ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLIII 1966 5

МАТЕМАТИКА

В. М. Адамян и Д. З. Аров

Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30/IV 1966)

1. В настоящей работе уточняется и исследуется схема теории рассеяния, развитая в ([1-3]).

Пусть V — полуунитарный оператор ([4]) на гильбертовом (сепарабельном) пространстве D, $N = D \ominus VD$, U — унитарное расширение оператора V с выходом в пространство H, $H_U = \bigvee U^n D$*. Ниже если не оговорено противное, предполагается, что оператор V прост, т. е. $\bigcap_n V^n D = \{0\}$. Обозначим через $L_2(-\pi, \pi; N)$ гильбертово пространство измеримых функций $f(e^{i\theta})$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ со значениями в N, для которых $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(e^{i\theta})\|_N^2 d\theta < \infty$, через $H_2^+(C, N)$ — подпространство функций из $L_2(-\pi, \pi; N)$, разлагающихся в ряд Фурье по неотрицательным степеням $e^{i\theta}$. Формулой

$$F_U(D) f = \underset{N\to\infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{-N}^{N} e^{ik\theta} P_N U^{-k} f, \quad f \in H, \tag{1}$$

где P_N — ортопроектор из H на N, определяется отображение H на $L_2(-\pi, \pi; N)$, изометрическое на пространстве аннулирующее его ортогональное дополнение и такое, что

$$F_U(D)\, Uf = e^{i\theta} F_U(D) f, \qquad F_U(D)\, D = H_2^+(C; N). \tag{2}$$

Из (1), (2) следует, что почти всюду

$$(F_U(D) f)(e^{i\theta}) = 2\pi \frac{d}{d\theta} P_N E_\theta f, \quad f \in H, \tag{3}$$

где E_θ — спектральная функция оператора U, а производная понимается в сильном смысле в N.

* Символом $\bigvee_{(n)} D_n$ обозначается линейная замкнутая оболочка векторов, входящих в одно из подпространств D_n.

Если S — определенный на H_U непрерывный оператор, перестановочный с U, то существует ([5]) измеримая оператор-функция $S(e^{i\theta})$ на N, такая, что

$$F_U(D)\,Sf = S(e^{i\theta})\,F_U(D)\,f, \qquad f \in H_U,$$

$$\|S\| = \sup_\theta \operatorname{vrai} \left\| S(e^{i\theta}) \right\|,$$

которую будем называть субоператором оператора S, а оператор в $L_2(-\pi, \pi; N)$

$$(Sf)(e^{i\theta}) = S(e^{i\theta})\,f(e^{i\theta}), \quad f(e^{i\theta}) \in L_2(-\pi, \pi; N),$$

— оператором „умножения“ на функцию $S(e^{i\theta})$.

Пусть $\widetilde{S}$ — коммутирующий с V непрерывный оператор на D. Для любого унитарного расширения U оператора V формулой

$$Sf = s - \lim_{n\to\infty} U^{-n}\,\widetilde{S}\,P_D\,U^n f, \quad f \in H_U$$

определяется единственный непрерывный оператор S на H_U, являющийся расширением оператора $\widetilde{S}$ и коммутирующий с U. Субоператоры $S(e^{i\theta})$ таких операторов S не зависят от выбора расширения U и составляют класс B^+ граничных значений (в сильном смысле) аналитических внутри круга $|\zeta| < 1$ оператор-функций $S(\zeta)$ на N, для которых $\sup_{|\zeta|<1} \|S(\zeta)\| < \infty$. Если $S(e^{i\theta})$ принимает (*п. в.*) унитарные значения, то $\widetilde{S}$ — полуунитарный оператор на N, а S — унитарный на H_U, причем, вообще говоря, $\bigcap_n S^n D \neq \{0\}$ и $H_s = \bigvee_n S^n D \neq H_U$. Однако имеет место

