Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 4, 2025, стр. 3 – 22.

$(\varepsilon, \mathcal{A})$-ЧИСЛОВОЙ РАДИУС ОПЕРАТОРОВ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ НЕРАВЕНСТВА

Н. АЛТВАЙЖРИ, С. С. ДРАГОМИР, К. ФЕКИ, Х. ЦЯО

Университет короля Сауда, Саудовская Аравия[1]
Университет Виктории, Мельбурн Сити, Виктория, Австралия
Университет Сфакса, Тунис
Педагогический университет Внутренней Монголии, Хух-Хото, Китай [2]
E-mails: *najla@ksu.edu.sa; sever.dragomir@ajmaa.org*
kais.feki@hotmail.com; qiaohw@imnu.edu.cn

Аннотация. Понятие взвешенного $\mathcal{A}$-числового радиуса, где $\mathcal{A}$ предполагается положительным оператором, было введено недавно. В данной работе мы вводим другой взвешенный $\mathcal{A}$-числовой радиус для операторов в полугильбертовых пространствах, обозначаемый через $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$. Мы устанавливаем некоторые свойства и неравенства для $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$, которые обобщают более ранние результаты для $\omega_{\mathcal{A}}(\cdot)$. В частности, мы выводим новые тождества для $\mathcal{A}$-числового радиуса и проводим дальнейшее сравнение между $\mathcal{A}$-числовым радиусом и операторной $\mathcal{A}$-полунормой взвешенных действительных и мнимых частей. Кроме того, мы используем неравенства типа Боаса-Беллмана в контексте полугильбертовых пространств для вывода верхних оценок для $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$. Также обсуждаются некоторые приложения.

MSC2020 numbers: 47A12; 47A63; 47B15; 47B65; 46C05.

Ключевые слова: взвешенный числовой радиус; $\mathcal{A}$-числовой радиус; полугильбертово пространство; неравенства типа Боаса-Беллмана; операторное неравенство.

1. Введение

Пусть $(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — комплексное гильбертово пространство, снабженное нормой $\|\cdot\|$, и пусть $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ обозначает C^*-алгебру всех ограниченных линейных операторов на $\mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})^+$ конус положительных операторов $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, то есть,

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{H})^+ = \left\{\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}) : \langle \mathcal{A}x, x\rangle \geq 0 \text{ для всех } x \in \mathfrak{H}\right\}.$$

[1]Первый автор выражает искреннюю благодарность за поддержку, полученную от Программы финансирования текущих исследований (ORF-2025-187) Университета короля Сауда, Эр-Рияд, Саудовская Аравия.

[2]Фонд естественных наук Внутренней Монголии, Номер вспомогательного проекта (2024QN01003), Проект Первокласные дисциплины, Автономный район Внутренняя Монголия, номер вспомогательного проекта (YLXKZX-NSD-017,YLXKZX-NSD-011), Педагогический университет Внутренней Монголии, Хух-Хото, Внутренняя Монголия.

Для линейного подпространства $\mathcal{M}$ его замыкание по норме $\mathfrak{H}$ обозначается через $\overline{\mathcal{M}}$. Ортогональную проекцию на $\overline{\mathcal{M}}$ обозначим через $P_{\overline{\mathcal{M}}}$.

В данной статье область значений оператора T обозначается через $\mathcal{R}(T)$, его нуль-пространство — через $\mathcal{N}(T)$, а сопряженное пространство — через T^*. Индуцированное полускалярное произведение на $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})^+$ определяется как:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}} : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathbb{C}, \qquad \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}x, y \rangle.$$

Пусть $\| \cdot \|_{\mathcal{A}}$ — полунорма, индуцированная в $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$, т.е. $\|x\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{A}}}$ для $x \in \mathfrak{H}$.

Для более подробной информации о $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ см. [1, 2].

Для произвольного $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ следующая величина

$$\|T\|_{\mathcal{A}} = \sup \left\{ \|Tx\|_{\mathcal{A}} : \|x\|_{\mathcal{A}} = 1 \right\},$$

может не быть конечной (см. [3]). Пусть $\mathfrak{L}^{A}(\mathfrak{H})$ — множество операторов $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, таких что $\|T\|_{\mathcal{A}} < \infty$. Здесь $\| \cdot \|_{\mathcal{A}}$ обозначает $\mathcal{A}$-операторную полунорму $\mathcal{A}$ в конусе $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})^+$. Можно проверить, что $\mathfrak{L}^{A}(\mathfrak{H})$ в общем случае не является подалгеброй $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Более того, для $T \in \mathfrak{L}^{A}(\mathfrak{H})$ имеем $\|T\|_{\mathcal{A}} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}T\mathcal{A} = 0$.

Пусть $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Оператор $R \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ называется $\mathcal{A}$-сопряжённым к T, если для $x, y \in \mathfrak{H}$, имеет место $\langle Tx, y \rangle_{\mathcal{A}} = \langle x, Ry \rangle_{\mathcal{A}}$, т.е. $\mathcal{A}R = T^*\mathcal{A}$. Следует отметить, что оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ может не иметь, иметь один или несколько $\mathcal{A}$-сопряжённых операторов. Обозначим через $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ множество всех операторов, допускающих $\mathcal{A}$-сопряжённые операторы. Теорема Дугласа в [4] показывает, что

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H}) = \left\{ T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}) : \mathcal{R}(T^*\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{A}) \right\}.$$

Отметим, что $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ является подалгеброй $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, и справедливы включения $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{L}^{\mathcal{A}}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Если $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, то уравнение $\mathcal{A}X = T^*\mathcal{A}$ всегда разрешимо, а его приведённое решение обозначается как $T^{\star_{\mathcal{A}}}$ (см. [5, 6]). Очевидно, $T^{\star_{\mathcal{A}}}$ является $\mathcal{A}$-сопряжённым оператором к T. Кроме того, справедливо следующее:

$$T^{\star_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}^{\dagger}T^*\mathcal{A}, \quad \mathcal{R}(T^{\star_{\mathcal{A}}}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}, \quad \text{и} \quad \mathcal{N}(T^{\star_{\mathcal{A}}}) = \mathcal{N}(T^*\mathcal{A}),$$

где $\mathcal{A}^{\dagger}$ — обратное уравнение Мура-Пенроуза для $\mathcal{A}$. Подробнее об обратном уравнении Мура-Пенроуза см. [7].

