\text{полный}) \geq \frac{\#(\mathcal{D}_{l,p}(\text{полный}))}{(pl/2)!} \gtrsim \frac{p^{p(l-1)}}{(pl/2)!} \gtrsim p^{p(l/2-1)}.$$

Остается доказать

$$\mu_{l,p}(\text{полный}) = \#[\mathcal{D}_{l,p}(\text{полный})] \lesssim \#[\mathcal{D}_{l,p}(\text{стандарт})]. \tag{2.8}$$

Пусть $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_s\} \in \mathcal{D}_{l,p}$(полный), где $\mathcal{A}_k$–компоненты связности $\mathcal{A}$, причем некоторые из них могут быть изоморными. Если некоторая группа компонентов изоморфны, то мы удаляем все компоненты этой группы кроме одного. Применив эту процедуру над всеми группами изоморфных компонентов, мы получим стандартное двойное покрытие $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$ с меньшим количеством копонент связности что имеет $\mathcal{A}$. Назовем новое двойное покрытие $\mathcal{B}$ ϕ-преобразованием $\mathcal{A}$. Оно однозначно определяется с точностью до изоморфизма. Заметим, что $\mathcal{B}$ может быть ϕ-преобразованием не больше чем $p \cdot 2^p$ изоморфно разных элементов $\mathcal{D}_{l,p}$(non-стандарт), а именно,

$$\#[\phi^{-1}(\mathcal{B})] \leq p \cdot 2^p. \tag{2.9}$$

Действительно, пусть $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$ есть ϕ-преобразованием $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{l,p}$ (не - стандарт). По определению ϕ-преобразования, двойное покрытие $\mathcal{A}$ состоит из связных компонентов которые изоморфны одному из связных компонент $\mathcal{B}$. Предположим, что $\mathcal{A}$ имеет p_k компонент изоморфных $\mathcal{B}_k$. Очевидно имеем $p_1 + \ldots + p_m \leq p$. Можно проверить, что количество всевозможных упорядоченных наборов $(p_1, \ldots, p_m)$ натуральных чисел, удовлетворяющих этому неравенству не первосходит $p \cdot 2^p$. Отсюда вытекает (2.9).

Применим еще одно преобразование над $\mathcal{B}$ следующим образом. Выберем связную компоненту $\mathcal{B}$ имеющую максимальное количество элементов. Предположим, что это есть $\mathcal{B}_1$. Применив Лемму 2.4, мы можем заменить $\mathcal{B}_1$ через более широкое связное двойное покрытие $\mathcal{B}'_1$ таким, что $\mathcal{B}' = \{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_2 \ldots, \mathcal{B}_m\} \in \mathcal{D}_{l,p}$(стандарт) и $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_2 \ldots, \mathcal{B}_m$ являются связными компонентами $\mathcal{B}'$. Назовем $\mathcal{B}'$ ψ-преобразованием для $\mathcal{B}$. По Лемме 2.4, можно усмотреть, что $\mathcal{B}'$ может быть ψ-преобразованием не больше чем p двойных покрытий. Отсюда, применив также (2.9), суперпозиция $\tau = \psi \circ \phi$ определяет отображение из $\mathcal{D}_{l,p}$(полный) в $\mathcal{D}_{l,p}$(стандарт) такое, что $\#[\tau^{-1}(\mathcal{B}')] \leq p^2 \cdot 2^p$. Это доказывает

$$\#[\mathcal{D}_{l,p}(\text{полный})] \leq p^2 2^p \#[\mathcal{D}_{l,p}(\text{стандарт})]$$

что дает (2.8). Комбинируя также (2.7), отсюда мы поучаем неравенство (1.4).