Теорема 1. *Если* $\dim N < \infty$, *то для того чтобы* $H_s = H_U \cdot$ $\cdot (\bigcap_n S^n D = \{0\})$ *необходимо и достаточно, чтобы оператор „умножения“ на* $S(e^{i\theta})$ *в* $L_2(-\pi, \pi; N)$ *не имел в подпространстве* $H_2^-(C, N) = L_2(-\pi, \pi; N) \ominus H_2^+(C, N)$ $(H_2^+(C, N))$ *собственных векторов.*

Следствие. Если $S(e^{i\theta}) = s(e^{i\theta})\,I$, где $s(e^{i\theta})$ — скалярная „внутренняя“ функция ([6]), отличная от константы, а I — единичный оператор в N, $\dim N \leqslant \infty$, то $H_s = H_U$ и $\bigcap_n S^n D = \{0\}$.

2. Для двух унитарных расширений U_1 и U_2 оператора V (вообще говоря, не простого) с выходом соответственно в пространства H_1 и H_2 определим волновой оператор $W_D(U_2, U_1)$ формулой

$$W_D(U_2, U_1) = s - \lim_{m\to\infty} U_2^{-m} U_1^m P_{U_1^{-m}D}, \tag{4}$$

где $P_{U_1^{-m}D}$ — ортопроектор из H_1 на $U_1^{-m}D$.

Легко показать, что рассматриваемый предел существует, обладает известными свойствами волновых операторов и в случае, когда $H_{U_1} = H_1 \subset H_2$ определение (4) совпадает с принятым в теории рассеяния [7]. Для простого V из (1) и (4) получаем

$$W_D(U_2, U_1) = F_{U_2}^*(D) F_{U_1}(D). \tag{5}$$

Пусть $S(e^{i\theta})$ — унитарная (п. в.) функция класса B^+ и S_i — перестановочные с расширениями U_i операторы в пространствах H_{U_i}, для которых $S(e^{i\theta})$ является субоператором ($i = 1{,}2$). Тогда S_i — унитарные расширения с выходом в H_{U_i} ($i = 1{,}2$) одного и того же полуунитарного оператора на D.

Теорема 2. (ср. с ([7, 8])),

$$W_D(S_2, S_1) f = W_D(U_2, U_1) P_{H_{S_1}} f, \quad f \in H_{U_1}.$$

3. Пусть теперь V_+ и V_- — (простые) полуунитарные операторы соответственно на D_+ и D_-, $N_\pm = D_\pm \ominus V_\pm D_\pm$. Для определенности примем, что $\dim N_+ \geqslant \dim N_-$. Унитарный оператор U на H назовем (минимальным) унитарным сцеплением операторов V_+ и V_-, если

$$D_\pm \subset H, \qquad U^{\pm 1}\big|_{D_\pm}^{*} = V_\pm; \quad (H = \overline{H_U^+ + H_U^-}, \tag{6}$$

где

$$H_D^\pm = \bigvee_{(n)} U^n D_\pm).$$

Легко построить сцепление $\mathring{U}$, для которого $\mathring{U} N_- \subset N_+$. В дальнейшем будем считать его фиксированным и называть специальным.

Для двух унитарных сцеплений U_1 и U_2 соответственно в пространствах H_1 и H_2 операторов $V_\pm$ определим оператор рассеяния $S(U_2, U_1)$ как произведение волновых

$$\begin{aligned} S(U_2, U_1) &= W_{D_+}^*(U_2, U_1)\, W_{D_-}(U_2^{-1}, U_1^{-1}) = \\ &= (W_{D_+}(U_1, U_2)\, W_{D_-}(U_2^{-1}, U_1^{-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

В случае, когда $H_{U_1} = H_1 = H_2 = H_{U_2}$ такое определение совпадает с принятым в теории рассеяния ([7]). Из (4) и (7) имеем

* Через $C\,|_D$ обозначается сужение оператора C на D.

$$S(U_2, U_1)h_1 \subset H^+_{U_1}, \quad U_1 S(U_2, U_1) = S(U_2, U_1)U_1. \tag{8}$$