Легко проверить, что если $T, S \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, то $\|TS\|_{\mathcal{A}} \leq \|T\|_{\mathcal{A}}\|S\|_{\mathcal{A}}$ и $(TS)^{\star_{\mathcal{A}}} = S^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}$. Отметим, что если $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, то $T^{\star_{\mathcal{A}}} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, $(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} = P_{\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}}TP_{\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}}$,

$\left((T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}} = T^{\star_{\mathcal{A}}}$ и выполняется следующее равенство

$$\|T\|_{\mathcal{A}} = \sup\left\{|\langle Tx, y\rangle_{\mathcal{A}}| : x, y \in \mathfrak{H}, \|x\|_{\mathcal{A}} = \|y\|_{\mathcal{A}} = 1\right\}. \tag{1.1}$$

Оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ называется $\mathcal{A}$-положительным, если $\mathcal{A}T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})^+$, что мы записываем так: $T \geq_{\mathcal{A}} 0$. Оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ называется $\mathcal{A}$-самосопряженным, если $\mathcal{A}T$ самосопряженный, то есть $\mathcal{A}T = T^*\mathcal{A}$. Очевидно, что $\mathcal{A}$-положительный оператор всегда $\mathcal{A}$-самосопряженный, а $\mathcal{A}$-самосопряженный оператор всегда принадлежит $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$. Кроме того, $T^{\star_{\mathcal{A}}}T$ и $TT^{\star_{\mathcal{A}}}$ являются $\mathcal{A}$-положительными, и следовательно,

$$\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T\|_{\mathcal{A}} = \|TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A}}^2 = \|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}^2.$$

В [8] $\mathcal{A}$-числовой радиус для $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ определяется следующим образом:

$$\omega_{\mathcal{A}}(T) = \sup\left\{\left|\langle Tx, x\rangle_{\mathcal{A}}\right| : x \in \mathfrak{H},\ \|x\|_{\mathcal{A}} = 1\right\}.$$

Отметим, что соотношение $w_{\mathcal{A}}(T) = +\infty$ может выполняться для некоторых $T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, см. [3].

Более того, $\omega_{\mathcal{A}}(\cdot)$ является полунормой на $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ эквивалентной $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, т.е.

$$\frac{1}{2}\|T\|_{\mathcal{A}} \leq \omega_{\mathcal{A}}(T) \leq \|T\|_{\mathcal{A}}, \text{ для } T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H}). \tag{1.2}$$

Более того, известно, что если T является $\mathcal{A}$-самосопряженным, то $\omega_{\mathcal{A}}(T) = \|T\|_{\mathcal{A}}$. Доказательства и более подробную информацию о $\mathcal{A}$-числовом радиусе операторов см. в [8, 9]. Некоторые другие смежные вопросы можно найти в [10] - [23] и в [1].

Для $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ декартово разложение T имеет вид $T = \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)$, где $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) = \frac{T+T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}$ и $\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T) = \frac{T-T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2\mathrm{i}}$. Следует отметить тождество для $\mathcal{A}$-числового радиуса доказанное А. Замани в [9]:

$$\omega_{\mathcal{A}}(T) = \sup_{\phi \in \mathbb{R}} \left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)\right\|_{\mathcal{A}}. \tag{1.3}$$

В последние годы обобщение декартова разложения было введено и обобщено в [25, 24]. Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ и $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Взвешенные действительная и мнимая части T были недавно определены следующим образом:

$$\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \varepsilon T + (1-\varepsilon)\, T^{\star_{\mathcal{A}}} \quad \text{ и } \quad \mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = (1-\varepsilon)\,(\text{-i}T) + \varepsilon(\mathrm{i}T^{\star_{\mathcal{A}}}).$$

Это означает, что

$$\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) + \mathrm{i}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = (1-2\varepsilon)\, T^{\star_{\mathcal{A}}} + T.$$

Заметим, что при $\varepsilon=\frac{1}{2}$,

$$\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)=\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) \quad \text{и} \quad \mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)=\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T).$$

В [24] взвешенный $\mathcal{A}$-числовой радиус определён, как

$$\omega_{(\mathcal{A},\nu)}(T)=\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\|\mathfrak{R}_{(\nu,\mathcal{A})}(e^{\mathrm{i}\phi}T)\|_{\mathcal{A}}, \quad 0\leq\nu\leq 1.$$

Эта концепция обобщает уравнение (1.3) $\mathcal{A}$-числового радиуса, и его основные свойства исследуются в отмеченной работе.

Вслед за [25, 24], в данной статье мы вводим ещё один интересный взвешенный $\mathcal{A}$-числовой радиус. Это новое определение формулируется в терминах $\mathcal{A}$-числового радиуса. Кроме того, мы выводим неравенства для взвешенного $\mathcal{A}$-числового радиуса, которые обобщают и уточняют неравенства из (1.2).

2. Основные результаты

В этом разделе мы представляем наши основные результаты. Наша главная цель — обсудить свойства нового взвешенного $\mathcal{A}$-числового радиуса, а затем вывести дополнительные неравенства для числового радиуса. Начнём со следующего определения.

Определение 2.1. *Пусть $T\in\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ и пусть $0\leq\varepsilon\leq 1$. Взвешенный $(\varepsilon,\mathcal{A})$-числовой радиус T (или просто взвешенный $\mathcal{A}$-числовой радиус T) определяется следующим образом:*

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}\left(T\right)=\sup_{\substack{x\in\mathfrak{H}\\ \|x\|_{\mathcal{A}}=1}}\left|\left\langle\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T+\mathrm{i}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)x,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|=\omega_{\mathcal{A}}\left(\left(1-2\varepsilon\right)T^{\star_{\mathcal{A}}}+T\right).$$

Взвешенная операторная $\mathcal{A}$-полунорма T определяется следующим образом:

$$\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}=\sup_{\substack{x,y\in\mathfrak{H}\\ \|x\|_{\mathcal{A}}=\|y\|_{\mathcal{A}}=1}}\left|\left\langle\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T+\mathrm{i}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)x,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|=\left\|\left(1-2\varepsilon\right)T^{\star_{\mathcal{A}}}+T\right\|_{\mathcal{A}}.$$

Замечание 2.1. *Очевидно, что для $T\in\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$,*

$$\omega_{(\frac{1}{2},\mathcal{A})}\left(T\right)=\omega_{\mathcal{A}}(T), \quad \|T\|_{(\frac{1}{2},\mathcal{A})}=\|T\|_{\mathcal{A}} \quad \text{и} \quad \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}\left(T\right)\leq\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}.$$

Используя тождество (1.3), выводим следующее уравнение для $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}\left(T\right)$. Точнее, имеет место следующий результат.

Теорема 2.1. *Пуст $T\in\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$. Тогда, для любого $0\le\varepsilon\le 1$,*

$$\begin{aligned}\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)&=\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)+\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)\right\|_{\mathcal{A}}\\&=\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)-\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)\right\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Доказательство. Так как $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)=\omega_{\mathcal{A}}((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}}+T)$ для $0\le\varepsilon\le 1$, из равенства (1.3) следует,что

$$\begin{aligned}&\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)=\omega_{\mathcal{A}}((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}}+T)=\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}\left((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}}+T\right)\right)\right\|_{\mathcal{A}}\\&=\frac{1}{2}\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\|e^{\mathrm{i}\phi}\left((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}}+T\right)+e^{-\mathrm{i}\phi}\left((1-2\varepsilon)\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}}+T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right\|_{\mathcal{A}}\\&=\frac{1}{2}\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\|e^{\mathrm{i}\phi}\left((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}}+T\right)+e^{-\mathrm{i}\phi}\left((1-2\varepsilon)T+T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right\|_{\mathcal{A}}\\&=\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)+\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)\right\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Тогда заменив T на $\mathrm{i}T$, получим, что

$$\begin{aligned}\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)&=\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}(\mathrm{i}T)^{\star_{\mathcal{A}}}\right)+\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}(\mathrm{i}T)\right)\right\|_{\mathcal{A}}\\&=\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)-\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)\right\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Из теоремы 2.1, вытекает нижеследующее равенство.

