ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIII 1966 4

МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян академик АН Армянской ССР, и А. А. Хачатрян

Некоторые задачи безмоментной теории оболочек, изготовленных из разномодульного материала

(Представлено 9/IX 1966)

1. Тонкостенная оболочка постоянной толщины h отнесена к криволинейной ортогональной системе координат α, β, γ. Причем α и β совпадают с линиями кривизны, а γ — с внешней нормалью срединной поверхности оболочки.

Считается, что отличными от нуля являются только напряжения σ_α σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$, которые не зависят от γ, т. е. они равномерно распределены по толщине оболочки

$$\sigma_\alpha = \frac{T_\alpha}{h}, \quad \sigma_\beta = \frac{T_\beta}{h}, \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{S}{h}, \tag{1.1}$$

где T_α, T_β, S — внутренние тангенциальные силы на единицу длины соответствующей координатной линии.

Принимается, что оболочка изготовлена из разномодульного материала с упругими характеристиками E^+, ν^+ (при растяжении в любом направлении) и E^-, ν^- (при сжатии в любом направлении).

Как известно [1, 2], в разномодульной теории упругости чисто геометрические и чисто статические уравнения и соотношения совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями классической теории упругости. Приведем те уравнения и соотношения классической безмоментной теории оболочек, которые будут использованы в последующем.

Уравнения равновесия

$$\begin{gathered}
\frac{\partial BT_\alpha}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot T_\beta + \frac{\partial AS}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot S = -ABX, \\
\frac{\partial AT_\beta}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}\, T_\alpha + \frac{\partial BS}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot S = -ABY, \\
k_1 T_\alpha + k_2 T_\beta = Z,
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $X(\alpha, \beta)$, $Y(\alpha, \beta)$, $Z(\alpha, \beta)$ — компоненты внешней поверхностной нагрузки; $k_1=1/R_1$, $k_2=1/R_2$ — главные кривизны и R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности; A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности.

Геометрические соотношения

$$\varepsilon_\alpha=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+k_1w,$$

$$\varepsilon_\beta=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+k_2w, \tag{1.3}$$

$$\omega=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right),$$

где ε_α, ε_β, ω — компоненты тангенциальной деформации; $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$ — тангенциальные и нормальное перемещения.

Как и в случае плоской задачи разномодульной теории упругости ([2]), закон упругости для рассматриваемой безмоментной оболочки записывается следующим образом

$$\varepsilon_\alpha=\frac{1}{h}\left[a_{11}T_\alpha+a_{12}T_\beta+(a_{22}-a_{11})\;m_1^2T_2\right],$$

$$\varepsilon_\beta=\frac{1}{h}\left[a_{11}T_\beta+a_{12}T_\alpha+(a_{22}-a_{11})\;m_2^2T_2\right], \tag{1.4}$$

$$\omega=\frac{2}{h}\left[(a_{11}-a_{12})\,S+(a_{22}-a_{11})\,m_1m_2T_2\right],$$

где a_{ik} — коэффициенты упругости, причем $a_{11}=1/E^+$, $a_{22}=1/E^-$, $a_{12}=-\nu^+/E^+=-\nu^-/E^-$; $T_2/h=\sigma_2$ — главное сжимающее напряжение, соответствующее главному направлению x_2 (см. схему); m_i — направляющие косинусы главного направления x_2.

	x_1	x_2	$x_3=\gamma$
α	l_1	m_1	$n_1=0$
β	l_2	m_2	$n_2=0$
γ	$l_3=0$	$m_3=0$	$n_3=1$

В этой схеме x_1, x_2, x_3 — главные направления напряжений и деформаций в данной точке (x_3 — совпадает с γ), l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы.

Не останавливаясь на выводах, приведем некоторые формулы, необходимые нам в дальнейшем ([2])

$$\frac{m_2}{m_1}=k=\frac{1}{2S}\left[(T_\alpha-T_\beta)+\sqrt{(T_\alpha-T_\beta)^2+4S^2}\right], \tag{1.5}$$

$$m_1^2=\frac{1}{1+k^2},\quad m_2^2=\frac{k^2}{1+k^2},\quad m_1\cdot m_2=\frac{k}{1+k^2}, \tag{1.6}$$

$$\left.\begin{matrix}T_1\\T_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[(T_\alpha+T_\beta)\pm\sqrt{(T_\alpha-T_\beta)^2+4S^2}\right]. \tag{1.7}$$

Отметим, что закон упругости (1.4) записан для случая, когда $T_1>0$, $T_2<0$. А это будет иметь место при выполнении неравенства

$$S^2 - T_\alpha T_\beta > 0 \tag{1.8}$$

Ниже приведем решение некоторых конкретных задач.