Обозначим через F^+_U и F^-_U соответственно отображения $F_U(D_+)$ и $e^{-i\theta}F_U(H^-_U \ominus U^{-1}D_-)$. Субоператор оператора $S(U_2, U_1) \mid H^+_{U_1}$ в представлении $F^+_{U_1}$ будем называть субоператором рассеяния и обозначать $S_{21}(e^{i\theta})$. Очевидно, $\| S_{21}(e^{i\theta}) \| \leqslant 1$ (п. в.). Для субоператора $S_0(e^{i\theta})$ оператора $S(\mathring{U}, U) \mid H^+_U$ на основании (3), (5), (7) и равенства $F^+_U = \mathring{U} F^-_U$ получим

$$S_{0\cdot}(e^{i\theta})f(e^{i\theta}) = \mathring{U}(F^-_U F^{+*}_U f)(e^{i\theta}), \; f(e^{i\theta}) \in L_2(-\pi, \pi; N_+) \tag{9}$$

$$S_{0\cdot}(e^{i\theta})h = 2\pi e^{-i\theta}\frac{d}{d\theta}\mathring{U}P_{N_-}E_\theta h, \; h \in N_+ \tag{10}$$

Равенства (9), (10) дают повод называть $S_{0\cdot}(e^{i\theta})$ субоператором рассеяния сцепления U. Произвольный субоператор рассеяния $S_{21}(e^{i\theta})$ представим в виде

$$S_{21}(e^{i\theta}) = S^*_{02}(e^{i\theta})\, S_{01}(e^{i\theta}). \tag{11}$$

Обозначим через $\sum^{1/2}(e^{i\theta})$ неотрицательный квадратный из неотрицательного оператора $I - S^*_{0\cdot}(e^{i\theta})S_{0\cdot}(e^{i\theta})$ на N_+ и через $L^{\Sigma}_2(-\pi, \pi; N_+)$ — подпространство в $L_2(-\pi, \pi; N_+)$, являющееся замыканием области значений оператора „умножения“ на функцию $\sum^{1/2}(e^{i\theta})$. Следующая теорема дает функциональную модель сцепления по его субоператору рассеяния.

Теорема 3. *Для минимального сцепления U в H существует изометрическое отображение Q пространства H на $L^{\Sigma}_2 = L_2(-\pi, \pi; \mathring{U}N_-) \ominus L^{\Sigma}_2(-\pi, \pi; N_+)$, такое, что*

$$QD_- = H^-_2(C; \mathring{U}_-) \oplus \{0\},$$

$$QD_+ = \{S_{0\cdot}(e^{i\theta})f(e^{i\theta}) \oplus \textstyle\sum^{1/2}(e^{i\theta})f(e^{i\theta}), f(e^{i\theta}) \in H^+_2(C; N_+)\},$$

$$(QUf)(e^{i\theta}) = e^{i\theta}(Qf)(e^{i\theta}).$$

Построение модели проводится так же, как это сделано в [9] для унитарного растяжения сжатия по характеристической функции. На основании теоремы 3 доказываются

Теорема 4. *Для того, чтобы у сцеплений U_1 и U_2 соответственно в пространствах H_1 и H_2 одной и той же пары полуунитарных операторов совпадали их субоператоры рассеяния, необходимо и достаточно, чтобы существовало изометрическое отображение K пространства H_1 на H_2 такое, что*

$$U_2K = KU_1; \quad Kf = f, \quad f \in D_\pm.$$

Теорема 5. *Всякая измеримая (п. в.) сжимающая оператор-функция, отображающая N_+ в $\mathring{U}N_-$, есть субоператор рассеяния для некоторого сцепления U полуунитарных операторов $V_\pm$.*

4. Самосопряженный оператор A в пространстве H с областью определения D_A назовем (минимальным) самосопряженным сцеплением максимальных симметрических операторов $B_\pm$ с индексами дефекта $(r_\pm, 0)$, определенных на областях $D_{B_\pm}$ в пространствах $D_\pm$, если

$$D_\pm \subset H; \quad D_{B_\pm} \subset D_A \text{ и } \pm B_\pm = A|_{D_{B_\pm}}; \quad (H = \overline{H_A^+ + H_A^-},$$

где $H_A^\pm = \bigvee_{(\lambda)} E_\lambda D_\pm$, E_λ — спектральная функция оператора A). Предполагается, что операторы $B_\pm$ просты, т. е. не имеют самосопряженных частей. Если $V_\pm$ — преобразования Кэли операторов $B_\pm$, $V_\pm = (B_\pm + iI)(B_\pm - iI)^{-1}$, а U — оператора A, то A — (минимальное) самосопряженное сцепление (простых) операторов $B_\pm$ тогда и только тогда, если U — (минимальное) унитарное сцепление (простых) операторов $V_\pm$.

