ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIII 1966 2

МАТЕМАТИКА

Ф. С. Лисин

О приближении в среднем с весом по площади регулярных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 1/VI 1966)

Пусть $\overline{B}$ — ограниченное замкнутое множество плоскости комплексного переменного z. Через $L_p(\overline{B})$, $p>1$ обозначим пространство комплексных функций, вещественная и мнимая часть которых измеримы в $\overline{B}$, а норма конечна, т. е.,

$$\|f\|_p^{\overline{B}} = \left\{ \iint_{\overline{B}} |f(z)|^p \, d\sigma \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где $d\sigma$ — элемент площади.

Пусть $h(z)$ — вещественная, неотрицательная для $z \in \overline{B}$ функция, $h(z) \in L_1(\overline{B})$ и $\operatorname{mes}\{z \in \overline{B} : h(z) = 0\} = 0$. Через $A_p(\overline{B}, h)$ обозначим класс функций $f(z)$, регулярных во внутренних точках $\overline{B}$ таких, что их вещественная и мнимая части измеримы в $\overline{B}$ и

$$\| h^{\frac{1}{p}} f \|_p^{\overline{B}} < \infty.$$

При этом функцию $h(z)$ будем называть весом.

Пусть $f(z) \in A_p(\overline{B}, h)$, для $z \overline{\in} \overline{B}$ всегда будем полагать $f(z) = 0$, $h(z) = 0$.

Если для функции $f(z)$ класса $A_p(\overline{B}, h)$, для всех комплексных ζ

$$\iint_{\overline{B}} h(z) \, |f(z+\zeta)|^p \, d\sigma < \infty,$$

то будем писать $f(z) \in A_p^0(\overline{B}, h)$. Легко показать, что если $f(z) \in A_p^0(\overline{B}, h)$, то $f(z) \in A_p(\overline{B}, 1)$. Отсюда следует, что в классе $A_p^0(\overline{B}, h)$ имеет смысл интегральный модуль непрерывности с весом

$$\omega(\delta) = \sup_{|\zeta| \leq \delta} \left\{ \iint_{\overline{B}} h(z) \, |f(z+\zeta) - f(z)|^p \, d\sigma_z \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

При этом $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

В этой заметке устанавливается возможность приближения рациональными функциями (в частности полиномами) в среднем по площади с весом функций класса A_p^0 $(\bar{B}, h)$ для широкого класса замкнутых множеств $\bar{B}$. При этом существенно используются некоторые идеи С. Н. Мергеляна в соответствующих вопросах равномерного приближения [2] и результаты из [5] стр. 110—114.

Мы будем рассматривать только такие множества $\bar{B}$, любая порция которых имеет положительную плоскую меру.

Найдем условия, которые нужно наложить на $\bar{B}$, чтобы множество функций, регулярных на $\bar{B}$, было всюду плотно в пространстве A_p^0 $(\bar{B}, h)$.

Пусть $\bar{B}_0 = \bar{B}_\delta$, D имеют тот же смысл, что и в [5] стр. 108, $\bar{B}_* = \bar{B}\,\bar{B}_\delta$, $\bar{E}_{n\delta}$ — множество тех точек $z \in \bar{B}_*$, расстояние которых до $C\bar{B}_*$ не меньше $\frac{1}{2} n\delta$ $n = 1, 2, \cdots$. $D_n^* = D\,\bar{E}_{n\delta}$.

На множестве $\bar{B}_\delta$ функцию $f_{\delta, n}(z)$, регулярную на $\bar{B}$ и приближающую в среднем с весом данную функцию $f(z)$, можно положить равной нулю. При этом в силу того, что при $\delta \to 0$ $\operatorname{mes} \bar{B}_\delta \underset{\delta \to 0}{\to} 0$, будем иметь для любого $n = 1, 2 \cdots$ при

$$\left\{ \iint\limits_{\bar{B}_\delta} h(z)\, |f(z) - f_{\delta, n}(z)|^p \, d\sigma \right\}^{\frac{1}{p}} = \|h^{\frac{1}{p}} f\|_p^{\bar{B}\delta} \to 0. \tag{1}$$

Перейдем к построению функции $f_{\delta, n}(z)$, регулярной на $\bar{B}$ и приближающей $f(z)$ в среднем с весом на $\bar{B}_*$.