Следствие 2.1. *Пусть $T\in\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$. Тогда, для любого $0\le\varepsilon\le 1$,*

$$\begin{aligned}&\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)\\&=\sup_{\eta^2+\nu^2=1}\left\|(1-2\varepsilon)\left(\eta\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)+\nu\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right)+\left(\eta\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\nu\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right)\right\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\phi\in\mathbb{R}$, $\eta=\cos\phi$ и $\nu=\sin\phi$. Тогда,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T\right)=\frac{e^{\mathrm{i}\phi}T+e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}=\frac{(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)\,T+(\cos\phi-\mathrm{i}\sin\phi)\,T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\\&=\cos\phi\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\sin\phi\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T).\end{aligned}$$

Заменив T на $T^{\star_{\mathcal{A}}}$, получим $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{\mathrm{i}\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)=\cos\phi\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)-\sin\phi\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)$. Беря супремум по $\phi\in\mathbb{R}$, получим требуемый результат. □

Для $T\in\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ хорошо известно, что $\omega_{\mathcal{A}}(T)=\omega_{\mathcal{A}}(T^{\star_{\mathcal{A}}})$. Аналогично, для $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$, имеет место следующее интересное свойство:

Утверждение 2.1. *Пусть $T\in\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ и $0\le\varepsilon\le 1$. Тогда*

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)=\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\quad\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}=\|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}.$$

Доказательство. Так как $\omega_{\mathcal{A}}(X) = \omega_{\mathcal{A}}(X^{\star_{\mathcal{A}}})$ для всех $X \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, для любого $0 \leq \varepsilon \leq 1$, будем иметь, что

$$\begin{aligned}
&\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T^{\star_{\mathcal{A}}}) = \omega_{\mathcal{A}}\left((1-2\varepsilon)(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} + T^{\star_{\mathcal{A}}}\right) = \omega_{\mathcal{A}}\left([(1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T]^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\\
&= \omega_{\mathcal{A}}((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T) = \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})} = \|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}$, что завершает доказательство. □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из определения $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$.

Утверждение 2.2. *Пусть $T, S \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, и пусть $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Тогда,*

(1) $\omega_{(0,\mathcal{A})}(T) = 2\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}, \quad \omega_{(1,\mathcal{A})}(T) = 2\|\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}$.
(2) $\dfrac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2} \leq \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \leq \|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}$.
(3) $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \leq 2\omega_{\mathcal{A}}(T)$.
(4) $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T+S) \leq \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) + \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(S)$.
(5) *Функция $f(\varepsilon) = \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$ выпукла на интервале* $[0,1]$.

В следующей части мы докажем некоторые неравенства для $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$.

Теорема 2.2. *Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$. Тогда, для любого $0 \leq \varepsilon \leq 1$,*

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq \frac{1}{2}\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})} + \Big|\, \|(1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \Big|.$$

В частности,

$$\omega_{\mathcal{A}}(T) \geq \frac{1}{2}\|T\|_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\Big|\, \|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \Big|.$$

Доказательство. Сначала отметим, что

$$\begin{aligned}
\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) &= \omega_{\mathcal{A}}((1-2\varepsilon)T^{\star_{\mathcal{A}}} + T)\\
&= \omega_{\mathcal{A}}((1-2\varepsilon)(\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)) + \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T))\\
&= 2\omega_{\mathcal{A}}((1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть $x \in H$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$. Тогда, согласно (2.1),

$$\begin{aligned}
\omega^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) =& 4\omega^2_{\mathcal{A}}((1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T))\\
\geq& 4|\langle(1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}} + \langle\varepsilon\mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2\\
=& 4\left(|\langle(1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2 + |\langle\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2\right)\\
\geq& 4|\langle(1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2.
\end{aligned}$$

Мы также имеем $\omega^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq 4|\langle\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|^2$, откуда вытекает, что $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq 2\max\{\|(1-\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}, \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\}$. Применив рассуждения, похожие на (2.1), будем иметь

$$\begin{aligned}\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq & 2\max\{\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\,,\|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\}\\ &= \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} + \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} + \Big|\,\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\Big|\\ &\quad (\max\{m,n\} = \frac{1}{2}\,(m+n+|m-n|))\\ &\geq \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathrm{i}\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} + \Big|\,\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\Big|\\ &= \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2} + \Big|\,\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\Big|,\end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

Из теоремы 2.2 вытекает следующее следствие:

Следствие 2.2. *Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, и $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Если $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2}$, тогда*

$$\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} = \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} = \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{4}.$$

Доказательство. По теореме 2.2,

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2} + \Big|\,\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\Big| \geq \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2}.$$

Значит, из $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2}$ вытекает $\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} = \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}$. Далее, отметим, что

$$\begin{aligned}\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2} &= \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathrm{i}\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\\ &\leq \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} + \|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} = 2\,\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\,.\end{aligned}$$

Так как $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq 2\max\{\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\,,\|\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\}$, результат очевиден. □

Теорема 2.3. *Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, и $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Тогда,*

$$\begin{aligned}\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq & \frac{1}{2}\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}\\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2}\Big|\,\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\Big|.\end{aligned}$$

В частности, $\omega_{\mathcal{A}}(T) \geq \frac{1}{2}\|T\|_{\mathcal{A}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big|\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\Big|$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$. Так как $|a + ib| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|a + b|$ для $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left|\langle\left(\left(1-2\varepsilon\right)T^{\star_{\mathcal{A}}}+T\right)x,x\rangle_{\mathcal{A}}\right| &= 2\left|(1-\varepsilon)\left\langle\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x,x\right\rangle_{\mathcal{A}}+\varepsilon\left\langle \mathrm{i}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| \\
&= 2\left|\langle(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x,x\rangle_{\mathcal{A}}+\mathrm{i}\left\langle\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| \\
&\geq \frac{2}{\sqrt{2}}\left|(1-\varepsilon)\left\langle\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\pm\varepsilon\left\langle\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| \\
&= \sqrt{2}\left|\langle\left((1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\pm\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right)x,x\rangle_{\mathcal{A}}\right|.
\end{aligned}$$

Беря супремум по $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$, находим, что $\sqrt{2}\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\pm\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} \leq \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}\left(T\right)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\max\{\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}},\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\} \\
=&\sqrt{2}\Bigg\{\frac{\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}+\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}}{2} \\
&+\frac{\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}-\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2}\Bigg\} \\
&\left(\max\{m,n\}=\frac{1}{2}\left(m+n+|m-n|\right)\right) \\
\geq&\sqrt{2}\Bigg\{\frac{\left\|\left((1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right)+\mathrm{i}\left((1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right)\right\|_{\mathcal{A}}}{2} \\
&+\frac{\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}-\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2}\Bigg\} \\
=&\sqrt{2}\Bigg\{\frac{\left\|(1+\mathrm{i})\left((1-2\varepsilon)T+T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right\|_{\mathcal{A}}}{4} \\
&+\frac{\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}-\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2}\Bigg\} \\
=&\sqrt{2}\Bigg\{\frac{\sqrt{2}\left\|\left((1-2\varepsilon)(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}+T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right\|_{\mathcal{A}}}{4} \\
&+\frac{\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}-\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2}\Bigg\} \\
=&\frac{\|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2}+\frac{\sqrt{2}\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}-\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2} \\
=&\frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2}+\frac{\sqrt{2}\left|\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)+\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}-\left\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)-\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|}{2},
\end{aligned}$$

