

Л. А. Петросян

Дисперсионные поверхности в одном семействе игр преследования

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 24/IX 1966)

Два игрока, преследователь P и преследуемый E , обладая постоянными скоростями v и u перемещаются в полуплоскости S , имея возможность в каждый момент времени изменять направление своего движения. Границу L полуплоскости S , которую преследуемый E не может пересечь по правилам игры, называют иногда „линией смерти“ (deadline см. (1)), а саму игру игрой „линией смерти“ (в отличие от игр с „линией жизни“, в которых целью E является пересечение границы множества S до его поимки преследователем (2, 3)). Игра имеет предписанную заранее продолжительность T . Целью P является максимальное сближение с E к моменту окончания игры. Игрок E преследует противоположную цель. В каждый момент времени игроки имеют полную информацию о своем местоположении и местоположении противника.

Формально игра определяется следующим образом.

Пусть F и I множества вектор-функций

$$\varphi(x, y, T) = |\varphi_1(x, y, T), \varphi_2(x, y, T)|$$

и

$$\psi(x, y, T) = |\psi_1(x, y, T), \psi_2(x, y, T)|,$$

заданных на R^1 и обладающих следующими свойствами.

1. Для любых $\varphi \in F$ и $\psi \in I$ система уравнений

$$\dot{x} = \varphi(x, y, T), \tag{1}$$

$$\dot{y} = \psi(x, y, T)$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях $x, y \in S$.

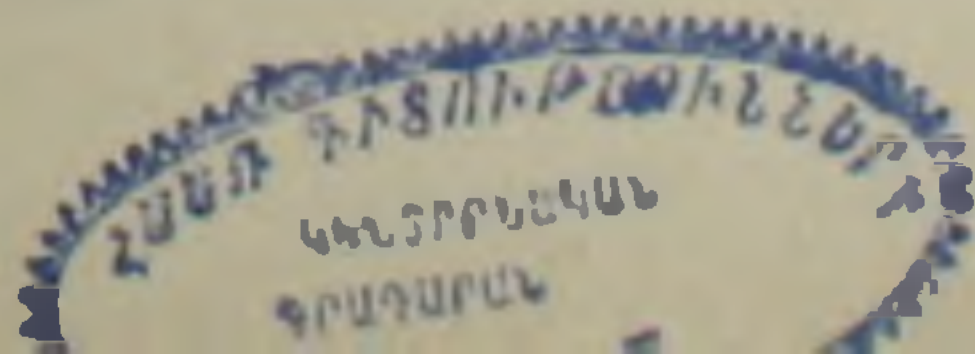
$$2. \quad |\varphi_1(x, y, T)|^2 + |\varphi_2(x, y, T)|^2 = v^2,$$

$$|\psi_1(x, y, T)|^2 + |\psi_2(x, y, T)|^2 = u^2.$$

3. В любой ситуации (φ, ψ) , $\varphi \in F$, $\psi \in I$ траектории $x(t)$ и $y(t)$ игроков P и E принадлежат полуплоскости S .

Множества вектор-функций F и I мы будем называть множествами стратегий преследователя P и преследуемого E .

1547-40



Пусть $x(t), y(t)$ решение системы уравнений (1) при начальном условии $x, y \in S$ в ситуации (φ, ψ) ; тогда выигрыш определяется следующим образом

$$K(x, y; \varphi, \psi) = -\sqrt{[x_1(T) - y_1(T)]^2 + [x_2(T) - y_2(T)]^2},$$

где $T \geq 0$ предписанная заранее продолжительность игры.

Задав множества стратегий игроков и функцию выигрыша в каждой ситуации, мы определили некоторое семейство игр преследования в нормальной форме, зависящее от двух параметров, начальных условий $x, y \in S$ и продолжительности $T \geq 0$. Каждый элемент семейства будем обозначать $\Gamma(x, y, T)$.

Пусть $C_x (C_y)$ множество точек на плоскости, в которые может попасть преследователь P (преследуемый E) за время T , используя стратегии $\varphi (\psi)$, удовлетворяющие условиям 1, 2.

Очевидно, что множество $C_x (C_y)$ представляет собой круг радиуса $vT (uT)$ с центром в точке $x (y)$. Множество точек на плоскости, в которые может попасть $P (E)$, используя стратегии $\varphi \in F (\psi \in I)$, представляет собой пересечение $C_x \cap S (C_y \cap S)$ круга $C_x (C_y)$ с полуплоскостью S .