Для доказательства правого неравенства в (1.4), напомним (см. Замечание 2.1), что для любого $\mathcal{A} \in \mathcal{D}^*_{l,p}$(связные) имеем $\#[\mathcal{A}] \geq (pl/2)!/(3l!)^{p/2}$. Отсюда, применив Лемму 2.1, мы заключаем

$$\#[\mathcal{D}^*_{l,p}(\text{связные})] \leq \frac{(3l!)^{p/2} \cdot \#(\mathcal{D}^*_{l,p}(\text{связные}))}{(pl/2)!} \leq (d(l))^p (p!)^{l/2-1}, \tag{2.10}$$

где $d(l)$–постоянная, зависящая от l и мы можем предполагать

$$d(l) > \max_{2\le p\le 100} \#[\mathcal{D}^*_{l,p}(\text{полный})]. \tag{2.11}$$

Применив индукцию по p докажем, что

$$\#[\mathcal{D}^*_{l,p}(\text{полный})] \le 2(d(l))^p (p!)^{l/2-1}. \tag{2.12}$$

По (2.11) оно имеет место при $2 \le p \le 100$, поэтому достатачно рассматривать случай $p > 100$. Итак, предположим $q > 100$ и что мы уже доказывали неравенство для всех $p < q$. Чтобы доказать его для q оценим количество связных и несвязных двойных покрытий отдельно. Для связных компонент имеем оценку (2.10). Тогда, применив индуктивное предположение, получим

$$\begin{aligned}\#[\mathcal{D}^*_{l,q}(\text{не-связные})] &\le \sum_{2\le k\le q/2} [\mathcal{D}^*_{l,k}(\text{полный})]\cdot[\mathcal{D}^*_{l,q-k}(\text{полный})]\\ &\le 4(d(l))^q \sum_{2\le k\le q/2} (k!(q-k)!)^{l/2-1}.\end{aligned}$$

Очевидно имеем $k!(q-k)! \le 6(q-3)!$ if $3 \le k \le q/2$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}&[\mathcal{D}^*_{l,q}(\text{не-связные})]\\ &\qquad\le 4(d(l))^q\left((2(q-2)!)^{l/2-1} + \sum_{3\le k\le q/2}(k!(q-k)!)^{l/2-1}\right)\\ &\qquad\le 4(d(l))^q\left((2(q-2)!)^{l/2-1} + \frac{q}{2}\cdot(6(q-3)!)^{l/2-1}\right)\\ &\qquad\le (d(l))^q (q!)^{l/2-1}, \qquad (2.13)\end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из $q > 100$ и $l \ge 3$. Из (2.10) и (2.13) получим (2.12) для $p = q$. Это завершает доказательство теоремы. □

3. Доказательство Теоремы 1.3

Вместе с оценкой (1.4), нам также понадобятся еще две леммы. Первая есть обобщение неравенства Коши-Шварца, которое имеет сомостоятельный интерес. Пусть $G = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ есть некоторое множество переменных. Назовем G-последовательность числовую последовательность $b_G = b_{j_1,\dots,j_n}$ с конечным носителем, где переменные j_k независимо принимают натуральные значения. Обозначим

$$\sum_G{}' \, b_G = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_n\in G} b_{j_1,j_2,\dots,j_n}.$$

Лемма 3.1. *Пусть I_k, $k = 1, 2, \dots, p$, есть множество переменных, таких, что $\{I_1, \dots, I_p\}$ образует четное покрытие и пусть $G = \cup_{j=1}^{p} I_j$. Тогда для любых положительных числовых I_k-последовательностей $a_{I_k}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, p$ имеем*