что завершает доказательство. $\square$

Замечание 2.2. *Из теоремы 2.3, ясно, что если* $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \frac{\|T\|_{(\varepsilon,\mathcal{A})}}{2}$, *тогда*

$$\|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_A(T) + \varepsilon\mathfrak{I}_A(T)\|_{\mathcal{A}} = \|(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_A(T) - \varepsilon\mathfrak{I}_A(T)\|_{\mathcal{A}}.$$

Теорема 2.4. *Пусть* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *с* $0 \le \varepsilon \le 1$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) &\ge 2\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\,\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} \\ &\quad + \left|\,\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|.\end{aligned}$$

В частности,

$$\omega_{\mathcal{A}}(T) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|\,\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}} - \|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\|_{\mathcal{A}}\,\right|.$$

Доказательство. По (2.1), для любого $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$, имеем, что

$$\left|\left\langle\left((1-2\varepsilon)\,T^{\star_{\mathcal{A}}} + T\right)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2 = 4\left(\langle(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}^2 + \langle\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}^2\right).$$

Теперь в силу выпуклости функции $f(t) = t^2$,

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle\left((1-2\varepsilon)\,T^{\star_{\mathcal{A}}} + T\right)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2 \\ &= 4\left(\langle(1-\varepsilon)\,\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}^2 + \langle\varepsilon\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}^2\right) \\ &= 4\left((1-\varepsilon)\left\langle\sqrt{1-\varepsilon}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}^2 + \varepsilon\left\langle\sqrt{\varepsilon}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}^2\right) \\ &\ge 4\left(\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\,|\langle\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}| + \sqrt{\varepsilon^3}\,|\langle\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)x, x\rangle_{\mathcal{A}}|\right)^2 \\ &\ge 4\left|\left\langle\left(\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) \pm \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right)x, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2.\end{aligned}$$

Беря супремум по $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$, заключаем, что

$$4\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) \pm \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}^2 \le \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}^2(T). \tag{2.2}$$

Из (2.2), имеем, что

$$\begin{aligned}
&\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \geq 2\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) \pm \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} \\
&= 2\max\left\{\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}, \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right\} \\
&\geq \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} \\
&+ \left|\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right| \\
&\geq 2\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} \\
&+ \left|\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) &\geq 2\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} \\
&+ \left|\left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) + \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}} - \left\|\sqrt{(1-\varepsilon)^3}\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T) - \sqrt{\varepsilon^3}\mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(T)\right\|_{\mathcal{A}}\right|.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Теорема 2.5. *Пусть* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *и* $0 \leq \varepsilon \leq 1$. *Тогда*

$$\omega^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \leq (1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)\left\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}}.$$

В частности, $\omega^2_{\mathcal{A}}(T) \leq \frac{1}{2}\left\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|\langle\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x,x\rangle_{\mathcal{A}} + \langle \mathrm{i}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x,x\rangle_{\mathcal{A}}|^2 \\
&=|\langle\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x,x\rangle_{\mathcal{A}}|^2 + |\langle\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x,x\rangle_{\mathcal{A}}|^2 \\
&\leq\|\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x\|^2_{\mathcal{A}} + \|\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x\|^2_{\mathcal{A}} \\
&=\langle\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x, R_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x\rangle_{\mathcal{A}} + \langle\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x,\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)x\rangle_{\mathcal{A}} \\
&=(1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)\langle x, \left[T^{\star_{\mathcal{A}}}T + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right]x\rangle_{\mathcal{A}} \\
&\leq(1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)\left\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Более того, так как $\|X^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} = \|X\|_{\mathcal{A}}$,

$$\begin{aligned}
&\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} = \left\|[T^{\star_{\mathcal{A}}}T + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}]^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}} \\
&= \|T^{\star_{\mathcal{A}}}(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} + (T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} = \left\|(T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}} \\
&= \|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Беря супремум по $x \in \mathfrak{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$ в (2.3) и комбинируя с (2.4), получим требуемый результат. $\square$

В [9], было доказано, что для любого $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$,

$$\omega_{\mathcal{A}}^2(T) \leq \frac{1}{4}\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\omega_{\mathcal{A}}(T^2), \tag{2.5}$$

как уточнение неравенства $\omega_{\mathcal{A}}(T) \leq \|T\|_{\mathcal{A}}$. В следующей теореме мы докажем $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$ – версию этого неравенства, используя (2.5) при $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Теорема 2.6. *Пусть $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ с $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Тогда*

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}^2(T) \leq (1-\varepsilon)^2 \|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} + (1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)\omega_{\mathcal{A}}(T^2) + (1-2\varepsilon)\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(T^2)\right\|_{\mathcal{A}}.$$

В частности, $\omega_{\mathcal{A}}^2(T) \leq \frac{1}{4}\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T + TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\omega_{\mathcal{A}}(T^2)$.

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathbb{R}$. Тогда, по теореме 2.1,

$$\begin{aligned}
&\left\|(1-2\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{i\phi}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\right) + \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{i\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right\|_{\mathcal{A}}^2 \\
=&\left\|\left[(1-2\varepsilon)\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{i\phi}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\right) + \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{i\phi}T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)\right]^2\right\|_{\mathcal{A}} \\
\leq&\frac{1+(1-2\varepsilon)^2}{4}\|P\|_{\mathcal{A}} + \frac{(1-2\varepsilon)}{4}\left\|e^{2i\phi}P\right\|_{\mathcal{A}} + \frac{(1-2\varepsilon)}{4}\left\|e^{-2i\phi}P\right\|_{\mathcal{A}} \\
&+ \frac{(1-2\varepsilon)^2}{2}\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{-2i\phi}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^2\right)\right\|_{\mathcal{A}} \\
&+ \frac{1}{2}\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(e^{2i\phi}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^2\right)\right\|_{\mathcal{A}} + (1-2\varepsilon)\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^2\right)\right\|_{\mathcal{A}} \\
\leq&(1-\varepsilon)^2\|P\|_{\mathcal{A}} + (1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)\omega_{\mathcal{A}}\left(\left(\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^2\right)\right) + (1-2\varepsilon)\left\|\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}\left(\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^2\right)\right\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

где $P = \left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}} + T^{\star_{\mathcal{A}}}\left(T^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}}$. Так как $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T^{\star_{\mathcal{A}}})$, $\|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A}}$ и $\omega_{\mathcal{A}}(T^{\star_{\mathcal{A}}}) = \omega_{\mathcal{A}}(T)$, беря супремум по $\phi \in \mathbb{R}$ получим результат. $\square$

Недавно, в [26], авторы доказали следующие неравенства типа Боаса-Бельмана как для $\mathcal{A}$-скалярного произведения, так и для $\mathcal{A}$-полунормы. Прежде чем сформулировать этот результат, необходимо уточнить два обозначения, которые будут часто использоваться в дальнейшем. В частности, мы определяем:

$$t \leq a \times \begin{cases} b \\ c \\ d \end{cases} \quad \text{и} \quad t \leq a + \begin{cases} b \\ c \\ d \end{cases}$$

В первом случае имеют место неравенства $t \leq a \times b$, $t \leq a \times c$ и $t \leq a \times d$. Во вторм случае имеем: $t \leq a + b$, $t \leq a + c$, $t \leq a + d$.