О п р е д е л е н и е. Множество $C_x \cap S (C_y \cap S)$ называется множеством действия преследователя P (преследуемого E).

Для нахождения оптимальных стратегий игроков и функции значения игры мы рассмотрим отдельно четыре случая.

С л у ч а й А.

$$C_x \cap S \supset C_y \cap S. \quad (2)$$

В этом случае игра теряет смысл, так как возможно O — поимка (совпадение точек P и E) до момента окончания игры. Функцию значения игры полагаем равной нулю

$$V(x, y, T) = 0$$

для $x \in S, y \in S, T \geq 0$ таких, что

$$C_x \cap S \supset C_y \cap S.$$

С л у ч а й Б.

$$C_y \cap S = C_y \text{ и } C_x \cap S \neq C_y \cap S.$$

В этом случае множество действия E совпадает с его кругом действия C_y . Это означает, что ни при какой стратегии $\psi \in I$ преследуемый E не может достичь границы множества S за время T . Игра оказывается эквивалентной игре на плоскости, и ее решение было получено Штейнгаузом (см. [4]). Оптимальная стратегия P заключается в преследовании E по погонной линии, E убегает в направлении прямой, соединяющей местоположения P и E . Значение игры в этом случае равно, очевидно,

$$U(x, y, T) = -\sqrt{V(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - T(v - u)}.$$

С л у ч а й В.

$$C_y \cap S \neq C_y, x_1 \neq y_1, C_x \cap S \not\supset C_y \cap S.$$

Положим для определенности $x_1 - y_1 > 0$ ($x_1 - y_1 < 0$) (здесь система координат выбрана таким образом, что на границе полуплоскости S $x_2 = y_2 = 0$). Игрок P расположен слева (справа) от преследуемого E . Пусть $\rho(x, y)$ евклидово расстояние между точками на плоскости. Обозначим через M точку, для которой

$$\min_{x \in C_x \cap S} \rho(x, M) = \max_{y \in C_y \cap S} \min_{x \in C_x \cap S} \rho(x, y). \quad (3)$$

Так как $x_1 - y_1 > 0$ ($x_1 - y_1 < 0$) и множество $C_v \cap S$ выпукло, ограничено и замкнуто, такая точка M существует и единственна. В дальнейшем мы будем называть ее центром преследования (ср. с центром преследования в (*)). M может принадлежать или не принадлежать границе множества S . Во втором случае решение игры полностью совпадает со случаем Б. Интерес представляет первая возможность.

Теорема 1. *Оптимальная стратегия преследователя P (преследуемого E) заключается в преследовании по погонной линии центра преследования M .*

В результате в ситуации равновесия (φ^, ψ^*) центр преследования M остается неподвижным, т. е. точка M оказывается инвариантом преследования.*

Доказательство теоремы 1 достаточно громоздко, и мы ограничимся формулировкой нескольких лемм, на которых строится доказательство.

Лемма 1. *Пусть φ^* стратегия P , о которой говорится в теореме 1, и ψ некоторая произвольная стратегия E ; тогда при $x_1 - y_1 > 0$ ($x_1 - y_1 < 0$) в ситуации (φ^*, ψ) центр преследования может перемещаться только по границе множества S вправо (влево) от начального местоположения.*

Лемма 2. *В ситуации (φ^*, ψ) центр преследования, однажды оторвавшись от границы множества S , до окончания игры не может возвратиться на границу S .*

Лемма 3. *Пусть ψ^* оптимальная стратегия преследуемого E , и φ^* стратегия P , о которой говорится в теореме 1, тогда в ситуации (φ^*, ψ^*) игра прекращается в момент попадания E на границу множества S в центр преследования.*

Из теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 2. *В случае В функция значения игры определяется по формулам*

$$v_1(x, y, T) = vT - \sqrt{|x_1 - y_1 + \sqrt{(uT)^2 - y_2^2}|^2 + x_2^2},$$

при $x_1 - y_1 > 0$,
и

$$v_2(x, y, T) = vT - \sqrt{|x_1 - y_1 - \sqrt{(uT)^2 - y_2^2}|^2 + x_2^2},$$

при $x_1 - y_1 < 0$.