$$\sum_{G}{}' a_{I_1}^{(1)} \dots a_{I_p}^{(p)} \le \prod_{k=1}^{p} \left(\sum_{I_k}{}' \left(a_{I_k}^{(k)} \right)^2 \right)^{1/2}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Сначала предположим, что $\{I_1, \dots, I_p\}$–двойное покрытие. Применим индукцию относительно $n = \#(G)$. Если $n = 1$, то (3.1) дает классическое неравенство Коши-Шварца. Предположим, что неравенство имеет место для всех $n < m$ и докажем ее для $n = m$. Итак предположим $\#(G) = m$ и пусть множество переменных $I_k \subset G$, $k = 1, 2, \dots, p$, составляют двойное покрытие и $G = \cup_k I_k$. Предположим, что два из этих множеств, скажем I_1 и I_2, имеют непустое пересечение, $I_1 \cap I_2 \ne \varnothing$. По условию двойного покрытия имеем $I_j \cap (I_1 \cap I_2) = \varnothing$ для всех $j \ge 3$. Отсюда, используя неравенство Коши-Шварца, получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{G}{}' a_{I_1}^{(1)} \dots a_{I_p}^{(p)} \\
&\quad = \sum_{G \setminus (I_1 \cap I_2)}{}' a_{I_3}^{(3)} \dots a_{I_p}^{(p)} \sum_{I_1 \cap I_2}{}' a_{I_1}^{(1)} a_{I_2}^{(2)} \\
&\quad \le \sum_{G \setminus (I_1 \cap I_2)}{}' a_{I_3}^{(3)} \dots a_{I_p}^{(p)} \left(\sum_{I_1 \cap I_2}{}' |a_{I_1}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{I_1 \cap I_2}{}' |a_{I_2}^{(2)}|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad = \sum_{G \setminus (I_1 \cap I_2)}{}' a'_{I_1 \setminus I_2} \cdot a''_{I_2 \setminus I_1} \cdot a_{I_3}^{(3)} \dots a_{I_p}^{(p)},
\end{aligned}$$

где

$$a'_{I_1 \setminus I_2} = \left(\sum_{I_1 \cap I_2}{}' |a_{I_1}^{(1)}|^2 \right)^{1/2}, \quad a''_{I_2 \setminus I_1} = \left(\sum_{I_1 \cap I_2}{}' |a_{I_2}^{(2)}|^2 \right)^{1/2}.$$

Заметим, что $\{I_1 \setminus I_2, I_2 \setminus I_1, I_3, \dots, I_p\}$ есть двойное покрытие, базис которого есть $G' = G \setminus (I_1 \cap I_2)$ и $\#(G') < m$. Отсюда, используя индуктивное предположение и обозначение, мы получим

$$\sum_{G\setminus(I_1\cap I_2)}{}' a'_{I_1\setminus I_2}\cdot a''_{I_2\setminus I_1}\cdot a^{(3)}_{I_3}\dots a^{(p)}_{I_p}$$
$$\le\left(\sum_{I_1\setminus I_2}{}' |a'_{I_1\setminus I_2}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{I_2\setminus I_1}{}' |a''_{I_2\setminus I_1}|^2\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\sum_{I_3}{}' |a^{(3)}_{I_3}|^2\right)^{1/2}\dots\left(\sum_{I_p}{}' |a^{(p)}_{I_p}|^2\right)^{1/2}=\prod_{k=1}^{p}\left(\sum_{I_k}{}' |a^{(k)}_{I_k}|^2\right)^{1/2}.$$

Теперь предположим, что $\{I_1,\dots,I_p\}$–произвольное четное покрытие множества переменных и четыре среди них I_1, I_2, I_3, I_4 имеют общий элемент k. Выберем произвольную переменную $k'\notin\cup_{j=1}^{p}I_j$ и заменим множества I_1 и I_2 соответственно на $\tilde I_1=(I_1\setminus\{k\})\cup\{k'\}$ и $\tilde I_2=(I_2\setminus\{k\})\cup\{k'\}$. Легко проверить, что

$$\sum_{G}{}' a^{(1)}_{I_1}a^{(2)}_{I_1}a^{(3)}_{I_3}\dots a^{(p)}_{I_p}\le\sum_{G\cup\{k'\}}{}' a^{(1)}_{\tilde I_1}a^{(2)}_{\tilde I_2}a^{(3)}_{I_3}\dots a^{(p)}_{I_p},$$

так как первая сумма является частью второй суммы. Применив эту процедуру последовательно, в конце концов мы получим доминантную сумму с набором множеств двойного покрытия. Общий случай сводится к случаю двойного покрытия. □

Лемма 3.2. *Если $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\dots,A_p\}$ есть четное покрытие, то существует двойное покрытие $\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\dots,B_p\}$ и сюрективное отображение*

$$\phi:\bigcup_{k=1}^{p}B_k\to\bigcup_{k=1}^{p}A_k$$

такое, что $\phi(B_k)=A_k$, $k=1,2,\dots,p$.

