ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIII 1966 2

МАТЕМАТИКА

Г. А. Давтян

Об одном свойстве нильпотентных p-групп

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 27/VII 1966)

В работе Хобби ([1]) для конечных p-групп доказано следующее утверждение: если $P^{(1)}=\Phi(P)$, то $K^{(1)}=\Phi(K_n)$, где n — любое целое положительное число. Цель настоящей заметки доказать справедливость этого утверждения для любых нильпотентных p-групп.

Введем следующие обозначения:
K_n — n-ый коммутант группы P; $\Gamma_n(P)$ — n-ый член нижнего центрального ряда группы P; $P^{(1)}$ — подгруппа, порожденная множеством всех элементов вида x^p, где $x\in P$; $\Phi(P)$ — подгруппа Фраттини группы P; $\theta(P)$ — подгруппа, порожденная всеми элементами вида $(x, y)=y^{-p}x^{-p}(x\cdot y)^p$, где $x, y\in P$; $[x_1,\cdots, x_s]$ коммутатор элементов $x_1,\cdots, x_s$.

По определению Хобби p-группа P называется p-абелевой, если для любых двух элементов x и y имеет место равенства $(x\cdot y)^p=x^p\cdot y^p$. Нетрудно заметить, что p-группа P тогда и только тогда будет p-абелевой, если $\theta(P)=1$.

Лемма 1. *Любой коммутатор вида* $[y^p, x]$ *имеет вид*

$$[y^p, x]=sg_4,$$

где $s\in K^{(1)}$, а $g_4\in\Gamma_4(P)$

Доказательство

$$[y^p, x]=y^{-p}x^{-1}y^px=y^{-p}(x^{-1}yx)^p=y^{-p}\{y\cdot[y, x]\}^p=(y, [y, x]). \quad (*)$$

Пусть $[y, x]=u$, вычислим $(y\cdot u)^p$

$$(yu)^2=yu\cdot yu=y^2u\cdot[u, y]\,u=y^2u^2\,[u, y]\,g_4 \quad (**)$$

$$(y\cdot u)^3=y^2u^2\,[u, y]\,g_4\cdot yu=y^2u^2\,yu\,[u, y]\,g_4$$

так как $[u, y]\,g_3\in\Gamma_3(P)$, а следовательно $[[u, y]\cdot g_4, yu]\in\Gamma_4(P)$.

Для простоты различные элементы группы $\Gamma_4(P)$ мы будем обозначать одной и той же буквой g_4. Нам существенно констатировать, что данный элемент принадлежит группе $\Gamma_4(P)$. Таким образом

$$(yu)^3=y^2u^2yu\,[u, y]\,g_4=y^3u^2\,[u^2, y]\,y\,[u, y]\,g_4=$$

$$= y^3u^3\,[u^2, y]\,g_4\,[u, y]\,g_4 = y^3u^3\,[u^2, y]\cdot[u, y]\,g_4. \qquad (1)$$

Докажем справедливость равенства

$$[u^n, y] = [u, y]^n\,g_4. \qquad (2)$$

Это равенство справедливо, очевидно, при $n = 1$.

Пусть оно верно при $n-1$, то есть

$$[u^{n-1}, y] = [u, y]^{n-1}\,g_4,$$

тогда

$$[u^n, y] = [u, y]^{u^{n-1}}\,[u^{n-1}, y] =$$

$$= u^{-(n-1)}\,[u, y]\,u^{n-1}\cdot[u, y]^{n-1}\,g_4 = [u, y]\,g_4\cdot[u, y]^{n-1}\cdot g_4 = [u, y]^n\,g_4.$$

Таким образом доказана справедливость равенства (2) для любого целого положительного числа n. Применяя это равенство из (1) получаем:

$$(yu)^3 = y^3u^3\,[u, y]^2\,g_4\,[u, y]\,g_4 = y^3u^3\,[u, y]^3\,g_4. \qquad (3)$$

Докажем справедливость следующих формул:

$$(yu)^{2n} = y^{2n}\,u^{2n}\,[u, y]^{(2n-1)\,n}\,g_4 \qquad (4)$$

$$(yu)^{2n+1} = y^{2n+1}\,u^{2n+1}\,[u, y]^{(2n+1)\,n}\,g_4. \qquad (5)$$

Справедливость этих равенств при $n=1$ нами уже доказана, это формулы (**) и (3). Таким образом мы можем применить метод математической индукции. Но нетрудно видеть, что из равенства (4) вытекает равенство (5) и наоборот.