2. Круговая цилиндрическая оболочка длиной l и радиуса R, закрепленная одним торцом, подвергается растяжению с одновременным кручением усилиями T_0 и S_0, приложенными на другом торце.

Заменим $\alpha \to x$ (по образующей), $\beta \to \theta$ (по дуге окружности) и примем $A=1$, $B=R$. В рассматриваемой задаче все расчетные величины не зависят от θ. Граничные условия задачи будут

$$u=0,\ v=0 \text{ при } x=0, \tag{2.1}$$

$$T_x = T_0,\ S=S_0 \text{ при } x=l, \tag{2.2}$$

Из уравнения равновесия (1.2) с учетом

$$X=Y=Z=0, \tag{2.3}$$

при граничных условиях (2.2) находим

$$T_x = T_0,\ T_\theta = 0,\ S=S_0. \tag{2.4}$$

Отметим, что здесь во всех точках оболочки неравенство (1.8) выполняется.

Подставляя (2.4) в (1.5) и (1.7), получим

$$k = -\frac{1}{2S_0}\left(T_0 + \sqrt{T_0^2+4S_0^2}\right),\ T_2 = \frac{1}{2}\left(T_0 - \sqrt{T_0^2+4S_0^2}\right). \tag{2.5}$$

Далее, пользуясь формулами (1.3), (1.4), (1.6) и (2.5), после интегрирования получаемых дифференциальных уравнений относительно перемещений и удовлетворения граничным условиям (2.1) для компонент перемещения получим

$$u = \frac{x}{2h}\left[(a_{11}+a_{22})T_0 - (a_{22}-a_{11})\frac{T_0^2+2S_0^2}{\sqrt{T_0^2+4S_0^2}}\right],$$

$$v = \frac{xS_0}{h}\left[(a_{11}+a_{22}-2a_{12}) - (a_{22}-a_{11})\frac{T_0}{\sqrt{T_0^2+4S_0^2}}\right], \tag{2.6}$$

$$w = \frac{R}{h}\left[a_{12}T_0 - (a_{22}-a_{11})\frac{S_0^2}{\sqrt{T_0^2+4S_0^2}}\right].$$

3. Усеченная круговая коническая оболочка, закрепленная одним торцом ($r=r_1$), подвергается внутреннему давлению интенсивностью q с одновременным кручением тангенциальным усилием S_0, приложенным на другом торце ($r=r_2$).

Направим α по образующей с началом ее отсчета от торца $r=r_1$. Тогда для срединной поверхности рассматриваемой оболочки имеем

$$A=1,\ B=r,\ k_1=0,\ k_2=\frac{\cos\varphi}{r},\quad \alpha=\frac{r-r_1}{\sin\varphi},\ \frac{dr}{d\alpha}=\sin\varphi, \tag{3.1}$$

где φ — угол между образующей и осью оболочки.

В этой задаче также все расчетные величины не зависят от β.

Граничные условия задачи таковы

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad r = r_1, \tag{3.2}$$

$$T_2 = 0, \quad S = S_0 \quad \text{при} \quad r = r_2. \tag{3.3}$$

Из уравнения равновесия (1.2), с учетом

$$X = Y = 0, \quad Z = q \tag{3.4}$$

и (3.1) при граничных условиях (3.3), находим

$$T_2 = \frac{q\,(r^2 - r_2^2)}{2r\cos\varphi}, \quad T_3 = \frac{qr}{\cos\varphi}, \quad S = \frac{r_2^2}{r^2}\cdot S_0. \tag{3.5}$$

Принимая $r_2 > r_1$, нетрудно заметить, что здесь также во всех точках оболочки неравенство (1.8) выполняется.

