ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLIII 1966 1

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

О полноте системы собственных функций для одного класса краевых задач с индефинитной формой

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 4/IV 1966)

В настоящей заметке рассматривается следующая однородная краевая задача на собственные значения

$$Mu + 2\lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \tag{I}$$

$$u\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = \cdots = \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial n^{\nu-1}}\Big|_\Gamma = 0, \tag{II}$$

где M, N, L — однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка 2ν от независимых переменных $x_1 \cdots, x_m$ (целое число $\nu \geqslant 1$).

Γ — граничная поверхность m-мерного эллипсоида Ω, в котором рассматривается краевая задача (I), (II).

n — внешняя нормаль к Γ.

Задача (I), (II) в случае, когда оператор L отсутствует, первоначально изучена в работах Р. А. Александряна [1,2] (случай $\nu = 1$, $m = 2$, N — эллиптический оператор). Случай произвольных ν и m, а также краевые задачи более общего вида были изучены в работах ряда других авторов [3,4,5]. В одном частном случае $\left(M = \frac{\partial^2}{\partial y^2},\right.$ $N = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, $\left. L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^3}\right)$ задача (I), (II) рассмотрена в работе [6], в которой получены рекуррентные формулы, определяющие полную систему полиномиальных собственных функций этой задачи.

Обозначим через R пространство всех полиномов от $x_1 \cdots x_m$, а через $\mathring{R}_l$ — пространство тех полиномов из R, степени которых не превышают l и которые удовлетворяют граничным условиям (II). Положим $\mathring{R} = \bigcup\limits_{l=2\nu}^{\infty} \mathring{R}_l$.

Очевидно, что операторы M и L отображают $\mathring{R}$ в R. Относительно операторов M и L предполагается следующее:

$$(A)\ (-1)^\nu \int_\Omega MP\cdot Pd\Omega < 0 \text{ и } (B)\ (-1)^\nu \int_\Omega LP\cdot Pd\Omega > 0$$

для всех $P \neq 0 \in R$. Легко заметить, как это следует из сделанного предположения, что отображения $R \xrightarrow{M} R$ и $R \xrightarrow{L} R$ являются изоморфизмами и поэтому операторы M и L имеют обратные M^{-1} и L^{-1}, отображающие R на R.

Пусть $W_2^{(\nu)}$ соболевское пространство функций, имеющих обобщенные производные до ν-ого порядка, суммируемых с квадратом модуля в области Ω и обращающихся в нуль почти везде на Γ вместе с производными до $\nu-1$-ого порядка.

Теорема. *При условии* (A) *и* (B) *однородная краевая задача* (I), (II) *допускает полную систему полиномиальных собственных функций в* $W_2^{(\nu)}$.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из двух вспомогательных предложений, для установления которых необходимы некоторые предварительные построения.

Применяя с обеих сторон равенства (I) оператор L^{-1}, обратный к оператору L, мы можем однородную краевую задачу (I), (II) в классе полиномов R переписать в виде операторного уравнения

$$\Pi_1 u + 2\lambda \Pi_2 u - \lambda^2 E u = 0, \tag{3}$$

где $\Pi_1 = -L^{-1}M$, $\Pi_2 = -L^{-1}N$.

Введем прямую сумму пространств $R \times R = \overset{2}{H}$. Тогда уравнение (3) можно представить в виде

$$(A - I)\vec{u} + \mu B\vec{u} = 0, \quad \mu = \frac{1}{\lambda}, \tag{4}$$

где $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ элемент пространства H, а операторы A, B, I заданы с помощью операторных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2\Pi_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_1 \\ E & 0 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

E — единичный оператор в R.

В самом деле, легко убедиться в том, что если $u \in R$ удовлетворяет уравнению (3), то $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ 1/\lambda\cdot u \end{pmatrix} \in H$ является решением матричного уравнения (4) и, наоборот, если $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H$ является решением матричного уравнения (4), то каждая из компонент вектора $\bar{u}$ удовлетворяет операторному уравнению (3).