Действительно

$$(yu)^{2n+1} = (yu)^{2n}\cdot yu = y^{2n}\cdot u^{2n}\cdot[u, y]^{(2n-1)\,n}\cdot g_4\cdot yu =$$

$$= y^{2n}\cdot u^{2n}\cdot yu\,[u, y]^{(2n-1)\,n}\cdot g_4 = y^{2n+1}\cdot u^{2n}\cdot[u^{2n}, y]\,u\cdot[u, y]^{(2n-1)\,n}\cdot g_4 =$$

$$= y^{2n+1}\cdot u^{2n+1}\cdot[u^{2n}, y]\,g_4\,[u, y]^{(2n-1)\,n}\cdot g_4 =$$

$$= y^{2n+1}\cdot u^{2n+1}\cdot[u, y]^{2n}\cdot[u, y]^{(2n-1)\,n}\cdot g_4 =$$

$$= y^{2n+1}\cdot u^{2n+1}\cdot[u, y]^{(2n+1)\,n}\cdot g_4.$$

Аналогично, из равенства $(yu)^{2n-1} = y^{2n-1}\cdot u^{2n-1}\cdot[u, y]^{(2n-1)(n-1)}\,g_4$ можно получить равенство (4). Таким образом справедливость равенств (4), (5) доказаны. При $2n+1 = p$, получаем

$$(y\,u)^p = y^p\,u^p\,[u, y]^{\frac{p\,(p-1)}{2}}\,g_4,$$

т. е.

$$(y, u) = (y, [y, x]) = [u, y]^{\frac{p\,(p-1)}{2}}\cdot g_4.$$

Поэтому подставляя это значение в (*) получим

$$[y^p, x] = [y, x]^p\,[u, y]^{\frac{p\,(p-1)}{2}}\cdot g_4 \quad \text{или}$$

$$[y^p, x] = s\cdot g_4 \text{ где } s \in K^{(1)}, \text{ а } g_4 \in \Gamma_4\,(P).$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть $u \in P^{(1)}$. Любой коммутатор вида $[u, x]$ имеет вид:

$$[u, x] = sg_4,$$

где $s \in K^{(1)}$, а $g_4 \in \Gamma_4(P)$.

Доказательство. Так как $u \in P^{(1)}$, то

$$u = y_1^p \cdot y_2^p \cdots y_s^p .$$

Таким образом нужно доказать, что

$$[u, x] = [y_1^p \cdot y_2^p \cdots y_s^p, x] = sg_4.$$

Как мы доказали (лемма 1) справедливо это равенство при $n=1$. Следовательно, можно применить метод математической индукции. Пусть справедливо равенство

$$[y_1^p \cdot y_2^p \cdots y_{s-1}^p , x] = s_1 \cdot g_4.$$

Тогда

$$[y_1^p \cdot y_2^p \cdots y_{s-1}^p \cdot y_s^p, x] = [y_1^p \cdot y_2^p \cdots y_{s-1}^p, x]^{y_s^p} \cdot [y_s^p, x] =$$

$$= (s_1 \cdot g_4)^{y_s^p} \cdot s_2 g_4 = y_s^{-p} s_1 y_3^p \cdot y_s^{-p} g_4 y_s^p \cdot s_2 g_4 = s \cdot g_4,$$

так как подгруппы $K^{(1)}$ и $\Gamma_4(P)$ инвариантны. Что требовалось доказать.

Следствие 2. Пусть $K \subseteq P^{(1)}$ и $K^{(1)} = 1$, тогда $\Gamma_3(P) = 1$.

Доказательство. Так как $K \subseteq P^{(1)}$, то каждый коммутатор вида $[u, y]$, где $u \in K$ имеет вид:

$$[u, x] = s \cdot g_4$$

где

$$s \in K^{(1)}, \text{ а } g_4 \in \Gamma_4(P). \text{ Но } K^{(1)} = 1.$$

Таким образом $\Gamma_3(P) \subseteq \Gamma_4(P)$. Так как группа нильпотентна, то из последнего включения вытекает $\Gamma_3(P) = 1$.