Лемма 2.1. *Пусть $x, y_1, \ldots, y_n$ – векторы из $\mathfrak{H}$ и $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Тогда имеют место неравенства:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i \langle y_i, x\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2 \leq \|x\|_{\mathcal{A}}^2 \times \begin{cases} \max\limits_{1\leq i\leq n} |c_i|^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \|y_i\|_{\mathcal{A}}^2 ; \\ \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \|y_i\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{where } \ \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^2 \max\limits_{1\leq i\leq n} \|y_i\|_{\mathcal{A}}^2 , \end{cases}$$

$$+ \|x\|_{\mathcal{A}}^2 \times \begin{cases} \max\limits_{1\leq i\neq j\leq n} \{|c_i c_j|\} \sum\limits_{1\leq i\neq j\leq n} \left|\langle y_i, y_j\rangle_{\mathcal{A}}\right| ; \\ \\ \left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^{\gamma}\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^{2\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}} \left(\sum\limits_{1\leq i\neq j\leq n} \left|\langle y_i, y_j\rangle_{\mathcal{A}}\right|^{\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}, \\ \text{where } \ \gamma > 1, \ \ \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 1; \\ \\ \left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|\right)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^2\right] \max\limits_{1\leq i\neq j\leq n} \left|\langle y_i, y_j\rangle_{\mathcal{A}}\right| ; \end{cases}$$

Замечание 2.3. *В случае $n = 2$ имеем следующие более простые неравенства:*

$$\left|c_1\langle y_1, x\rangle_{\mathcal{A}} + c_2\langle y_2, x\rangle_{\mathcal{A}}\right|^2 \leq \|x\|_{\mathcal{A}}^2 \times \begin{cases} \max\left\{|c_1|^2, |c_2|^2\right\} \left(\|y_1\|_{\mathcal{A}}^2 + \|y_2\|_{\mathcal{A}}^2\right); \\ \\ \left(|c_1|^{2\alpha} + |c_2|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\|y_1\|_{\mathcal{A}}^{2\beta} + \|y_2\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ \\ \left(|c_1|^2 + |c_2|^2\right) \max\left\{\|y_1\|_{\mathcal{A}}^2, \|y_2\|_{\mathcal{A}}^2\right\}, \end{cases}$$

$$+ 2\,|c_1 c_2|\, \|x\|_{\mathcal{A}}^2 \left|\langle y_1, y_2\rangle_{\mathcal{A}}\right| ; \tag{2.6}$$

для комплексных чисел c_1, c_2 и векторов x, y_1, $y_2 \in \mathfrak{H}$.

Теорема 2.7. *Пусть* B, $C \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$, *и* η, $\gamma \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\|\eta B+\gamma C\|_{\mathcal{A}}^{2} \leq 2|\eta||\gamma| \omega_{\mathcal{A}}(C^{\star_{\mathcal{A}}} B) + \begin{cases} \max\left\{|\eta|^{2},|\gamma|^{2}\right\}(\|B^{\star_{\mathcal{A}}} B+C^{\star_{\mathcal{A}}} C\|_{\mathcal{A}}) ; \\ \\ \left(|\eta|^{2 \alpha}+|\gamma|^{2 \alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|B\|_{\mathcal{A}}^{2 \beta}+\|C\|_{\mathcal{A}}^{2 \beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \alpha>1, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 ; \\ \\ \left(|\eta|^{2}+|\gamma|^{2}\right)\left(\left\|\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}} B+C^{\star_{\mathcal{A}}} C}{2}\right\|_{\mathcal{A}}+\left\|\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}} B-C^{\star_{\mathcal{A}}} C}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right). \end{cases} \tag{2.7}$$

Доказательство. При $c_1 = \eta$, $c_2 = \gamma$, $y_1 = By$ и $y_2 = Cy$ в (2.6) мы имеем:

$$\begin{aligned} \left|\left\langle(\eta B+\gamma C) y, x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^{2} \leq \|x\|_{\mathcal{A}}^{2} \times & \begin{cases} \max\left\{|\eta|^{2},|\gamma|^{2}\right\}\left(\|B y\|_{\mathcal{A}}^{2}+\|C y\|_{\mathcal{A}}^{2}\right) ; \\ \\ \left(|\eta|^{2 \alpha}+|\gamma|^{2 \alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|B y\|_{\mathcal{A}}^{2 \beta}+\|C y\|_{\mathcal{A}}^{2 \beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \alpha>1, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 ; \\ \\ \left(|\eta|^{2}+|\gamma|^{2}\right) \max\left\{\|B y\|_{\mathcal{A}}^{2},\|C y\|_{\mathcal{A}}^{2}\right\}, \end{cases} \\ & +2|\eta||\gamma|\|x\|_{\mathcal{A}}^{2}\left|\langle B y, C y\rangle_{\mathcal{A}}\right| \end{aligned} \tag{2.8}$$

для всех x, $y \in \mathfrak{H}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \|B y\|_{\mathcal{A}}^{2}+\|C y\|_{\mathcal{A}}^{2} &=\langle B y, B y\rangle_{\mathcal{A}}+\langle C y, C y\rangle_{\mathcal{A}}=\langle B^{\star_{\mathcal{A}}} B y, y\rangle_{\mathcal{A}}+\langle C^{\star_{\mathcal{A}}} C y, y\rangle_{\mathcal{A}} \\ &=\left\langle(B^{\star_{\mathcal{A}}} B+C^{\star_{\mathcal{A}}} C) y, y\right\rangle_{\mathcal{A}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max\left\{\|B y\|_{\mathcal{A}}^{2},\|C y\|_{\mathcal{A}}^{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\|B y\|_{\mathcal{A}}^{2}+\|C y\|_{\mathcal{A}}^{2}\right)+\frac{1}{2}\left|\|B y\|_{\mathcal{A}}^{2}-\|C y\|_{\mathcal{A}}^{2}\right| \\ &=\left\langle\left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}} B+C^{\star_{\mathcal{A}}} C}{2}\right) y, y\right\rangle_{\mathcal{A}}+\left|\left\langle\left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}} B-C^{\star_{\mathcal{A}}} C}{2}\right) y, y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right| \end{aligned}$$

для всех x, $y \in \mathfrak{H}$. Из (2.8) получим
(2.9)