Доказательство. Определим $\mathcal{B}$ по индукции, "преобразуя" множества $\mathcal{A}$ следующим образом. Предположим, что существуют четыре множества из $\mathcal{A}$, скажем A_1, A_2, A_3, A_4, имеющие общую точку a. Выберем произвольную точку $b\notin\cup_{j=1}^{p}A_j$, и заменим множества A_1 и A_2 на $(A_1\setminus\{a\})\cup\{b\}$ и на $(A_2\setminus\{a\})\cup\{b\}$ соответственно. Тогда будем говорить, что b порожден из a. Применив эту процедуру последовательно, в конце концов $\mathcal{A}$ преобразуется на двойное покрытие $\mathcal{B}$. Для $a\in\cup_k A_k$ обозначим $[a]$ объединение a со всеми точками $\cup_k B_k$ которые пораждены от a. Определим отображение ϕ, сопоставив каждой точки $b\in\cup_k B_k$ точку a если $b\in[a]$. Очевидно оно удовлетворяет требованиям леммы. □

Определим виртуальную функцию $\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, где a_k могут быть целыми числами или множествами. Если все a_k разные, то $\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_p) = p!$. В противном случае группируя равные элементы вместе, мы можем разделить набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ на группы из p_k элементов, такое, что $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = p$. В этом случае мы определим

$$\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_p) = \frac{p!}{(p_1)!(p_2)!\ldots(p_m)!}. \tag{3.2}$$

Заметим, что если $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_p\}$ есть двойное покрытие, что

$$\gamma(A_1, A_2, \ldots, A_p) \geq \frac{p!}{2^p}, \tag{3.3}$$

так как не более чем два множества из $\mathcal{A}$ могут быть равными. Вот другое хорошо известное применение функции γ в полиномиальной формуле

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p = \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_p \leq n} \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_p) x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_p}. \tag{3.4}$$

Доказательство Теоремы 1.1. Сначала мы докажем правое неравенство в (1.4). Пусть $\{b_A : A \in \mathcal{Z}_l\}$ есть последовательность с конечным носителем. Используя (3.4), получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A \right)^p \\
&\quad = \sum_{A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{Z}_l} \gamma(A_1, \ldots, A_p) b_{A_1} \ldots b_{A_p} \int_0^1 w_{A_1} \ldots w_{A_p}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Заметим, что если набор множеств $\{A_1, \ldots, A_p\}$ не является двойным покрытием, то интеграл в (3.5) равен нулю, а в противном случае 1. Отсюда мы заключаем

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A \right)^p &= \sum_{\substack{A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{A}_l \\ \{A_1, \ldots, A_p\} \text{ четно}}} \gamma(A_1, A_2, \ldots, A_p) b_{A_1} \ldots b_{A_p} \\
&\leq \sum_{\substack{A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{A}_l \\ \{A_1, \ldots, A_p\} \text{ четно}}} \gamma(A_1, A_2, \ldots, A_p) |b_{A_1} \ldots b_{A_p}|.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Мы определим $b_{j_1, j_2, \ldots, j_l} = 0$ если по меньшей мере двое из j_k равны. Заметим, что любой член $|b_{A_1} \ldots b_{A_p}|$ с четным покрытием $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_p\}$ встречается по меньшей мере один раз в штрих-сумме

$$\sum_{\cup_{j=1}^p I_j}{}' |b_{I_1} \ldots b_{I_p}|, \tag{3.7}$$

где набор переменных $I = \{I_1, \dots, I_p\}$ образует двойное покрытие с $\#(I_k) = l$. Действительно, предположим, что $\{A_1, \dots, A_p\}$ является четным покрытием натуральных чисел. По Лемме 3.2 существует двойное покрытие переменных $\{I_1, \dots, I_p\}$ и сюръективное отображение