Лемма 2. *Если P нильпотентная p-группа, то*

$$\Phi(P) = P^{(1)} K.$$

Доказательство. Включение $P^{(1)} K \subseteq \Phi(P)$ верно (([2]) следствие 10.3.2. стр. 176). Докажем обратное включение $\Phi(P) \subseteq P^{(1)} K$. Из включения $P^{(1)} K \subseteq \Phi(P)$ следует, что фактор-группа $P/\Phi(P)$ абелевая с элементами кроме единицы имеющими порядок p. По первой теореме Прюфера (([3]), стр. 156) фактор-группа $P/\Phi(P)$ — разложима в прямое произведение циклических групп. Пусть M — множество представителей смежных классов базиса абелевой группы $P/\Phi(P)$, тогда, очевидно, множество M служит минимальным базисом группы P в том смысле, что любое собственное подмножество множества M уже не может порождать всю группу P.

Пусть x — произвольный элемент группы $\Phi(P)$. Элемент X имеет представление

$$x = x_p \cdot x_q \cdots x_r, \tag{6}$$

где элементы $x_p, x_q, \cdots, x_r$ принадлежат множеству M. Пусть в множестве элементов $x_p, x_q, \cdots, x_r$ входят следующие различные элементы $x_1, x_2, \cdots, x_k$. Тогда упорядочивая выражение (6) приведем его к виду

$$x = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} \cdot s, \tag{7}$$

где $s' \in K$.

Если вычет α_i по модулю p обозначить через β_i, то путем дальнейших очевидных преобразований можно выражение (7) представить в форме

$$x = (x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdots x_k^{\beta_k}) \cdot (x_1^{\gamma_1 p} \cdot x_2^{\gamma_2 p} \cdots x_k^{\gamma_k p}) \cdot s',$$

где $s' \in K$.

Но последний элемент принадлежит, очевидно, подгруппе Фраттини группы P тогда и только тогда, когда $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$, то есть когда X имеет вид:

$$x = x_1^{\gamma_1 p} \cdot x_2^{\gamma_2 p} \cdots x_k^{\gamma_k p} \cdot s', \text{ где } s' \in K.$$

Таким образом $x \in M^{(1)}K$ и тем более $x \in P^{(1)} \cdot K$, что и требовалось доказать.

Теорема. *Пусть P — нильпотентная p-группа. Тогда если* $P^{(1)} = \Phi(P)$, то $K_n^{(1)} = \Phi(K_n)$.

Доказательство. Пусть P — p-группа минимального класса нильпотентности l для которого выполняется условие $P^{(1)} = \Phi(P)$, но существует такое $n \geqslant 1$, что $K_n^{(1)} \neq \Phi(K_n)$, но $K^{(1)} \neq \Phi(K)$. так как если было бы $K^{(1)} = \Phi(K)$, то отсюда следовало бы (ввиду того, что K — p-группа класса нильпотентности меньше, чем l), что $K_n^{(1)} = \Phi(K_n)$ при $n = 1, 2, 3$, что не верно. Таким образом $K^{(1)} \neq \Phi(K)$. Докажем, что $K^{(1)} = 1$. Пусть $K^{(1)} \neq 1$. Рассмотрим группу $H = P/K^{(1)}$. Докажем, что группа H удовлетворяет следующим условиям:

1. H — группа нильпотентности меньше чем l.
2. $H^{(1)} = \Phi(H)$,
3. $K^{(1)}(H) = 1$.

1. Так как P группа нильпотентности l, то для любых $l+1$ элементов $x_1, x_2, \cdots, x_l, x_{l+1}$, коммутатор $[x_1, x_2, \cdots, x_l, x_{l+1}] = 1$. Нам нужно доказать, что коммутаторы вида $[x_1, x_2, \cdots, x_l]$ принадлежат подгруппе $K^{(1)}$ откуда будет следовать, что $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_l] = 1$, где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_l$ образы элементов $x_1, x_2, \cdots, x_l$ при гономорфизме $P \to H = KP/^{(1)}$, а из последнего равенства будет следовать, что подгруппа H-группа нильпотентности меньше чем l. Так как $K \subseteq P^{(1)}$, то на основании леммы 1 имеем

$$[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3] = sg_4,$$

где

$$s \in K^{(1)}, \text{ а } g_4 \in \Gamma_4(P).$$

Пусть

$$[x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}] = sg_i,$$

где

$$s \in K^{(1)}, \text{ а } g_i \in \Gamma_i(P),$$

тогда

$$[x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i] = [[x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}], x_i] = [sg_i, x_i] =$$

$$= [s, x_i]^{g_i} \; [g_i, x_i] = g_i^{-1} \, [s, x_i] \, g_i \cdot g_{i+1}, \text{ но } \; [s, x_i] = s^{-1} x_i^{-1} s x_i = \bar{s},$$