Для этого следуя [2], (см. также [5] стр. 111) введем функции

$$K_\delta(r) = \begin{cases} \dfrac{12}{\pi\delta^2}\left(1 - \dfrac{2r}{\delta}\right) & 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{\delta}{2} \\ 0 & r > \dfrac{\delta}{2} \end{cases} \tag{2}$$

$$G_{\delta, n}(z) = \iint\limits_{D_\delta} G_{\delta, n-1}(\zeta)\, K_\delta(|\zeta - z|)\, d\sigma_\zeta, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

где D_δ круг $|\zeta - z| \leqslant \frac{\delta}{2}$, а $G_{\delta, 0}(z) = f(z)$.

Принимая во внимание, что $f(z) \in A_p^0(\bar{B}, h)$ нетрудно убедиться в том, что $G_{\delta, n}(z)$, $n = 1, 2, \cdots$ непрерывна на всей конечной плоскости.

Так же как в [5], стр. 112 показывается, что $G_{\delta, n}(z)$, $n = 2, 3, \cdots$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ на всей конечной плоскости.

Поэтому функция

$$g_{\delta, n}(z) = \frac{\partial G_{\delta, n}(z)}{\partial x} + i \frac{\partial G_{\delta, n}(z)}{\partial y}, \quad n=2, 3, \cdots \tag{4}$$

определена и непрерывна по x и y для всех конечных x и y и

$$g_{\delta, n}(z) = \iint\limits_{D_\delta} G_{\delta, n}(\zeta) \left[\frac{\partial}{\partial x} K_\delta(|\zeta - z|) + i \frac{\partial}{\partial y} K_\delta(|\zeta - z|) \right] d\sigma_\zeta . \tag{5}$$

Непосредственно проверяются следующие свойства введенных функций

$$\iint\limits_{D_\delta} K_\delta(|\zeta - z| \, d\sigma_\zeta = 1, \tag{6}$$

$$\iint\limits_{D_\delta} \frac{\partial}{\partial x} K_\delta(|\zeta - z|) \, d\sigma_\zeta = \iint\limits_{D_\delta} \frac{\partial}{\partial y} K_\delta(|\zeta - z|) \, d\sigma_\zeta = 0, \tag{7}$$

$$f(z) \equiv G_{\delta, n}(z), \quad n = 1, 2, \cdots, \quad z \in \bar{E}_{n\delta}, \tag{8}$$

$$g_{\delta, n}(z) \equiv 0, \quad n = 2, 3, \cdots, \quad z \in \bar{E}_{n\delta}. \tag{9}$$

Лемма 1. *Пусть $\bar{B}$ — любое ограниченное замкнутое множество $f(z) \in A_p^0(\bar{B}, h)$, $p \geqslant 1$. Тогда для $n = 1, 2, \cdots$*

$$\| h^{\frac{1}{p}} (f - G_{\delta, n}) \|_p^{\bar{B}} \leqslant n\omega\left(\frac{\delta}{2}\right). \tag{10}$$

Доказательство. Для $n = 1$ с учетом (6) можем написать

$$\| h^{\frac{1}{p}} (f - G_{\delta, n}) \|_p^{\bar{B}} = \left\{ \iint\limits_{\bar{B}} h(z) \left| \iint\limits_{D_\delta} [f(z) - f(\zeta)] \, K_\delta(|\zeta - z|) \, d\sigma_\zeta \right|^p d\sigma_z \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Во внутреннем интеграле заменим переменную, полагая $\zeta - z = re^{i\varphi}$ после чего применим к интегралу обобщенное неравенство Минковского ([6]) стр. 601. Получим с учетом (6), что (10) верно для $n = 1$.

Аналогично, учитывая, что для $n = 1$, (10) верно, получим

$$\| h^{\frac{1}{p}} (G_{\delta, n} - G_{\delta, n-1}) \|_p^{\bar{B}} \leqslant \omega\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Отсюда утверждение леммы легко следует с помощью неравенства Минковского.