Через H_l обозначим прямую сумму пространств $R_l \times R_l$. H_l есть подпространство пространства H со скалярным произведением

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = (p_1, q_1)_{\overset{\circ}{R}} + (\Pi_1 p_2, q_2)_{\overset{\circ}{R}} = (-1)^{\nu} \cdot \left\{ \int\limits_{\Omega} L p_1 \cdot q_1 d\Omega - \int\limits_{\Omega} M p_2 \cdot q_2 d\Omega \right\},$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \ \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \overset{\circ}{H}_l .$$

Из того, что пространство R_l является инвариантным относительно операторов Π_1 и Π_2 (7), очевидно, следует, инвариантность пространства H_l относительно операторных матриц A и B. Далее, поскольку отображение $\overset{\circ}{R} \xrightarrow{\text{и}} R$ есть изоморфизм, то оператор Π_1 отображает пространство $\overset{\circ}{R}_l$ на себя и имеет обратный Π_1^{-1}. Отсюда получаем, что операторная матрица B имеет обратную в виде

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ \Pi_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, имеем

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_1 \\ E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ \Pi_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = I.$$

Аналогично $B^{-1} B = I$.

Применяя с обеих сторон равенства (4) оператор-матрицу $-B^{-1}$, запишем в виде

$$\Pi \vec{u} - \mu \vec{u} = 0,$$

где

$$\Pi \vec{u} = -B^{-1} (A - I) \vec{u} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \Pi_1^{-1} u_1 - 2 \Pi_1^{-1} \Pi_2 u_2 \end{pmatrix},$$

для всех $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H$.

Перейдем теперь к доказательству вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Оператор* Π *для любого числа* $l \geqslant 2\nu$ *в* $\overset{\circ}{H}_l$ *имеет полную систему собственных вектор-функций.*

Доказательство. Поскольку конечномерное пространство H_l является инвариантным относительно оператора Π, то для доказательства леммы достаточно установить симметричность оператора Π в $\overset{\circ}{H}_l$.

Для любых $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ и $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ из H_l имеем

$$\langle \Pi \vec{u}, \vec{v} \rangle = (u_2, v_1)_{\overset{\circ}{R}} + (\Pi_1 [\Pi_1^{-1} u_1 - 2\Pi_1^{-1} \Pi_2 u_2], v_2)_{\overset{\circ}{R}} = (u_2, v_1)_{\overset{\circ}{R}} +$$

$$+(u_1-2\Pi_2 u_2, v_2)_{\overset{\circ}{R}}=(u_1, v_2)_{\overset{\circ}{R}}+(u_2, v_1-2\Pi_2 v_2)_{\overset{\circ}{R}}=$$

$$=(u_1, v_2)_{\overset{\circ}{R}}+(\Pi_1 u_2, \Pi_1^{-1} v_1-2\Pi_1^{-1}\Pi_2 v_2)_{\overset{\circ}{R}}=<\vec{u}, \Pi\vec{v}>. \qquad (5)$$

Здесь мы воспользовались симметричностью операторов Π_1 и Π_2 относительно скалярного произведения $(\ , \ )_{\overset{\circ}{R}}$.

Равенство (5) означает, что оператор Π в $\overset{\circ}{H}_l$ является симметрическим относительно скалярного произведения $<\ ,\ >$ и, следовательно, (') имеет простую структуру. Лемма доказана.

Лемма 2. *Первые компоненты полиномиальных собственных векторов оператора* Π *являются собственными функциями для краевой задачи* (*I*), (*II*).

Доказательство. Пусть $\vec{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}\in\overset{\circ}{H}$ является полиномиальным собственным вектором оператора Π с собственным значением μ, т. е. $\vec{p}$ тождественно не равняется нулю и

$$\Pi\vec{p}-\mu\vec{p}=0,$$

или в раскрытой форме

$$\begin{cases} p_2=\mu p_1 & (6)\\ \Pi_1^{-1}p_1-2\Pi_1^{-1}\Pi_2 p_2=\mu p_2; & (7)\end{cases}$$

p_1 тождественно не равняется нулю, так как в противном случае $\vec{p}=0$.

Применяя с обеих сторон равенства (7) оператор Π_1 и подставляя значение p_2, из (6) получим

$$\Pi_1 p_1+2\lambda\Pi_2 p_1-\lambda^2 E p_1=0,\ \lambda=\frac{1}{\mu}.$$

А это значит, что p_1 является собственной функцией для краевой задачи (I), (II).

Сопоставляя леммы 1 и 2, заключаем, что краевая задача (I), (II) имеет полную систему полиномиальных собственных функций в классе всех полиномов, удовлетворяющих граничным условиям (II). А поскольку полиномы, удовлетворяющие условиям (II), образуют плотное множество в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(\nu)}$, то сформулированная выше теорема доказана.

Проиллюстрируем полученный результат на примере.

