ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLIII 1966 2

ФИЗИКА

М. Л. Тер-Микаелян, член-корреспондент АН Армянской ССР, и В. М. Арутюнян

Уравнения резонансной среды

(Представлено 4/V 1966)

Взаимодействие излучения с резонансной средой исследовалось с разных сторон многими авторами. Наиболее простые расчеты основаны на кинетических уравнениях (уравнения баланса). Теория, основанная на соотношениях энергетического баланса, предполагает независимость квантов между собой (пренебрегаются фазовые соотношения). Более точными являются квазиклассические уравнения, описывающие поле излучения с помощью уравнений Максвелла, а поведение атомов с помощью уравнения для матрицы плотности. Кроме пренебрежения спонтанными переходами в такой модели делаются определенные предположения относительно мультипольности перехода (как правило, учитываются лишь низшие мультиполи). В работе ([1]) развита теория прохождения электромагнитного излучения через резонансную среду без конкретных предположений относительно мультипольности перехода. В последнее время в целом ряде работ ([2, 3]) кинетика процессов излучения и поглощения квантов резонансными двухуровневыми атомами исследовалась на основе точных уравнений квантовой электродинамики. Несмотря на привлекательность теории, основанной на квантовой электродинамике, имеются затруднения с постановкой задач с граничными условиями.

В настоящей работе с помощью усреднения операторных уравнений квантовой электродинамики получены точные квазиклассические уравнения резонансной среды. Мы будем исходить из гамильтониана для системы двухуровневых атомов и поля излучения ([1]).

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} N_- + \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} n_{\vec{k}} - \frac{1}{c} \sum_{\vec{k}} \vec{A}(\vec{k}) \vec{j}(-\vec{k}), \tag{1}$$

$$N_- = \sum_j \sigma_3^j, \quad n_{\vec{k}} = \sum_\lambda c^+_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda}, \tag{2}$$

$$\vec{A}(\vec{k}) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\vec{k}}}\right)^{1/2} \sum_\lambda \left(c_{\vec{k}\lambda} \vec{e}^{\,\lambda}_{\vec{k}} + c^+_{-\vec{k}\lambda} \vec{e}^{\,\lambda}_{-\vec{k}}\right). \tag{3}$$

$$j_\alpha(\vec{k}) = V^{-1} \sum_{j,\,\beta} (\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / \vec{k}^2)(\sigma_+^j M_\beta^* (\vec{k}) + \sigma_-^{(j)} M_\beta (-\vec{k})) e^{-i\vec{k}\vec{x}_j} \qquad (4)$$

В (1) первое и второе слагаемое—операторы энергии изолированных двухуровневых атомов и свободного поля излучения, а последнее слагаемое—энергия взаимодействия квантов с атомами; $\hbar\omega_0$ — разность энергии верхнего и нижнего уровня атома; $c_{\vec{k}\lambda}$ и $c^+_{\vec{k}\lambda}$ — операторы соответственно поглощения и излучения фотона с импульсом $\hbar\vec{k}$ и поляризацией $\vec{e}^{\lambda}_{\vec{k}}$; $\vec{x}_j$ — координата центра тяжести j — го атома; $\vec{M}(\vec{k})$ — матричный элемент перехода; $\sigma_{\pm,3}$ — операторы Паули. При написании (1) мы отбросили квадратичное по полю излучения взаимодействие, а также предположили, что матричный элемент перехода одинаков для всех атомов.

Для установления связи между векторным потенциалом и током перехода воспользуемся правилом дифференцирования операторов в квантовой механике. Уравнения, которым удовлетворяют эти операторы, имеют вид:

$$\ddot{A}_\alpha(\vec{k}) + \omega_k^2 A_\alpha(\vec{k}) = 4\pi c j_\alpha(\vec{k}), \qquad (5)$$

$$\dot{\sigma}_-^j = -i\omega_0 \sigma_-^j - i(c\hbar V^{1/2})^{-1} \sum_{\vec{k}} A_\alpha(\vec{k}) M_\alpha^*(-\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}_j} \sigma_3^j, \qquad (6)$$

$$\dot{\sigma}_3^j = 2i(c\hbar V^{1/2})^{-1} \sum_{\vec{k}} A_\alpha(\vec{k}) (\sigma_+^{(j)} M_\alpha^*(-\vec{k}) - \sigma_-^j M_\alpha(\vec{k})) e^{i\vec{k}\vec{x}_j}. \qquad (7)$$

Для перехода к квазиклассическим уравнениям выберем бесконечно малый по сравнению с λ^3 (λ — длина волны) физический объем v, содержащий тем не менее много активных атомов. Суммирование по индексу атомов j мы заменим на интегрирование по координатам центров атомов, т. е. перейдем к непрерывному распределению атомов. Замена производится по формуле

$$\sum_j \varphi(\vec{x}_j) = \int n(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, d\vec{x}, \qquad (8)$$

где $n(\vec{x})$ — плотность активных атомов. Уравнения (6) и (7) записаны для отдельного j-го атома. Соответствующие уравнения для суммарного „макроскопического" оператора $\sum_v \sigma^j_{\pm,3}$ получаются простым суммированием уравнений для отдельных атомов, находящихся в бесконечно малом физическом объеме v. Теперь мы можем перейти к квазиклассическим уравнениям. Для этого уравнения (5—7) усредним по основному квантово-механическому состоянию. Это усреднение сводится к замене всех операторов на обычные числа. Если ввести обозначения

$$\frac{1}{v} < \sum_{v} \sigma_{-}^{j} > = \rho(\vec{x}, t),$$

$$\frac{1}{v} < \sum_{v} \sigma_{+}^{j} > = \rho^{*}(\vec{x}, t), \qquad (9)$$

$$\frac{1}{v} < \sum_{v} \sigma_{3}^{j} > = \Delta(\vec{x}, t),$$

то уравнения (6) и (7) перепишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}, t) + i\omega_0\rho(\vec{x}, t) = -\frac{i}{c\hbar}\Delta(\vec{x}, t)\; M_{\alpha}^{*}(i\vec{\nabla})\; A_{\alpha}(\vec{x}, t), \qquad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(\vec{x}, t) = \frac{2i}{c\hbar}\left\{-\rho(\vec{x}, t,)\, M_{\alpha}(-i\vec{\nabla}) + \rho^{*}(\vec{x}, t)\, M_{\alpha}^{*}(i\vec{\nabla})\right\} A_{\alpha}(\vec{x}, t) \qquad (11)$$