Обозначим через L границу $\bar{B}$, пусть ζ — любая точка L, K_n^ζ — открытый круг радиуса $n\delta$ с центром в точке ζ, $D_n^\zeta = K_n^\zeta \cap C\bar{B}$.

Через $\gamma(D_{n\delta}^\zeta)$ обозначим аналитическую меру множества D_n^ζ (см. ([5]), стр. 103) и пусть $\gamma_{n\delta}(\bar{B}) = \inf \gamma(D_{n\delta}^\zeta)$, где нижняя грань берется по всем точкам $\zeta \in L$.

Нетрудно показать, что для любого ограниченного замкнутого множества $\bar{B}$ $\gamma_{n\delta}(\bar{B}) > 0$.

Для дальнейшего нам потребуются следующие утверждения из [5] стр. 110 и 113, которые мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 2. *Для любого ограниченного замкнутого множества* $\overline{B}$ *и произвольного числа* λ, *удовлетворяющего условию* $0<\lambda<\frac{\gamma_{n\delta}(\overline{B})}{n\delta}$, *существуют функция* $g_n(z,\zeta)$ $n=2,3,\cdots$ $z\in D$, $\zeta\in\overline{D}_n^*$ *регулярная по* z *на* D *при всяком* $\zeta\in\overline{D}_n^*$, такая что

$$|g_n(z,\zeta)|\leqslant F_\lambda\cdot\frac{1}{n\delta},\quad F_\lambda=\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{3}{\lambda^2}\right)$$

$$\left|\frac{1}{\zeta-z}-g_n(z,\zeta)\right|\leqslant(4+8F_\lambda)\frac{(n\delta)^2}{|\zeta-z|^2}$$

и функция

$$f_{\delta,n}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{G_{\delta,n}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_n^*}g_n(z,\zeta)\,g_{\delta,n}(\zeta)\,d\sigma_\zeta$$

регулярная на D, $n=2,3,\cdots$, Γ — *граница* D.

Лемма 3. *Для любого ограниченного замкнутого множества* $\overline{B}$, *числа* λ, *удовлетворяющего условию леммы 2 и для произвольной функции* $f(z)\in A_p^{\text{II}}(\overline{B},h)$, $p\geqslant 1$ *существует открытое множество* $D_\delta\supset\overline{B}$ *и функция* $f_{\delta,n}(z)$, *регулярная на* D_δ *такая, что для* $n=2,3,\cdots$

$$\|h^{\frac{1}{p}}(f-f_{\delta,n})\|_p^{\overline{B}}\leqslant 25\,n\,(2+3F_\lambda)\,\omega\left(\frac{\delta}{2}\right)+\|h^{\frac{1}{p}}f\|_p^{\overline{B}_\delta}.$$

Доказательство. Примем за D_δ множество D, а за $f_{\delta,n}(z)$ функцию леммы 2 и оценим $|G_{\delta,n}(z)-f_{\delta,n}(z)|$ на множестве D.

Так как $G_{\delta,n}(z)$ можно представить в виде (см. [5] стр. 113)

$$G_{\delta,n}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{G_{\delta,n}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_{n\delta}^*}\frac{g_{\delta,n}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\sigma_\zeta$$

для $z\in D$, то, используя лемму 2, можем написать

$$G_{\delta,n}(z)-f_{\delta,n}(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_{n\delta}^*}g_{\delta,n}(\zeta)\left|\frac{1}{\zeta-z}-g_n(z,\zeta)\right|d\sigma_\zeta. \tag{11}$$

Фиксируем любое $z\in D$ и пусть $q(\delta)>\delta$, $q(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. С помощью неравенств леммы 2 получаем

$$|G_{\delta,n}(z)-f_{\delta,n}(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2n\delta}|g_{\delta,n}(z+re^{i\varphi})|\cdot\left|\frac{F_\lambda\cdot r}{n\delta}+1\right|dr\,d\varphi+$$

$$+(n\delta)^2\frac{2+4F_\lambda}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{2n\delta}^{2nq(\delta)}|g_{\delta,n}(z+re^{i\varphi})|\cdot\frac{dr\,d\varphi}{r^2}+$$

$$+(n\delta)^2\frac{2+4F_\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{2nq(\delta)}^{\infty}|g_{\delta,n}(z+re^{i\varphi})|\frac{dr\,d\varphi}{r^2}. \qquad (12)$$