Подставляя (3.5) в (1.5) и (1.7), получим

$$k = \frac{r}{2r_2^2 S_0}\left[\frac{q\,(r^2 + r_2^2)}{2\cos\varphi} - \sqrt{\frac{q^2\,(r^2 + r_2^2)^2}{4\cos^2\varphi} + \frac{4r_2^4}{r^2}S_0^2}\right],$$

$$T_2 = \frac{1}{2r}\left[\frac{q^2(3r^2 - r_2^2)}{2\cos\varphi} - \sqrt{\frac{q^2\,(r^2 + r_2^2)^2}{4\cos^2\varphi} + \frac{4r_2^4}{r^2}S_0^2}\right]. \tag{3.6}$$

Пользуясь формулами (1.2), (1.4), (1.6) и (3.5), после интегрирования получаемых уравнений и удовлетворения граничным условиям (3.2) для компонент перемещения получим

$$u = \frac{1}{2h\sin\varphi}\left\{\frac{(a_{11} + a_{22})\,q}{2\cos\varphi}\left[\frac{1}{2}(r^2 - r_1^2) - r_2^2\ln\frac{r}{r_1}\right] + \frac{a_{12}q}{\cos\varphi}(r^2 - r_1^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_{22} - a_{11}}{2}\int_{r_1}^{r}\frac{\frac{q^2}{2\cos^2\varphi}\,(r_2^4 - r^4) + \frac{4r_2^4}{r^2}S_0^2}{\sqrt{\frac{q^2r^2}{4\cos^2\varphi}\cdot(r^2 + r_2^2)^2 + 4r_2^4S_0^2}}\,dr\right\}, \tag{3.7}$$

$$v = \frac{S_0 r_2^2 r}{2h\sin\varphi}\left\{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12})\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_{22} - a_{11}}{\cos\varphi}\cdot q\int_{r_1}^{r}\frac{(3r^2 - r_2^2)\,dr}{r^3\sqrt{\frac{q^2r^2}{4\cos^2\varphi}\,(r^2 + r_2^2)^2 + 4r_2^4S_0^2}}\right\},$$

$$w = -u\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{r}{2h\cos\varphi}\left\{\frac{a_{11} + a_{22}}{\cos\varphi}\cdot qr - \frac{a_{12}q\,(r_2^2 - r^2)}{r\cos\varphi} - \right.$$

$$-\frac{a_{22}-a_{11}}{2}\cdot\frac{\frac{q^2r^2}{\cos^2\varphi}(r^2+r_2^2)+\frac{4r_2^4}{r^2}S_0^2}{\sqrt{\frac{q^2r^2}{4\cos^2\varphi}(r^2+r_2^2)^2+4r_2^4S_0^2}}\Bigg\}.$$

Как видно из (3.7), в формулах для перемещений содержатся интегралы, которые в общем случае не могут быть выражены через элементарные функции. Однако для конкретных значений, входящих в эти формулы параметров, указанные интегралы могут быть вычислены известными приближенными методами интегрирования.

Отметим, что из полученных в этом пункте результатов предельным переходом ($\varphi\to 0$) можно получить соответствующие результаты цилиндрической оболочки.

Обозначив $r=r_1=r_2=R$ и заменив α через x, после выполнения предельного перехода для цилиндрической оболочки получим

$$T_x=0,\ T_\beta=qR,\ S=S_0; \tag{3.8}$$

$$u=\frac{x}{h}\left[a_{12}qR-(a_{22}-a_{11})\frac{S_0^2}{\sqrt{q^2R^2+4S_0^2}}\right], \tag{3.9}$$

$$v=\frac{xS_0}{h}\left[(a_{11}+a_{22}-2a_{12})-(a_{22}-a_{11})\frac{qR}{\sqrt{q^2R^2+4S_0^2}}\right],$$

$$w=\frac{R}{2h}\left[(a_{11}+a_{22})qR-(a_{22}-a_{11})\frac{q^2R^2+2S_0^2}{\sqrt{q^2R^2+4S_0^2}}\right].$$

4. Оболочка в виде сферического пояса, закрепленная одним торцом ($\theta=\theta_1$), подвергается внутреннему давлению интенсивностью q с одновременным кручением тангенциальным усилием S_0, приложенным на другом торце ($\theta=\theta_2$).

Будем пользоваться географическими координатами, заменив α, β соответственно через θ (долгота) и φ (широта). При этом имеем

$$A=R,\ B=R\sin\theta,\ k_1=k_2=\frac{1}{R}. \tag{4.1}$$

Эта задача также обладает осесимметрией, поэтому все расчетные величины не зависят от φ.

