

Р. В. Амбарцумян

# О выпуклых подскоплениях точечных скоплений на плоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 18/III 1966)

Точечными скоплениями на плоскости (в дальнейшем — просто скоплениями) мы называем произвольные конечные множества точек

$$P = (P_1, P_2, \dots, P_n),$$

расположенных на плоскости. Заимствование из астрофизики термина „скопление“ в данном контексте представляется оправданным тем, что именно фотографии астрофизических объектов доставляют множество примеров обширных ( $n \approx \infty$ ) скоплений.

Скопление  $P$  назовем выпуклым, если все точки  $P_1, \dots, P_n$  могут служить вершинами одного выпуклого многоугольника.

Определим функцию скопления.

$\varphi(P)$  = число точек в максимальном (по числу входящих точек) выпуклом подскоплении скопления  $P$ .

Основываясь на результатах Реньи и Суланке, легко дать нижнюю оценку порядка роста среднего значения  $\varphi(P)$  для некоторых последовательностей случайных скоплений  $P$ .

В работе этих авторов <sup>(1)</sup> в действительности исследуется асимптотическое поведение среднего числа вершин  $E_n$  в минимальной выпуклой оболочке случайных скоплений, получаемых путем независимого „бросания“  $n$  точек в различные области  $K$ .

Оказывается, что порядок роста  $E_n$  существенно зависит от наличия или отсутствия изломов у границы области  $K$ . В частности, для областей, граница которых обладает непрерывной кривизной, устанавливается

$$E_n \approx O(\sqrt[3]{n}).$$

Отсюда вытекает.

**Теорема 1.** Пусть случайное скопление  $P_k$  строится путем независимого „бросания“  $n$  точек в произвольную ограниченную область  $K$ . Тогда порядок возрастания среднего значения  $\varphi(P_k)$  не меньше, чем  $\sqrt[3]{n}$ .

Доказательство следует из того, что в любой области  $K$  можно указать выпуклую подобласть  $K'$  с границей, имеющей непрерывную кривизну.

Легко видеть, что подходящим выбором области  $K$  для данного  $n$  можно добиться, чтобы среднее значение  $\varphi(P_k)$  было близко к  $n$ . Представляет интерес поэтому выяснение существования скоплений  $P$  с малыми (по сравнению с  $\sqrt[n]{n}$ ) значениями  $\varphi(P)$ . Класс таких скоплений, грубо говоря, всегда является маловероятным для случайных скоплений  $P_k$ , каким бы образом мы ни выбирали область  $K$ .

Поставим минимаксную задачу; именно определим функцию

$$f(n) = \min \varphi(P),$$

где минимум берется по всем возможным  $n$  — точечным скоплениям  $P$ , при дополнительном ограничении, что никакие три точки скопления  $P$  не лежат на одной прямой. Задача состоит в нахождении верхней оценки для  $f(n)$ .

Отметим некоторые свойства функций  $\varphi$  и  $f$ .

1) Существуют такие скопления  $P$ , что  $\varphi(P) = f(n)$ ,

2)  $f(n+1) \geq f(n)$ ,

3)  $f(n+m) \leq f(n) + f(m)$ .

Выводу более сильного неравенства в теореме 2 предположим две геометрические леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $\varphi(P) = f(n)$ . Можно указать такие малые круги  $C_1 \dots C_n$  с центрами в  $P_1 \dots P_n$ , что для любых точек  $Q_1 \in C_1$ ,  $Q_n \in C_n$

$$\varphi(Q) = f(n) \text{ где } Q = \{Q_1 \dots Q_n\}.$$

Легко видеть, что лемма 1 является следствием принятого ограничения на множество рассматриваемых скоплений.

**Лемма 2.** Пусть  $P$  — произвольное скопление точек. Можно построить дуги  $\beta_1 \dots \beta_n$ ,  $P_1 \in \beta_1 \dots P_n \in \beta_n$ , обладающие свойством: любые три точки  $A_1, B_1, C_1 \in \beta_1$ , вместе с любыми тремя точками  $A^j, B^j, C^j \in \beta_j$  ( $i$  и  $j$  произвольные) не порождают выпуклого скопления.

Доказательство легко получить, беря в качестве  $\beta_1 \dots \beta_n$  „достаточно короткие“ дуги окружностей „достаточно большого“ радиуса, ориентируя их в подходящим образом выбранном направлении.

**Теорема 2.**  $f(N) \leq \min_{mn=N} (2\varphi(n) + m - 2)$

Пусть  $mn = N$ . Возьмем  $n$  — точечное скопление  $\{P_1 \dots P_n\}$  такое, что  $\varphi(P_1 \dots P_n) = f(n)$  и построим круги  $C_1 \dots C_n$  согласно лемме 1 и дуги  $\beta_1 \dots \beta_n$  согласно лемме 2. Поместим по  $m$  точек (с общим именем  $Q$ ) на каждую из дуг

$$\alpha_1 = \beta_1 \cap C_1, \dots, \alpha_n = \beta_n \cap C_n$$

и оценим число точек  $x$  в максимальном выпуклом подскоплении  $L$  точечного скопления, состоящего из  $N$  точек  $Q$ . Нетрудно видеть, что число различных дуг  $\alpha_i$ , для которых существует  $Q \in \alpha_i$ ,  $Q \in L$

не превосходит  $f(n)$ . Кроме того, с  $f(n) - 1$  из таких дуг  $\alpha_i$  может входить в  $L$  не более чем по две точки  $Q$ , и лишь для одной из дуг  $\alpha_i$  в  $L$  могут входить все  $m$  лежащих на ней точек  $Q$ . Таким образом,

$$x \leq 2 |f(n) - 1| + m.$$

Так как  $s(N) \leq x$ , то теорема доказана.

Следствие.  $f(N) = o(N^\alpha)$  при любом  $\alpha > 0$ .

Թ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ

### Կետային կույտերի ուռուցիկ ենթակույտերի վերաբերյալ

Կետային կույտ տվյալ հոդվածում մենք անվանում ենք հարթության վրա գտնվող կետերի լամեն մի վերջավոր բազմությունը: Կույտը անվանում ենք ուռուցիկ, եթե տվյալ կույտ կազմող կետերը կարող են ծառայել որպես մի ուռուցիկ բազմանկյան գագաթներ:

Կետային կույտերի համար դիտարկվում է մինիմալային խնդիրը՝ քանի կետ է պարունակում  $n$ -կետանի կույտերից ընտրվող մաքսիմալ ուռուցիկ ենթակույտերի մինիմումը ( $f(n)$  ֆունկցիան): Ցույց է տրվում, որ

$$f(n) = o(n^\alpha)$$

կամայական  $\alpha > 0$  համար:

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> А. Реньи и Р. Суланке, Über die konvexe Hülle von  $n$  zufällig dewählten Punkten. Z. Wahrscheinlichkeits theorie 2. 75—84 (1963).