Оценивая с помощью (12) $\|h^{\frac{1}{p}}(G_{\delta,n}-f_{\delta,n})\|_p^{\overline{B}_*}$ получим

$$\|h^{\frac{1}{p}}(G_{\delta,n}-f_{\delta,n})\|_p^{\overline{B}_*}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\left\{\iint\limits_{\overline{B}_*}h(z)\,d\sigma_z\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{2n\delta}|g_{\delta,n}(z+re^{i\varphi})|\cdot\left|\frac{F_\lambda\cdot r}{n\delta}+1\right|dr\,d\varphi\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\frac{2(1+2F_\lambda)}{\pi}(n\delta)^2\left\{\iint\limits_{\overline{B}_*}h(z)d\sigma_z\left[\int_0^{2\pi}\int_{2n\delta}^{2nq(\delta)}|g_{\delta,n}(z+re^{i\varphi})|\frac{dr\,d\varphi}{r^2}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\frac{2(1+2F_\lambda)}{\pi}(n\delta)^2\left\{\iint\limits_{\overline{B}_*}h(z)d\sigma_z\left[\int_0^{2\pi}\int_{2n\delta}^{2nq(\delta)}|g_{\delta,n}(z+re^{i\varphi})|\frac{dr\,d\varphi}{r^2}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad (13)$$

К каждому слагаемому правой части (13) применим обобщенное неравенство Минковского ([6] стр. 601) и после элементарных вычислений получим

$$\|h^{\frac{1}{p}}(G_{\delta,n}-f_{\delta,n})\|_p^{\overline{B}_*}\leqslant 2n\delta\,(1+F_\lambda)\,J_1+$$

$$+2(1+2F_\lambda)\frac{n\delta}{q(\delta)}\left[(q(\delta)-\delta)\,J_2+\delta J_3\right], \qquad (14)$$

где

$$J_k=\sup\left\{\iint\limits_{\overline{B}_*}h(z)\,|g_{\delta,n}(z+r_ke^{i\varphi})|^p\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}},\ k=1,\,2,\,3$$

$$0\leqslant r_1<2n\delta,\ 2n\delta\leqslant r_2<2nq(\delta),\ 2nq(\delta)\leqslant r_3<\infty. \qquad (15)$$

Для оценки сверху J_k представим $g_{\delta,n}(z+r_ke^{i\varphi})$ полагая $z+r_ke^{i\varphi}=\zeta_k$, и используя (5) и (7) в виде

$$g_{\delta,n}(\zeta_k)=\frac{24}{\pi\delta^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta/2}[G_{\delta,n}(\zeta_k)-G_{\delta,n}(\zeta_k+\rho e^{i\theta})]\,e^{i\theta}\rho\,d\rho\,d\theta. \qquad (16)$$

Подставим в (15) значение $g_{\delta,n}(z+\zeta_ke^{i\varphi})$ из (16), а затем поменяем порядок интегрирования с помощью обобщенного неравенства Минковского. После несложных вычислений получим следующую оценку для интеграла, состоящего в правой части (15).

$$\left\{\iint\limits_{\overline{B}_*}h(z)\,|g_{\delta,n}(z+re^{i\varphi})|^p\,d\sigma_z\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{6}{\delta} \sup \left\{ \iint\limits_{\overline{B}_*} h(z) \left| G_{\delta, n}(z + re^{i\varphi}) - G_{\delta, n}(z + re^{i\varphi} + \rho e^{i\theta}) \right|^p d\sigma_z \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где верхняя грань берется по всем $\rho \leqslant \frac{\delta}{2}$.

Поступая здесь так же, как при доказательстве леммы 1, будем иметь

$$\| h^{\frac{1}{p}} (G_{\delta, n} - f_{\delta, n}) \|_p^{\overline{B}_*} \leqslant 124\, n^2 (2 + 3 F_\lambda)\, \omega(q(\delta)). \qquad (18)$$

А из (18), (9) и (1) при помощи неравенства Минковского сразу получаем утверждение леммы.