Случай Г.

$$x_1 - y_1 = 0, C_x \cap S = \emptyset \supset C_y \cap S.$$

Здесь мы сталкиваемся с „дисперсионной поверхностью“ в игре преследования (¹).

В каждой точке поверхности $x_1 = y_1$ оба игрока P и E имеют два выбора (в каждой точке поверхности две пары оптимальных траекторий), ведущих к одному и тому же выигрышу

$$v_1(x, y, T) = v_2(x, y, T).$$

Возникает типичная дилемма; выбор игрока зависит от выбора его противника.

Можно предложить следующее решение. В каждой точке дисперсионной поверхности игроки P и E рандомизируют свои выборы так, как если бы они играли в матричную игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

(т. е. с вероятностями $1/2, 1/2$). Выбор матрицы (4) для определения оптимального поведения игроков обусловлен тем, что одноименные выборы игроков P и E (выбор оптимальных траекторий в одной и той же области $x_1 - y_1 > 0$ или $x_1 - y_1 < 0$) ведут к одинаковому выигрышу для P и выборы оптимальных траекторий в разных областях в равной степени проигрышны для P .

Предложенное решение было бы удовлетворительным, если бы не возникала необходимость непрерывной рандомизации во времени. В действительности, если случай А исключен из рассмотрения, точка x, y при оптимальной игре только в начальный момент может находиться на дисперсионной поверхности. Действительно, поскольку e — поимка (сближение на расстояние $e > 0$) исключает оптимальность параллельного преследования, то одноименные (а тем более разноименные) выборы в матрице (4) немедленно приводят к изменению направления отрезка, соединяющего точки $x \in S, y \in S$; точка переходит в одну из областей $x_1 - y_1 > 0$ или $x_1 - y_1 < 0$. Далее игра происходит как в случае В.

Приложение к играм рода.

Игрой рода (^{1, 6}) называется антагонистическая игра преследования с неограниченным временем, в которой целью P — является e — поимка (сближение на расстояние $e > 0$) преследуемого E . Решить игру рода для игры преследования $\Gamma(x, y, T)$ означает указать множество тех начальных позиций в $x, y \in S$, для которых найдется такое $T(x, y) > 0$, что P гарантирует e — поимку за время $T(x, y)$ независимо от действий преследуемого E . То есть выделить множество тех начальных позиций в $x, y \in S$, для которых неравенство

$$V(x, y, T) \leq e \quad (5)$$

имеет неотрицательное решение $T(x, y)$.

Множество начальных позиций $x, y \in S$, для которых P гарантирует e — поимку независимо от действий E , называется выигрывающим множеством преследователя P .

Из теоретико-игровых соображений очевидно, что при $v/u > 1$ все множество S оказывается выигрывающим множеством P .

При $v/u \leq 1$ выигрывающее множество P в случаях А, Б определяется как множество тех $x, y \in S$, для которых $\rho(x, y) \leq e$; для нахождения выигрывающего множества в случаях В, Г необходимо исследовать существование неотрицательных решений неравенства

$$\sqrt{[x_1 - y_1 \pm \sqrt{(uT)^2 - y_2^2}]^2 + x_2^2} - vT \leq e.$$

Ленинградский государственный
университет

1. 2. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Հետապնդման խաղերի մի ընտանիքի դիսպերսիոն մակերևույթներ

P և E կետերը հաստատուն արագություններով շարժվում են հարթության մեջ, խաղի տևողությունը վերջավոր է: P -ի նպատակն է խաղի վերջում մինիմալացնել իր և E -ի միջև եղած հեռավորությունը, խաղի լուծումը գտնված է տիրույթներում, որոնք բաժանվում են դիսպերսիոն մակերևույթով:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն ՈՒ Ջ ՈՒ Ն

- ¹ R. Isaacs, Differential games, N. Y., 1965. ² Л. А. Петросян, ДАН СССР, т. 161, в. 1 (1965). ³ Л. А. Петросян, ДАН СССР, т. 161, в. 2 (1965). ⁴ H. Steinhaus, Definitions for a theory of games and pursuit, Naval Research Logistics Quarterly, vol. 7, № 2, 1960. ⁵ Л. А. Петросян, Н. В. Мурзов, ДАН СССР, т. 172, № 6 (1967). ⁶ R. Isaacs, Differential games of kind, Recent Advances in game theory, Princeton, 1961.