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \left(\eta B+\gamma C\right)y,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^{2}\le 2\left|\eta\right|\left|\gamma\right|\left\|x\right\|_{\mathcal{A}}^{2}\left|\left\langle C^{\star_{\mathcal{A}}}By,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|\\
&+\left\|x\right\|_{\mathcal{A}}^{2}\times\begin{cases}
\max\left\{\left|\eta\right|^{2},\left|\gamma\right|^{2}\right\}\left(\left\langle \left(B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right);\\
\\
\left(\left|\eta\right|^{2\alpha}+\left|\gamma\right|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left\|By\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}+\left\|Cy\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},\ \text{где}\ \ \alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\\
\\
\left(\left|\eta\right|^{2}+\left|\gamma\right|^{2}\right)\left\langle\left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}+\left|\left\langle\left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B-C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Беря супремум в (2.9) относительно $\|x\|_{\mathcal{A}}=\|y\|_{\mathcal{A}}=1$, получим, что

$$\begin{aligned}
&\left\|\eta B+\gamma C\right\|_{\mathcal{A}}^{2}=\sup_{\|x\|_{\mathcal{A}}=\|y\|_{\mathcal{A}}=1}\left|\left\langle \left(\eta B+\gamma C\right)y,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^{2}\\
&\le\begin{cases}
\max\left\{\left|\eta\right|^{2},\left|\gamma\right|^{2}\right\}\sup\limits_{\|y\|_{\mathcal{A}}=1}\left(\left\langle \left(B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right);\\
\\
\left(\left|\eta\right|^{2\alpha}+\left|\gamma\right|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sup\limits_{\|y\|_{\mathcal{A}}=1}\left(\left\langle B^{\star_{\mathcal{A}}}By,y\right\rangle_{\mathcal{A}}^{\beta}+\left\langle C^{\star_{\mathcal{A}}}Cy,y\right\rangle_{\mathcal{A}}^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},\\
\text{где}\ \ \alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\\
\\
\left(\left|\eta\right|^{2}+\left|\gamma\right|^{2}\right)\left(\left\langle\left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}+\left|\left\langle\left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B-C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|\right),
\end{cases}\\
&+2\left|\eta\right|\left|\gamma\right|\sup_{\|y\|_{\mathcal{A}}=1}\left|\left\langle C^{\star_{\mathcal{A}}}By,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le\begin{cases}
\max\left\{\left|\eta\right|^{2},\left|\gamma\right|^{2}\right\}\sup\limits_{\|y\|_{\mathcal{A}}=1}\left(\left\langle \left(B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right);\\
\\
\left(\left|\eta\right|^{2\alpha}+\left|\gamma\right|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sup\limits_{\|y\|_{\mathcal{A}}=1}\left\|By\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}+\sup\limits_{\|y\|_{\mathcal{A}}=1}\left\|Cy\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},\\
\text{где}\ \ \alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\\
\\
\left(\left|\eta\right|^{2}+\left|\gamma\right|^{2}\right)\\
\times\left(\sup\limits_{\|y\|_{\mathcal{A}}=1}\left\langle\left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B+C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}+\sup\limits_{\|y\|_{\mathcal{A}}=1}\left|\left\langle\left(\frac{B^{\star_{\mathcal{A}}}B-C^{\star_{\mathcal{A}}}C}{2}\right)y,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|\right),
\end{cases}\\
&+2\left|\eta\right|\left|\gamma\right|\sup_{\|y\|_{\mathcal{A}}=1}\left|\left\langle C^{\star_{\mathcal{A}}}By,y\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \max\left\{|\eta|^2, |\gamma|^2\right\}\left(\left\|B^{\star_\mathcal{A}}B + C^{\star_\mathcal{A}}C\right\|_\mathcal{A}\right); \\ \\ \left(|\eta|^{2\alpha} + |\gamma|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|B\|_\mathcal{A}^{2\beta} + \|C\|_\mathcal{A}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где}\ \ \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ \\ \left(|\eta|^2 + |\gamma|^2\right)\left(\left\|\frac{B^{\star_\mathcal{A}}B + C^{\star_\mathcal{A}}C}{2}\right\|_\mathcal{A} + \left\|\frac{B^{\star_\mathcal{A}}B - C^{\star_\mathcal{A}}C}{2}\right\|_\mathcal{A}\right), \end{cases}$$
$$+ 2\,|\eta|\,|\gamma|\,\omega_\mathcal{A}\left(C^{\star_\mathcal{A}}B\right),$$

что доказывает (2.7) и завершает доказательство. □

Применив теорему 2.7, докажем следующие неравенства:

Следствие 2.3. *Пусть* $T \in \mathfrak{L}_\mathcal{A}(\mathfrak{H})$ *и* $0 \le \varepsilon \le 1$. *Тогда*

$$\|T\|^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})} \le 2\,|1-2\varepsilon|\,\omega_\mathcal{A}\left(T^2\right) \tag{2.10}$$
$$+ \begin{cases} \left\|TT^{\star_\mathcal{A}} + T^{\star_\mathcal{A}}T\right\|_\mathcal{A}; \\ \\ 2^{1/\beta}\left((1-2\varepsilon)^{2\alpha} + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}}\|T\|_\mathcal{A}^2,\ \ \textit{где}\ \ \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ \\ \left((1-2\varepsilon)^2 + 1\right)\left(\left\|\frac{TT^{\star_\mathcal{A}} + T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A} + \left\|\frac{TT^{\star_\mathcal{A}} - T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A}\right). \end{cases}$$

Доказательство. Беря в (2.7) $\eta = 1-2\varepsilon$, $\gamma = 1$, $B = T^{\star_\mathcal{A}}$ и $C = T$, получим:

$$\|T\|^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})} \le 2\,|1-2\varepsilon|\,\omega_\mathcal{A}\left(T^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}}\right) \tag{2.11}$$
$$+ \begin{cases} \max\left\{(1-2\varepsilon)^2, 1\right\}\left(\left\|\left(T^{\star_\mathcal{A}}\right)^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}} + T^{\star_\mathcal{A}}T\right\|_\mathcal{A}\right); \\ \\ \left((1-2\varepsilon)^{2\alpha} + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|T^{\star_\mathcal{A}}\|_\mathcal{A}^{2\beta} + \|T\|_\mathcal{A}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где}\ \ \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ \\ \left((1-2\varepsilon)^2 + 1\right) \\ \times\left(\left\|\frac{(T^{\star_\mathcal{A}})^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}} + T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A} + \left\|\frac{(T^{\star_\mathcal{A}})^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}} - T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A}\right). \end{cases}$$

Так как $\omega_\mathcal{A}(T^{\star_\mathcal{A}}) = \omega_\mathcal{A}(T)$ и $\|T^{\star_\mathcal{A}}\|_\mathcal{A} = \|T\|_\mathcal{A}$, легко проверить, что

$$\omega_\mathcal{A}\left(T^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}}\right) = \omega_\mathcal{A}\left(\left(T^{\star_\mathcal{A}}\right)^2\right) = \omega_\mathcal{A}\left(T^2\right),$$

следовательно, $\|T^{\star_\mathcal{A}}\|_\mathcal{A}^{2\beta} = \|T\|_\mathcal{A}^{2\beta}$. Аналогично, из (2.4) (или используя (1.1) вместе с $P_{\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}}T^{\star_\mathcal{A}} = T^{\star_\mathcal{A}}$), получаем, что

$$\left\|\frac{\left(T^{\star_\mathcal{A}}\right)^{\star_\mathcal{A}}T^{\star_\mathcal{A}} - T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A} = \left\|\frac{TT^{\star_\mathcal{A}} - T^{\star_\mathcal{A}}T}{2}\right\|_\mathcal{A}$$

и

$$\left\|\frac{(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}+T^{\star_{\mathcal{A}}}T}{2}\right\|_{\mathcal{A}}=\left\|\frac{TT^{\star_{\mathcal{A}}}+T^{\star_{\mathcal{A}}}T}{2}\right\|_{\mathcal{A}}.$$