$$\phi : \bigcup_{k=1}^{p} I_k \to \bigcup_{k=1}^{p} A_k$$

такие, что $\phi(I_k) = A_k$. Таким образом, если мы сопоставим любому переменному $j \in \cup_k I_k$ в $|b_{I_1} \dots b_{I_p}|$ величину $\phi(j) \in \mathbb{N}$, мы получим член $|b_{A_1} \dots b_{A_p}|$ в (3.7). Это замечание и (3.2) дает нам

$$\sum_{\substack{A_1,\dots,A_p \in \mathcal{A}_l \\ \{A_1,\dots,A_p\} \text{ is even}}} \gamma(A_1, \dots, A_p)|b_{A_1} \dots b_{A_p}| \le p! \sum_{[I_1,\dots,I_p]} \sideset{}{'}\sum_{\cup_{j=1}^{p} I_j} |b_{I_1} \dots b_{I_p}|, \tag{3.8}$$

где первое суммирование берется по всем изометрично разным двойным покрытиям из переменных $\{I_1, \dots, I_p\}$ с $\#(I_k) = l$. Напомним, что количество таких двойных покрытий равно $\mu_{l,p}$(полный). С другой стороны, применив Лемму 3.1 с последовательностями $a^{(k)}_{I_k} = b_{I_k}$, $k = 1, 2, \dots, p$, получим

$$\sideset{}{'}\sum_{\cup_{j=1}^{p} I_j} |b_{I_1} \dots b_{I_p}| \le \left(\sideset{}{'}\sum_{I_1} (b_{I_1})^2 \right)^{p/2} = \left(l! \sum_{A \in \mathcal{Z}_l} (b_A)^2 \right)^{p/2}. \tag{3.9}$$

Отсюда, комбинируя (3.6), (3.8) и (3.9), следует неравенство

$$\left\| \sum_{A \in \mathcal{Z}_l} b_A w_A \right\|_p \le \sqrt{l!} \cdot (p! \mu_{l,p}(\text{полный}))^{1/p} \left(\sum_{I \in \mathcal{Z}_l} |b_I|^2 \right)^{1/2},$$

которое есть правое неравенство в (1.6). Для доказательства левой оценки рассмотрим конечную сумму

$$\sum_{A \in \mathcal{Z}_l(m)} w_A, \tag{3.10}$$

где

$$\mathcal{Z}_l(m) = \{A \subset \mathbb{N}_m = \{1, 2, \dots, m\} : \#(A) = l\} \subset \mathcal{Z}_l.$$

Имеем,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\sum_{A\in\mathcal{Z}_l(m)} w_A\right)^p \\
&\quad= \sum_{A_1,\dots,A_p\in\mathcal{Z}_l(m)} \gamma(A_1,A_2,\dots,A_p)\int_0^1 w_{A_1}w_{A_2}\dots w_{A_p} \\
&\quad= \sum_{\substack{A_1,\dots,A_p\in\mathcal{Z}_l(m)\\ \{A_1,\dots,A_p\}\ \text{четно}}} \gamma(A_1,A_2,\dots,A_p) \\
&\quad\geq \sum_{\substack{A_1,\dots,A_p\in\mathcal{Z}_l(m)\\ \{A_1,\dots,A_p\}\ \text{стандартное двойное покрытие}}} \gamma(A_1,A_2,\dots,A_p). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{I}=\{I_1,\dots,I_p\}$ есть стандартное двойное покрытие переменных так, что $\#(I_k)=l$. Реализуя переменные $\cup_{j=1}^p I_k$ над $\mathbb{N}_m$ независимо, набор $\mathcal{I}$ порождает все стандартные двойные покрытия $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_p\}$ с $A_k\in\mathcal{Z}_l(m)$ которые изоморфны $\mathcal{I}$. По Лемме 2.2, любое такое $\mathcal{A}$ может встретиться в этой реализации не больше чем $(3l!)^{p/2}$ раз. Отсюда, применив (3.3) и продолжив оценку (3.11), получаем

$$\int_0^1 \left(\sum_{A\in\mathcal{Z}_l(m)} w_A\right)^p \geq \frac{1}{(3l!)^{p/2}}\sum_{[I_1,\dots,I_p]}\ {\sum_{\cup_{j=1}^p I_j\subset\mathbb{N}_m}}' \gamma(I_1,I_2,\dots,I_p) \qquad (3.12)$$

$$\geq \frac{p!}{2^p(3l!)^{p/2}}\cdot\mu_{l,p}(\text{стандарт})A_m^{pl/2}, \qquad (3.13)$$