Непосредственно из предыдущего получается.

Теорема 1. *Если для замкнутого ограниченного множества $\overline{B}$ найдется $\lambda > 0$, независящее от δ такое, что для какой-нибудь последовательности $\{\delta_m\}$ положительных чисел, сходящейся к нулю будет выполнено неравенство $\gamma_{\delta_m}(\overline{B}) > \lambda\delta_m$, то множество регулярных на $\overline{B}$ функций всюду плотно в пространстве $A_p^0(\overline{B}, h)$, $p \geqslant 1$.*

Из теоремы 1 с помощью известной теоремы ([5]) стр. 115) сразу следует.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 множество рациональных функций с полюсами вне $\overline{B}$ всюду плотно в пространстве $A_p^0(\overline{B}, h)$, $p \geqslant 1$.*

Замечание 1. Для случая $h(z) \equiv 1$ теорема 1 сформулирована в ([4]) при несколько более слабых ограничениях, накладываемых на $\overline{B}$.

Из теоремы 2, используя метод интегрального преобразования (см. ([1]) нетрудно получить:

Следствие 1. Пусть B — область Каратеодори, $z = \psi(w)$ — функция однолистно и конформно отображающая круг $K : |w| < 1$ на B. Для полноты системы полиномов в классе $A_p(B, h)$, $p \geqslant 1$ необходимо и достаточно, чтобы система полиномов была полна в классе $A_p(K, H)$, где $H(w) = h(\psi(w)) |\psi'(w)|^2$. Если же для некоторого $\alpha > 0$ $\frac{h(\psi(w))}{(1 - |w|)^\alpha} \in L_1(K, 1)$, то можно положить $H(w) - h(\psi(w))$.

Ленинградский государственный
университет

Ֆ. Ս. ԼԻՍԻՆ

Հարթ տիրույթում ռեգուլյար ֆունկցիաների միջին, կշռով մոտարկման մասին

Հոդվածում դիտարկված է վերջավոր $\overline{B}$ հարթ տիրույթում ռեգուլյար $f(z)$ ֆունկցիաների այնպիսի $A_p^0(\overline{B}, h)$ դասը, որ ցանկացած δ-ի համար

$$\iint_B h(z)\,|f(z+\zeta)|^p\,d\sigma < \infty,$$

որտեղ $h(z)$ — կշռային ֆունկցիան է, $p > 1$։

Ուսումնասիրված է $C\overline{B}$-ում բևեռներ ունեցող ռացիոնալ ֆունկցիաների R բազմության լրիվության հարցը $A_p^0(\overline{B}, h)$ դասում։

Հիմնական արդյունքը տրված է հետևյալ թեորեմով՝

Դիցուք L-ը $\overline{B}$-ի եզրն է, $K_\zeta^\delta - |z-\zeta| < \delta$ շրջանն է, $\zeta \in L$, $\gamma(D_\zeta^\delta) - D_\zeta^\delta = K_\zeta^\delta \cap C\overline{B}$ բազմության անալիտիկ չափն է, $\gamma_\delta(\overline{B}) = \inf_{\zeta \in L} \gamma(D_\zeta^\delta)$։ Եթե δ-ից անկախ գոյություն ունի $\lambda > 0$ այնպես, որ $\lim_{\delta \to 0} \gamma_\delta(\overline{B}) > \lambda\delta$, ապա R բազմությունը ամենուրեք խիտ է $A_p^0(\overline{B}, h)$ տարածության մեջ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 7, № 1 (1947). [2] *С. Н. Мергелян*, Усп. матем. наук 7, в. 2 (1952). [3] *С. Н. Мергелян*, Усп. матем. наук, 8, в. 4 (1953) [4] *С. О. Синанян*, ДАН АрмССР, т. 35, № 3 (1962). [5] *В. И. Смирнов* и *Н. А. Лебедев*, Конструктивная теория функций комплексного переменного, Изд. Наука, М.—Л., 1964. [6] *А. Ф. Тиман*, Теория приближения функций действительного переменного. Госфизматиздат, М., 1960.