Операторы $M_{\alpha}^{*}(i\vec{\nabla}$ и $M_{\alpha}(-i\vec{\nabla})$, зависящие от градиента $\vec{\nabla} = \partial \partial \vec{x}$ действуют на векторный потенциал (в дипольном приближении M_{α} — постоянное число).

С целью получения уравнения для потенциала усредним уравнение (5) по основному состоянию и перепишем в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right)A_{\alpha}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi c}{V}\sum_{\vec{k}, \beta, j}(\delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha}k_{\beta}/\vec{k}^2)\times$$

$$(M_{\beta}^{*}(\vec{k}) < \sigma_{-}^{j} > + M_{\beta}(-\vec{k}) < \sigma_{+}^{j} >)\exp(i\vec{k}\vec{x} - i\vec{k}\vec{x}_j). \qquad (12)$$

Введем следующие обозначения

$$F_{\alpha}(\vec{k}) = \sum_{\beta}(\delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha}k_{\beta}/\vec{k}^2)M_{\beta}^{*}(+\vec{k}),$$

$$F_{\alpha}^{*}(-\vec{k}) = \sum_{\beta}(\delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha}k_{\beta}/\vec{k}^2)\, M_{\beta}(-\vec{k}). \qquad (13)$$

Заменяя в уравнении (12) суммирование по j интегрированием и используя формулы (8), (9), а также равенство

$$\sum_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{x} - i\vec{k}\vec{x}') = V\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_{\alpha}(\vec{x}, t) - c^2\Delta A_{\alpha}(\vec{x}, t) = 4\pi c\,[F_{\alpha}(-i\vec{\nabla})\rho^{*}(\vec{x}, t) + F_{\alpha}^{*}(i\vec{\nabla})\rho(\vec{x}, t)]. \qquad (14)$$

Система уравнений (10), (11) и (14) является аналогом квазиклассических уравнений для резонансной среды. Как видно, квазиклассические уравнения имеют гораздо более сложный вид, чем обычно используемые уравнения для резонансной среды в дипольном приближении и существенно зависят от мультипольности перехода. Однако для одной (усилитель) или двух (генератор) бегущих волн система уравнений может быть упрощена. Для примера рассмотрим прохождение волны через резонансную среду. Пусть волна распространяется вдоль оси x. Обозначим проекцию $\bar{A}$ на матричный элемент перехода через A. Для одной бегущей волны представим потенциал и ток в виде

$$\left.\begin{aligned} A &= A_1(x, t)\, e^{i(kx-\omega t)} \\ \rho &= \rho_1(x, t)\, e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned}\right\} + \text{комп. сопр.} \tag{15}$$

причем будем предполагать, что A_1 и ρ_1 суть медленно меняющиеся функции по сравнению с экспонентой. Усредняя, как обычно по быстрым осцилляциям и считая плотность атомов постоянной, найдем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} = \frac{2\pi i}{\omega} M(-k)\, \rho_1, \\ &\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + i(\omega_0 - \omega)\, \rho_1 = -\frac{i}{c\hbar} M^*(-k)\, \Delta A_1, \\ &\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{2i}{c\hbar}\left[M^*(-k)\, A_1 \rho_1^* - M(-k)\, A_1^* \rho_1\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Система уравнений (16) совпадает с уравнениями для усилителя работы ([1]). Можно аналогичным способом получить уравнения для одномерного генератора (см. ([1])).

Наше приближение, которое приводит к системе квазиклассических уравнений (10), (11) и (14), соответствует замене

$$\langle A_j \rangle = \langle A \rangle \langle j \rangle \tag{17}$$

поскольку операторы $\rho_{\pm}$ соответствуют операторам „тока перехода". При этом, естественно, в полученных уравнениях отсутствуют эффекты спонтанного излучения.

Физический институт г. Ереван
Объединенная радиационная лаборатория
Академии наук Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, և Վ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Ռեզոնանսային միջավայրի հավասարումներ

Ռեզոնանսային միջավայրի կվազիդասական հավասարումները ստանալու համար օգտագործվում է քվանտային էլեկտրադինամիկայի ապարատը։ Օպերատորային հավասարումները միջինացվում են ըստ անսահման փոքր ֆիզիկական ծավալի, որը դեռևս պարունակում է մեծ քանակությամբ ատոմներ։

Ստացված կվազիդասական հավասարումներն ունեն ավելի բարդ տեսք, քան սովորաբար օգտագործվող հավասարումները, սակայն նրանք ճիշտ են բոլոր անցումների համար, այլ ոչ միայն դիպոլային մոտավորությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Л. Тер-Микаелян.* Вестник ЕГУ, № 2, (1966). [2] *А. И. Алексеев, Ю. А. Вдовин, В. М. Галицкий.* ЖЭТФ, 46, 320 (1964). [3] *А. И. Алексеев, В. М. Галицкий.* ЖЭТФ, 47, 1893 (1964).