где первая сумма берется по всем изоморфно разным стандартым двойным покрытиям из переменных так, что $\#(I_k)=l$. Величина $\mu_{l,p}(\text{стандарт})$ в (3.13) есть количество таких покрытий, а

$$A_m^{pl/2}=m(m-1)\dots(m-pl/2+1)$$

есть количество членов во второй сумме (3.12). l^2-норма коэффициентов суммы (3.10) точно равна $\binom{m}{l}^{1/2}$ и имеем

$$\frac{\left\|\sum_{A\in\mathcal{Z}_l(m)} w_A\right\|_p}{\binom{m}{l}^{1/2}} \geq \frac{\left(p!\cdot\mu_{l,p}(\text{стандарт})A_m^{pl/2}\right)^{1/p}}{2\sqrt{3l!}\cdot\binom{m}{l}^{1/2}} \to \frac{(p!\mu_{l,p}(\text{стандарт}))^{1/p}}{2\sqrt{3}}$$

при $m\to\infty$. Это и дает левое неравенство (1.6). □

4. Нерешенные проблемы

В этом параграфе будем сформулировать некоторые нерешенные проблемы, которые интересны с комбинаторной точки зрения. Рассмотрим величины

$$d(l) = \sup_{p\ge 2} \frac{(\mu_{l,p}(\text{полный}))^{1/p}}{p^{l/2-1}},$$

$$g(l) = \sup_{p\ge 2} \frac{\sup_{\|b\|\le 1} \left\|\sum_{A\in\mathcal{Z}_l} b_A w_A\right\|_p}{p^{l/2}},$$

где первая из них имеет чисто комбинаторное значение, а вторая характеризует точную постоянную Хинчина в (1.7). Из (1.7) и (1.4) следует $d(l) < \infty$ и $g(l) < \infty$ для всех $l \ge 2$. Детальное рассмотрение доказательств дает оценку $d(l) \le c2^{l/2}$ с абсолютной постоянной $c > 0$. Используя Утверждение 1.1, мы также можем утверждать, что $g(l) \le c\sqrt{2^l \cdot l!}$. Применив стандартный аргумент, из неравенства Бонами-Киенера (1.7) можно вывести оценку

$$\left\|\sum_{A\in\mathcal{Z}_l} b_A w_A\right\|_p \le C_{p,q,l}\left\|\sum_{A\in\mathcal{Z}_l} b_A w_A\right\|_q, \tag{4.1}$$

для любой Радемахер хаос суммы, где $1 \le q < p < \infty$. В отличие от классического случая (когда $l = 1$), настолько нам известно, величина оптимальной постоянной, которая может быть в (4.1), неизвестно для всяких комбинаций параметров $p > q$. Некоторые оценки оптимальной постоянной в (4.1) можно найти в работах [13–16].

Задача 1. *Найти точные величины $d(l)$ и $g(l)$.*

Из Леммы 2.4 следует. что если $p > q$, а pl и ql четные, то

$$\#(\mathcal{D}_{l,q}(\text{связные})) \le p \cdot \#(\mathcal{D}_{l,p}(\text{связные})).$$

Нам неизвестно можно ли множитель p в правой стороне этого неравенства убрать при $l > 2$. Более того,

Задача 2. *Пусть $l > 2$. Доказать, что для любых $p > q$ где pl и ql четные, имеем следующую оценку*

$$\#(\mathcal{D}_{l,q}(\textit{связные})) \le \#(\mathcal{D}_{l,p}(\textit{связные})),$$

$$\#(\mathcal{D}_{l,q}(\textit{полный})) \le \#(\mathcal{D}_{l,p}(\textit{полный})).$$