ибо

$$x_i^{-1} s x_i \in K^{(1)}$$

ввиду инвариантности $K^{(1)}$, по той же причине

$$g_i^{-1} [s, x_i] \, g_i = g_i^{-1} \bar{s} g_i \in K^{(1)}.$$

Таким образом коммутатор $[x_1, x_2, \cdots, x_i]$ при любом целом i имеет вид

$$[x_1, x_2, \cdots, x_i] = sg_{i+1},$$

где

$$s \in K^{(1)}, \text{ а } g_{i+1} \in \Gamma_{i+1}(P)$$

положив $i = l$, получим

$$[x_1, x_2, \cdots, x_l] = s, \text{ так как } g_{l+1} = 1.$$

Таким образом утверждение 1 доказано.

2. Для доказательства равенства $H^{(1)} = \Phi(H)$, на основании леммы 2, достаточно установить, что $K(H) \subseteq H^{(1)}$. Пусть h_1 и h_2 любые два элемента группы H. Имеем

$$[h_1, h_2] = [x_1, x_2] \cdot K^{(1)}(P),$$

так как

$$[x_1, x_2] \in P^{(1)}, \text{ то } [x_1, x_2] \, K^{(1)}(P) \in H^{(1)},$$

то есть

$$[h_1, h_2] \in H^{(1)}$$

следовательно, $K(H) \subseteq H^{(1)}$, что требовалось доказать.

3. Докажем, что $K^{(1)}(H) = 1$. Любой элемент $\bar{y} \in K(H)$ имеет вид $\bar{y} = y \, K^{(1)}(P)$, где $y \in K(P)$, а следовательно, $\bar{y}^p = y^p \, K^{(1)}(P) = K^{(1)}(P)$, таким образом $K^{(1)}(H) = 1$.

Из свойств 1, 2, 3, ввиду выбора группы P вытекает

$$1 = K^{(1)}(H) = \Phi(K(H)).$$

Поэтому

$$1 = \Phi(K(H)) = \Phi\left(\frac{K(P)}{K^{(1)}(P)}\right) = \frac{\Phi(K(P)) \cdot K^{(1)}(P)}{K^{(1)}(P)}$$

так, что $K^{(1)}(P) \supseteq \Phi(K(P))$, а следовательно, $K^{(1)}(P) = \Phi(K(P))$, что противоречит нашему предположению. Таким образом $K^{(1)}(P) = 1$. При выполнении последнего равенства из следствия 2 вытекает $\Gamma_3(P) = 1$, т. е. $K(P)$ — абелевая группа, а следовательно $K^{(1)}(P) = \Phi(K(P))$, что опять противоречит условию, $K^{(1)}(P) \neq \Phi(K(P))$. Теорема доказана.

УКП РИИЖТ

Գ. Հ. ԴԱՎԹՅԱՆ

Նիլպոտենտ p-խմբերի մի հատկության մասին

Չ. Հոբբի (3) աշխատանքում վերջավոր p-խմբերի համար ստացված է հետևյալ արդյունքները.

Եթե $P^{(1)} = \Phi(P)$, ապա $K_n^{(1)} = \Phi(K_n)$, որտեղ K_n-ը P խմբի n-րդ կոմուտանտն է, $K_n^{(1)}$-ը K_n-ի այն ենթախումբն է, որն առաջացել է x^p տեսքի բոլոր էլեմենտներից, որտեղ $x \in K_n$ (n-ը ցանկացած ամբողջ դրական թիվ է)։

Տվյալ աշխատանքում առաջին և երկրորդ լեմմաների հիման վրա ապացուցվում է վերոհիշյալ պնդման արդարացիությունը ցանկացած նիլպոտենտ p-խմբերի համար։

Իր հերթին առաջին լեմմայից բխում է Հոբբի (3) հետևյալ արդյունքը։

Եթե $P^{(1)} = \Phi(P)$ և $K^{(1)} = 1$, ապա $\Gamma_3 = 1$, որտեղ Γ_3-ը P խմբի ստորին կենտրոնական շարքի երրորդ էլեմենտն է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ch. Hobby*, A characteristic subgroup a p-group, „Pacif., J. Math" 1960, 10, 3, p 853—858. [2] *М. Холл*. Теория групп, Изд. ин. лит., 1963. [3] *А. Г. Курош*. Теория групп, изд. 2, Гостехиздат, 1953.