Группа унитарных операторов U_t на H называется (минимальным) унитарным сцеплением полугрупп полуунитарных операторов на $D_\pm$, если

$$D_\pm \subset H; \quad V_t^\pm = U_{\pm t}|D_\pm; \quad (H = \overline{H_U^+ + H_U^-}, \text{ где } H_U^\pm = \bigvee_t U_t D_\pm). \text{ Полу-}$$

группы $V_t^\pm$ предполагаются простыми, т. е. $\bigcap_t V_t^\pm D_\pm = \{0\}$.

Группа U_t является (минимальным) унитарным сцеплением (простых) полугрупп $V_t^\pm$ тогда и только тогда, если ее инфинитезимальный оператор $A = \operatorname{s-lim}\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{U_t - I}{-it}$ является (минимальным) самосопряженным сцеплением (простых) инфинитезимальных операторов $B_\pm$ полугрупп $V_t^\pm$.

Для двух самосопряженных (унитарных) сцеплений A_1 и A_2 ($U_t^{(1)} = e^{-iA_1 t}$ и $U_t^{(2)} = e^{-iA_2 t}$) операторов $B_\pm$ (полугрупп $V_t^\pm$) соответственно в пространствах H_1 и H_2 определим волновые операторы

$$W_\pm(A_2, A_1) = W_\pm(U^{(2)}, U^{(1)}) = \operatorname{s-lim}_{t \to \pm\infty} e^{iA_2 t} e^{-iA_1 t} P_{D_t^\mp},$$

где $P_{D_t^\pm}$ — ортопроектор из H_1 на $D_t^\pm = e^{iA_1 t} D_\pm$, и оператор рассеяния

$$S(A_2, A_1) = S(U^{(2)}, U^{(1)}) = W_+^*(A_2, A_1)\, W_-(A_2, A_1).$$

Обозначим через $L_2(-\infty, \infty; N)$ гильбертово пространство измеримых функций $f(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, со значениями в N, для которых

$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|f(\lambda)\|^2 d\lambda < \infty$ и пусть G — изометрическое отображение

$(Gf)(\lambda) = \frac{1}{\lambda - i} f\left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)$, $f(e^{i\xi}) \in L_2(-\pi, \pi; N)$, пространства $L_2(-\pi, \pi; N)$ на $L_2(-\infty, \infty; N)$, а $F_A^{\pm}$ — отображения GF_U пространства H на $L_2(-\infty, \infty; N_{\pm})$, где U — преобразование Кэли сцепления A в H. Тогда

$$F_{A_1}^{-} S(A_2, A_1) f = S_{21}(\lambda) F_{A_1}^{+} f, \quad f \in H_{A_1}^{+},$$

где $S_{21}(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$ — измеримая (п. в.) сжимающая оператор-функция на N_+, называемая субоператором рассеяния.

На основании теоремы 2 $S(A_2, A_1) = S(U_2, U_1)$, где U_2 и U_1 — преобразования Кэли операторов A_2 и A_1. Это позволяет перенести все результаты, сформулированные для унитарных сцеплений полуунитарных операторов на самосопряженные (унитарные) сцепления максимальных симметрических (полугрупп полуунитарных) операторов, причем в функциональной модели сцеплению $A(U_t)$ соответствует умножение на $\lambda(e^{-i\lambda t})$ в L_2^s. В частности, для субоператора $S_0.(\lambda)$ оператора $S(\mathring{A}, A)$, где $\mathring{A}$ — фиксированное сцепление, преобразование Кэли которого $\mathring{U}$ является специальным, имеем

$$S_0.(\lambda) f_{(\lambda)} = \mathring{U}(F_A^- F_A^{+*} f(\lambda)), \quad f(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; N_+) \tag{9}$$

$$S_0.(\lambda) h = \pi(\lambda - i)^2 \mathring{U} \frac{d}{d\lambda} P_{N-} E_\lambda h, \quad h \in N_+ \tag{10}$$