Граничные условия задачи таковы

$$u=0,\ v=0 \text{ при } \theta=\theta_1 \tag{4.2}$$

$$T_\theta=0,\ S=S_0 \text{ при } \theta=\theta. \tag{4.3}$$

Из уравнения равновесия (1.2), с учетом

$$X=Y=0,\ Z=q \tag{4.4}$$

и (4.1) при граничных условиях (4.3), находим

$$T_\theta=\frac{qR}{2}\left(1-\frac{\sin^2\theta_2}{\sin^2\theta}\right),\quad T_\varphi=\frac{qR}{2}\left(1+\frac{\sin^2\theta_2}{\sin^2\theta}\right),\quad S=\frac{\sin^2\theta_2}{\sin^2\theta}\cdot S_0, \tag{4.5}$$

Нетрудно установить, что при напряженном состоянии оболочки, определяемом формулами (4.5), неравенство (1.8) выполняется во всех точках оболочки, если

$$\sin^4\theta_2 \geqslant \frac{q^2R^2}{q^2R^2+4S_0^2}. \tag{4.6}$$

В связи с этим будем рассматривать лишь такие оболочки, для которых во всех точках выполняется условие (4.6).

Подставляя (4.5) в (1.5) и (1.7), получим

$$k = \frac{1}{2S_0}\left(qR - \sqrt{q^2R^2+4S_0^2}\right),$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(qR - \frac{\sin^2\theta_2}{\sin^2\theta}\sqrt{q^2R^2+4S_0^2}\right). \tag{4.7}$$

Пользуясь формулами (1.3), (1.4), (1.6) и (4.7), после интегрирования получаемых дифференциальных уравнений и удовлетворения граничным условиям (4.2), для компонент перемещения получим

$$\frac{u}{qR} = -\frac{v}{2S_0} = \frac{R}{4h}\left[(a_{11}+a_{22}-2a_{12})\left(\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta_1}{\sin^2\theta_1} + \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right)\sin^2\theta_2 - \right.$$

$$\left. -(a_{22}-a_{11})\frac{2qR}{\sqrt{q^2R^2+4S_0^2}}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right]\sin\theta, \tag{4.8}$$

$$w = \frac{qR^2}{4h}\left|4a_{12} + (a_{11}+a_{22}-2a_{12})\left[1+\sin^2\theta_2 + \left(\frac{\cos\theta_1}{\sin^2\theta_1} - \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\cos\theta\sin^2\theta_2\right] - (a_{22}-a_{11})\left[\frac{qR}{\sqrt{q^2R^2+4S_0^2}}\left(1-\cos\theta\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right)+\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{q^2R^2+4S_0^2}}{qR}\frac{\sin^2\theta_2}{\sin^2\theta}\right]\right|.$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, և Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Տարամոդուլ նյութից պատրաստված թաղանթների անմոմենտ տեսության մի քանի խնդիրներ

Դիտարկված են բարակապատ թաղանթներ, որոնք պատրաստված են ձգման և սեղման դեպքում առաձգականության տարբեր մոդուլներ ունեցող նյութից։ Բերված են այդպիսի նյութից պատրաստված թաղանթների անմոմենտ տեսության անհրաժեշտ հավասարումները։ Լուծված են հետևյալ խնդիրները՝

1) մի եզրով ամրացված կլոր գլանային թաղանթը մյուս եզրում կիրառված ուժերի ազդեցության տակ ենթարկվում է միաժամանակյա ձգման և ոլորման։

2) մի եզրով ամրացված կլոր հատած կոնական թաղանթը գտնվելով ներքին ճնշման տակ միաժամանակ ոլորվում է մյուս եզրում կիրառված շոշափող ուժերով։

3) մի եզրով ամրացված գնդային գոտու ձև ունեցող թաղանթը գտնվելով ներքին ճնշման տակ միաժամանակ ոլորվում է մյուս եզրով կիրառված շոշափող ուժերով։

Դիտարկված խնդիրներում ստացված են բանաձևեր լարումների և տեղափոխումների որոշման համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян*, Основные управления теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и "сжатию, Механика твердого тела, 2. 1966. [2] *С. А. Амбарцумян*, „Известия АН АрмССР", Механика, т. XIX, № 2 (1966).