Задача 3. *Пусть $l > 2$. Доказать, что если $p > q$, а pl и ql четные, то $\mu_{l,q}(\textit{полный}) \le \mu_{l,p}(\textit{полный})$ и $\mu_{l,q}(\textit{связные}) \le \mu_{l,p}(\textit{связные})$.*

Как было намечено во введении $\mu_{l,p} = \#([\mathcal{D}_{l,p}(\text{полный})])$ есть количество p-вершинных мультиграфов с l-степенными вершинами. Можно проверить, что $\#(\mathcal{D}_{l,p}(\text{полный}))$ есть количество того же типа маркированных графов $\#([\mathcal{D}_{l,p}$ (полный)]). Соотношения (1.4) и (2.1) дают неполную характеризацию для асимптотической характеристики этих двух величин.

Задача 4. *Для $l > 2$ доказать, что пределы*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(\#([\mathcal{D}_{l,p}(\textit{полный})]))^{1/p}}{p^{l/2-1}} \ \textit{и} \ \lim_{p\to\infty} \frac{(\#(\mathcal{D}_{l,p}(\textit{полный})))^{1/p}}{p^{l-1}}$$

существуют и найти их величины.

Abstract. A collection of finite sets $\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ is said to be a double-covering if each $a \in \cup_{k=1}^{p} A_k$ is included in exactly two sets of the collection. For fixed integers l and p, let $\mu_{l,p}$ be the number of equivalency classes of double-coverings with $\#(A_k) = l$, $k = 1, 2, \dots, p$. We characterize the asymptotic behavior of the quantity $\mu_{l,p}$ as $p \to \infty$. The results are applied to give an alternative approach to the Bonami-Kiener hypercontraction inequality.

Список литературы

[1] A. Bonami, “Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$”, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **20**, no. 2, 335 – 402 (1971).

[2] K. Kiener, “Über Produkte von quadratisch integrierbaren Funktionenendlicher Vielfalt”, Dissertation, Universität Innsbruck (1969).

[3] G. E. Andrews, The Theory of Partitions, Cambridge Mathematical Library, Reprint of the 1976 original, Cambridge University Press, Cambridge (1998)

[4] P. F. X. Müller, Isomorphisms Between H^1 Spaces, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne (New Series), **66**, publisher=Birkhäuser Verlag, Basel (2005).

[5] R. Blei, Analysis in Integer and Fractional Dimensions, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, **71** (2001).

[6] A. Khintchine, “Über dyadische Brüche”, Math. Z. Jour., **18**, no. 1, 109 – 116 (1923).

[7] J. E. Littlewood, “On bounded bilinear forms in an infinite number of variables”, Quart. J. Math. Oxford Ser., **1**, 164 – 174 (1930).

[8] R.E.A.C. Paley, A. Zygmund, “On some series of functions”, (1), Jour. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **26**, no. 3, 337 – 357 (1930).

[9] S. B. Stečkin, “On best lacunary systems of functions”, Jour. of Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **25**, 357 – 366 (1961).

[10] R. M. G. Young, “On the best possible constants in the Khintchine inequality”, J. London Math. Soc. (2), **14**, no. 3, 496 – 504 (1976).

[11] S. J. Szarek, “On the best constants in the Khinchin inequality”, Jour. Studia Math., **58**, no. 2, 197 – 208 (1976).

[12] U. Haagerup, “The best constants in the Khintchine inequality”, Studia Math. Jour., **70**, no. 3, 231 – 283 (1981).

[13] R. O’Donnell, Analysis of Boolean Functions, Cambridge University Press, New York (2014).

[14] S. Janson, Gaussian Hilbert Spaces, Cambridge Tracts in Mathematics, **129**, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[15] L. Larsson-Cohn, “L^p-norms of Hermite polynomials and an extremal problem on Wiener chaos”, Ark. Mat. Jour., **40**, no. 1, 133 – 144 (2002).
[16] P. Ivanisvili, T. Tkocz, “Comparison of moments of Rademacher chaoses”, Ark. Mat. Jour., **57**, no. 1, 121 – 128 (2019).

Поступила 09 января 2025

После доработки 29 января 2025

Принята к публикации 22 апреля 2025