Тогда, в силу (2.11) получим (2.10), что завершает доказательство. □

Следствие 2.4. *Пусть* $T\in\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *и* $0\le\varepsilon\le 1$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\max\left\{\left\|\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)\right\|_{\mathcal{A}}^{2},\left\|\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)\right\|_{\mathcal{A}}^{2}\right\}&\le 2\varepsilon(1-\varepsilon)\,\omega_{\mathcal{A}}\left(T^{2}\right)\\&+\begin{cases}\max\left\{\varepsilon^{2},(1-\varepsilon)^{2}\right\}\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T+TT^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}};\\[2ex] 2^{1/\beta}\left(\varepsilon^{2\alpha}+(1-\varepsilon)^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\|T\|_{\mathcal{A}}^{\beta},\\ \textit{где } \alpha>1,\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\\[2ex] \left(\varepsilon^{2}+(1-\varepsilon)^{2}\right)\left[\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T+TT^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}+\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T-TT^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right].\end{cases}\end{aligned}\tag{2.12}$$

Доказательство. Если в (2.7) возьмем $\eta=\varepsilon$, $\gamma=1-\varepsilon$, $B=T$ и $C=T^{\star_{\mathcal{A}}}$, будем иметь

$$\begin{aligned}\left\|\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)\right\|_{\mathcal{A}}^{2}&=\|\varepsilon T+(1-\varepsilon)\,T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}^{2}\\&\le 2\varepsilon(1-\varepsilon)\,\omega_{\mathcal{A}}\left((T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T\right)\\&+\begin{cases}\max\left\{\varepsilon^{2},(1-\varepsilon)^{2}\right\}\left(\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T+(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}\right);\\[2ex] \left(\varepsilon^{2\alpha}+(1-\varepsilon)^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|T\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}+\|T\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},\\ \text{где }\ \alpha>1,\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\\[2ex] \left(\varepsilon^{2}+(1-\varepsilon)^{2}\right)\\ \times\left[\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T+(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}+\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T-(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right].\end{cases}\end{aligned}\tag{2.13}$$

Тогда в силу $\omega_{\mathcal{A}}(T^{\star_{\mathcal{A}}})=\omega_{\mathcal{A}}(T)$, $\|T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}=\|T\|_{\mathcal{A}}$ и (2.13), получим первую част (2.12).

Для второй берем $\alpha=(1-\varepsilon)\,\mathrm{i}$, $\beta=\varepsilon\mathrm{i}$, $B=T$ и $C=T^{\star_{\mathcal{A}}}$ в (2.7) и находим, что

$$\left\|\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)\right\|_{\mathcal{A}}^{2}=\|(1-\varepsilon)\,(\text{-i}T)+\varepsilon(\mathrm{i}T^{\star_{\mathcal{A}}})\|_{\mathcal{A}}^{2}\le 2\varepsilon\,(1-\varepsilon)\,\omega_{\mathcal{A}}\left((T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T\right)$$
$$+\begin{cases}\max\left\{\varepsilon^{2},(1-\varepsilon)^{2}\right\}\left(\|T^{\star_{\mathcal{A}}}T+(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}\|_{\mathcal{A}}\right);\\[2ex] \left(\varepsilon^{2\alpha}+(1-\varepsilon)^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|T\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}+\|T\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},\\ \text{где}\quad \alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\\[2ex] \left(\varepsilon^{2}+(1-\varepsilon)^{2}\right)\\ \times\left[\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T+(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}+\left\|\frac{T^{\star_{\mathcal{A}}}T-(T^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}}T^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right],\end{cases}$$

что завершает доказательство. □

Теорема 2.8. *Пусть* $T\in\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *и* $0\le\varepsilon\le 1$. *Тогда*

$$\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}^{2}(T)\le 2\omega_{\mathcal{A}}\left(\left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)$$
$$+\begin{cases}\left\|\left(\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T+\left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)\right\|_{\mathcal{A}};\\[2ex] 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left\|\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}+\left\|\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},\\ \textit{где}\quad \alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\\[2ex] 2\left[\left\|\frac{\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T+\left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right.\\ \left.+\left\|\frac{\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T-\left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right].\end{cases}\tag{2.14}$$

Доказательство. Из (2.9) для $y=x$ мы имеем для $\eta=1$, $\gamma=\mathrm{i}$, $B=\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T$ и $C=\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T$, что

$$\left|\left\langle\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T+\mathrm{i}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)x,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|^{2}$$
$$\le\|x\|_{\mathcal{A}}^{2}\times\begin{cases}\left\langle\left(\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T+\left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)x,x\right\rangle_{\mathcal{A}};\\[2ex] 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left\|\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}Tx\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}+\left\|\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}Tx\right\|_{\mathcal{A}}^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},\\ \text{где}\quad \alpha>1,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1;\\[2ex] 2\left[\left\langle\left(\frac{\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T+\left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T}{2}\right)x,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right.\\ \left.+\left|\left\langle\left(\frac{\left(\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T-\left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T}{2}\right)x,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|\right],\end{cases}$$
$$+2\|x\|_{\mathcal{A}}^{2}\left|\left\langle\left(\mathfrak{I}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}T\right)^{\star_{\mathcal{A}}}\mathfrak{R}_{(\varepsilon,\mathcal{A})}Tx,x\right\rangle_{\mathcal{A}}\right|$$

для всех $x \in \mathfrak{H}$.

Взяв супремум по $\|x\|_{\mathcal{A}} = 1$, получаем (2.14). $\square$

Введем оператор T_ε, определенный для исследования взаимосвязи между T и его $\mathcal{A}$-сопряженным $T^{\star_{\mathcal{A}}}$. Варьируя ε, мы можем исследовать, как это взаимодействие влияет на свойства оператора, что приводит к важным результатам, помогающим описать верхние границы $(\varepsilon, \mathcal{A})$-взвешенного числового радиуса.

Определение 2.2. *Для* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *и* $0 \le \varepsilon \le 1$. *Положим* $T_\varepsilon := (1-2\varepsilon)\, T^{\star_{\mathcal{A}}} + T$.

Рассматривая оператор T_ε, установим следующую теорему, связанную величиной $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$.