Пусть в задаче (I), (II) $M=-\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^{2\nu}}{\partial x_i^{2\nu}}$, $(r\leqslant m)$, $L=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\right.$ $\left.+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right)^{\nu}=\Delta^{\nu}$, а N — произвольный однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка 2ν.

Покажем, что оператор M удовлетворяет условию (A), а оператор L условию (B).

В самом деле, для всех $p \in R$ имеем

$$(-1)^{\nu+1}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^{2\nu}p}{\partial x_i^{2\nu}}\cdot p\,d\Omega = -\sum_{i=1}^{r}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^{\nu}p}{\partial x_i^{\nu}}\right)^2 d\Omega \leq 0, \tag{8}$$

$$(-1)^{\nu}\int\limits_{\Omega}\Delta^{\nu}p\cdot p\,d\Omega = \sum_{|\alpha|=\nu}\frac{2\,\nu!}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^{\nu}p}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}\right)^2 d\Omega \geq 0. \tag{9}$$

Из равенства нулю интеграла (9) следует, что p полином степени не выше $\nu-1$, а из принадлежности $p \in R$ следует: $p \equiv 0$. Следовательно, оператор L удовлетворяет условию (B).

Далее из равенства нулю интеграла (8) заключаем

$$\frac{\partial^{\nu}p}{\partial x_i^{\nu}} = 0, \text{ т. е. } p = \sum_{k=0}^{\nu-1} d_k(x')\cdot x_i^k,\ x' = (x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots x_m).$$

Отсюда и из того, что p удовлетворяет граничным условиям (II), легко усмотреть, что все коэффициенты $d_k(x')$ равны нулю и поэтому $p \equiv 0$.

Это значит, что оператор $-\sum\limits_{i=1}^{r}\dfrac{\partial^{2\nu}}{\partial x_i^{2\nu}}$ удовлетворяет условию (A).

Таким образом, в этом примере существование полной системы собственных функций в $W_2^{(\nu)}$ краевой задачи (I), (II) следует из вышедоказанной теоремы.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР.
Ереванский государственный
университет

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ

Անորոշ ձև ունեցող եզրային խնդիրների մի դասի սեփական ֆունկցիաների լրիվության մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է սեփական արժեքների վերաբերյալ հետևյալ համասեռ եզրային խնդիրը՝

$$Mu + 2\lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \tag{I}$$

$$u\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \cdots = \frac{\partial^{\nu-1}u}{\partial n^{\nu-1}}\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{II}$$

որտեղ M, N, L-ը $x_1,\cdots,x_m$ անկախ փոփոխականների նկատմամբ 2ν $(\nu > 1)$ կարգի հաստատուն գործակիցներով համասեռ դիֆերենցիալ օպերատորներ են։ (I), (II) խնդիրը դիտարկվում է Γ եզրային մակերևույթ ունեցող m-չափանի Ω էլիպսոիդում. n-ը Γ-ի արտաքին նորմալն է։ $\overset{\circ}{R}$-ով նշանակենք $x_1\cdots, x_m$ փոփոխականներից կախված բոլոր այն բազմանդամների բազմությունը, որոնք բավարարում են (II) եզրային պայմաններին։ M և L օպերատորների վրա դրվում են հետևյալ պայմանները՝

$$(\text{Ա})\quad (-1)^{\nu}\int_{\Omega} Mp\cdot p\,d\Omega < 0; \qquad (\text{Բ})\quad (-1)^{\nu}\int_{\Omega} Lp\cdot p\,d\Omega > 0:$$

բոլոր այն p-երի համար, որոնք նույնաբար զրո չեն և պատկանում են $\mathring{R}$-ին։

Ապացուցվում է, որ (Ա) և (Բ) պայմանների առկայության դեպքում, (I), (II) *համասեռ եզրային խնդիրը թույլ է տալիս բազմանդամային սեփական ֆունկցիաների լրիվ սիստեմ սոբոլևյան* $\mathring{W}_2^{(\nu)}(\Omega)$ *տարածությունում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. А. Александрян*, Диссертация, МГУ (1949). [2] *Р. А. Александрян*, Докторская диссертация, МГУ (1962). [3] *Р. Т. Денчев*, Диссертация, МГУ (1959). [4] *Г. В. Вирабян*, Диссертация, ЕГУ (1964). [5] *С. Г. Овсепян*, Диссертация, ЕГУ (1964). [6] *Т. И. Зеленяк*, ДАН СССР, т. 158, № 6 (1964). [7] *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц (1954).