Если D_+ и D_- — ортогональны в H, то субоператор рассеяния $S_0.(\lambda)$ сцепления A является граничным значением аналитической при $\mathrm{Jm} z < 0$ оператор-функции $S(z)$,

$$S(z) = \frac{(z-i)^2}{2i} \mathring{U} P_{N-} R_z | N_+,$$

где $R_z = (A - zI)^{-1}$.

С другой стороны, в этом случае для обобщенной резольвенты $\widetilde{R}_z = P_D R_z|_D$, $D = D_+ \oplus D_-$, имеет место формула

$$\widetilde{R}_z = \widetilde{R}_z^0 + \frac{1}{2i} \mathring{Q}_z^* \mathring{U}^* P_{U^* N_-} [I - S(z)] P_{N_+} \mathring{Q}_z^*, \tag{12}$$

где $\widetilde{R}_z$ — обобщенная резольвента сцепления $\mathring{A}$, а $\mathring{Q}_z = (\mathring{A} - iI)(\mathring{A} - zI)^{-1}$ (ср. с [10]).

Авторы выражают благодарность М. Г. Крейну за интерес к работе.

Վ. Մ. ԱԴԱՄՅԱՆ ԵՎ Դ. Զ. ԱՐՈՎ

Կիսաունիտար օպերատորների ունիտար շղթայակցումների մասին

Դիցուք U_1 և U_2 օպերատորները D հիլբերտյան տարածության մեջ տված V կիսաունիտար օպերատորի լայնացումներն են համապատասխանաբար H_1 և H_2 տարածություններում: (4) բանաձևով սահմանվում է $W(U_1, U_2)$ ալիքային օպերատորը: Դիցուք $\bar{S}$ կիսաունիտար օպերատորը D-ում տեղափոխելի է V-ի հետ և S_1 և S_2 ունիտար օպերատորները $\bar{S}$-ի լայնացումներն են դեպի համապատասխանաբար H_{U_i} = փ. գ. բ. $\{U_i^m D\}$, $(i = 1,2)$ տարածությունները և $U_i S_i = S_i U_i$ H_{U_i}-ում:

Այդ դեպքում ցույց է տրվում, որ $W(S_2, S_1)$ ալիքային օպերատորը մասամբ իզոմետրիկ կերպով արտապատկերում է H_{U_1}-ը H_{U_2}-ի մեջ և

$$W(S_2, S_1) = W(U_2, U_1)$$

$_1 =$ *փ. գ. բ.* $\{S_1^m D\}$*-ի վրա:*

Բերվում է պայման, որի դեպքում H_U և H_S տարածությունները համընկնում են:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *P. D. Lax, R. S. Phillips*, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 130—142. [2] *В. М. Адамян, Д. З. Аров*, ДАН СССР, т. 160, в. 1 (1965) 9—12. [3] *В. М. Адамян, Д. З. Аров*, ДАН СССР, т. 165, в. 1 (1965), 9—12. [4] *А. И. Плеснер*, ДАН СССР, т. 25, № 9, 1939, 708—710. [5] *М. А. Наймарк, С. В. Фомин*, УМН, т. X, вып. 2 (64), (1965), 112—142. [6] *К. Гофман*, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., (1963). [7] *М. Ш. Бирман, М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 144, № 3, 475—478. [8] *М. Ш. Бирман*, „Известия АН СССР", сер. матем., т. 27, в. 4 (1963). [9] *B. Sz-Nagy, C. Foias*, Acta Sci. Math., 25 (1964), 38—70. [10] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 52, № 8, (1946), 657—660.