Теорема 2.9. *Пусть* $T \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{H})$ *и* $0 \le \varepsilon \le 1$. *Тогда*

$$\omega^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) \le \frac{1}{2}\omega_{\mathcal{A}}\left(T_\varepsilon^2\right) + \begin{cases} \frac{1}{4}\left\|(T_\varepsilon)^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}}; \\ \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon - T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right). \end{cases} \tag{2.15}$$

Доказательство. Из определения $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T)$ и тождества (1.3), имеем:

$$\omega^2_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(T) = \omega^2_{\mathcal{A}}(T_\varepsilon) = \frac{1}{4}\sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\|e^{\mathrm{i}\phi}T_\varepsilon + e^{-\mathrm{i}\phi}T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|^2_{\mathcal{A}}. \tag{2.16}$$

Применив неравенство (2.7) для $\eta = e^{\mathrm{i}\phi}$, $\gamma = e^{-\mathrm{i}\phi}$, $B = T_\varepsilon$ и $C = T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}$, получим:

$$\begin{aligned} &\left\|e^{\mathrm{i}\phi}T_\varepsilon + e^{-\mathrm{i}\phi}T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|^2_{\mathcal{A}} \le 2\omega_{\mathcal{A}}\left((T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon\right) \\ &+ \begin{cases} \left\|(T_\varepsilon)^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + (T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}})^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}};\ 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\|T_\varepsilon\|^{2\beta}_{\mathcal{A}} + \|T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\|^{2\beta}_{\mathcal{A}}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \text{где } \alpha > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1; \\ 2\left(\left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + \left(T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon - \left(T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right)^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right). \end{cases} \\ &= 2\omega_{\mathcal{A}}\left(T_\varepsilon^2\right) + \begin{cases} \left\|(T_\varepsilon)^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}\right\|_{\mathcal{A}}; \\ 2\left(\left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon + T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{T_\varepsilon{}^{\star_{\mathcal{A}}} T_\varepsilon - T_\varepsilon T_\varepsilon^{\star_{\mathcal{A}}}}{2}\right\|_{\mathcal{A}}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.16) вытекает (2.15), что завершает доказательство.. $\square$

Благодарность. Авторы искренне признательны рецензенту за его/её ценные замечания и предложения, которые значительно улучшили эту статью.

Abstract. The concept of the weighted $\mathcal{A}$-numerical radius was recently defined, where $\mathcal{A}$ is assumed to be a positive operator. In this paper, we introduce another weighted $\mathcal{A}$-numerical radius, denoted by $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$, for operators in semi-Hilbert spaces. We establish some basic properties and inequalities for $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$, which generalize earlier results about $\omega_{\mathcal{A}}(\cdot)$. Specifically, we derive new identities for the $\mathcal{A}$-numerical radius and provide further comparisons between the $\mathcal{A}$-numerical radius and the operator $\mathcal{A}$-seminorm of weighted real and weighted imaginary parts. Additionally, we utilize Boas-Bellman type inequalities in the context of semi-Hilbert spaces to derive upper bounds for $\omega_{(\varepsilon,\mathcal{A})}(\cdot)$. Several applications are also discussed.

Список литературы

[1] M. L. Arias, G. Corach and M.C. Gonzalez, "Metric properties of projections in semi-Hilbertian spaces", Integral Equ. Oper. Theory, **62**, no. 1, 11 – 28 (2008).

[2] G. Fongi and M.C. Gonzalez, "Partial isometries and pseudoinverses in semi-Hilbertian spaces", Linear Algebra Appl., **495**, 324 – 343 (2016).

[3] K. Feki, "Spectral radius of semi-Hilbertian space operators and its applications", Ann. Funct. Anal., **11**, 929 – 946 (2020).

[4] R. G. Douglas, "On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space", Proc. Am. Math. Soc., **17**, 413 – 416 (1966).

[5] M. L. Arias, G. Corach, M. C. Gonzalez, "Partial isometries in semi-Hilbertian spaces", Linear Algebra Appl., **428**, no. 7, 1460 – 1475 (2008).

[6] M. L. Arias, G. Corach, M. C. Gonzalez, "Metric properties of projections in semi-Hilbertian spaces", Integral Equ. Oper. Theory, **62**, 11 – 28 (2008).

[7] M. S. Moslehian, M. Kian and Q. Xu, "Positivity of 2×2 block matrices of operators", Banach J. Math. Anal., **13**, no. 3, 726 – 743 (2019).

[8] H. Baklouti, K. Feki and O. A. M. Sid Ahmed, "Joint numerical ranges of operators in semi-Hilbertian spaces", Linear Algebra Appl., **555**, 266 – 284 (2018).

[9] A. Zamani, "A-numerical radius inequalities for semi-Hilbertian space operators", Linear Algebra Appl., **578**, 159 – 183 (2019).

[10] A. Abu-Omar and F. Kittaneh, "Notes on some spectral radius and numerical radius inequalities", Studia Math., **227**, no. 2, 97 – 109 (2015).

[11] A. Abu-Omar and F. Kittaneh, "A generalization of the numerical radius", Linear Algebra Appl. **569**, 323 – 334 (2019).

[12] M. W. Alomari, M. Sababheh, C. Conde and H. R. Moradi, "Generalized Euclidean operator radius", Georgian Math. J. **31**, no. 3, 369 – 380 (2024).

[13] H. Baklouti, K. Feki and S. A. Ould Ahmed Mahmoud, "Joint normality of operators in semi-Hilbertian spaces", Linear Multilinear Alg., **68**, no. 4, 845 – 866 (2020).

[14] C. Conde, F. Kittaneh, H. R. Moradi and M. Sababheh, "Numerical radii of operator matrices in terms of certain complex combinations of operators", Georgian Math. J., *31*, no. 4, 575 – 586 (2024).

[15] S. S. Dragomir, Inequalities for the Numerical Radius of Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer Briefs in Math. Springer, Cham (2013).

[16] O. Hirzallah, F. Kittaneh and K. Shebrawi, "Numerical radius inequalities for certain 2×2 operator matrices", Integral Equ. Oper. Theory, **71**, no. 1, 129 – 147 (2011).

[17] O. Hirzallah, F. Kittaneh and K. Shebrawi, "Numerical radius inequalities for certain 2×2 operator matrices", Studia Math., **210**, no. 2, 99 – 114 (2012).

[18] Z. Heydarbeygi, M. Sababheh, H. Moradi, "A convex treatment of numerical radius inequalities", Czechoslovak Math J., **72**, no. 2, 601 – 614 (2022).

[19] F. Kittaneh, M. S. Moslehian and T. Yamazaki, "Cartesian decomposition and numerical radius inequalities", Linear Algebra Appl., **471**, 46 – 53 (2015).

[20] W. Majdak, N. A. Secelean and L. Suciu, "Ergodic properties of operators in some semi-Hilbertian spaces", Linear Multilinear Alg., **61**, no. 2, 139 – 159 (2013).

[21] M. S. Moslehian and M. Sattari, “Inequalities for operator space numerical radius of 2×2 block matrices”, J. Math. Phys. **57**, 015201 (2016).
[22] M. Sababheh, C. Conde and H. R. Moradi, “A convex-block approach to numerical radius inequalities”, Funct. Anal. Its Appl. **57**, no. 1, 26 – 30 (2023).
[23] M. Sababheh, D. S. Djordjević and H. R. Moradi, “Numerical Radius and Norm Bounds via the Moore-Penrose Inverse”, Complex Anal. Oper. Theory, **18**, 117 (2024).
[24] F. Gao and X. Liu, “Inequalities for the weighted A-numerical radius of semi-Hilbertian space operators”, Oper. Matrices, **17**, no. 2, 343 – 354 (2023).
[25] A. Sheikhhosseini, M. Khosravi and M. Sababheh, “The weighted numerical radius”, Ann. Funct. Anal. **13**, 3 (2022).
[26] N. Altwaijry, S. S. Dragomir and K. Feki, New Results on Boas–Bellman-Type Inequalities in Semi-Hilbert Spaces with Applications, Axioms **12**, 638p. (2023).

Поступила 10 октября 2024

После доработки 28 декабря 2024

Принята к публикации 15 января 2025