Э. М. Кегеян

О предельных множествах аналитических функций,
 заданных в круге

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 3/II 1966)

Пусть D и S — соответственно единичный круг и единичная окружность комплексной плоскости Z , $\mu(r)$ — действительная функция, заданная в промежутке $[0,1)$, которая монотонно возрастая, стремится к $+\infty$ при $r \rightarrow 1$ и, кроме того, $\mu(0) > 0$.

Обозначим через $H(\mu, D)$ класс аналитических в области D функций, удовлетворяющих в ней условию

$$|f(z)| \leq \mu(|z|),$$

а через $A_r(\theta)$ — множество предельных значений функции $f(z)$ на радиусе $re^{i\theta}$ ($0 \leq r < 1$), т. е. — совокупность чисел A , для которых существуют последовательности $\{r_n\}$ такие, что

1. $r_n \rightarrow 1$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n e^{i\theta}) = A$.

В работе (1) Мак Лейн доказал, что в каждом классе $H(\mu, D)$ существует функция $f(z)$, для которой множество $A_r(\theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) содержит значения 0 и ∞ .

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема. В каждом классе $H(\mu, D)$ существует функция, множество предельных значений которой на каждом радиусе совпадает с полной плоскостью Z .

Доказательство. Пронумеруем всевозможные пары рациональных чисел

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n), \dots$$

и пусть $c_n = a_n + ib_n$.

Далее, обозначим через

$$m_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

и определим последовательность комплексных чисел $\{d_n\}$ следующим образом:

$$d_m = \begin{cases} c_k & \text{при } m = m_k \\ c_{m-m_k} & \text{при } m_k < m < m_{k+1} \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Очевидно, для каждого m последовательность

$$d_m, d_{m+1}, d_{m+2}, \dots$$

всюду плотна на плоскости Z .

Обозначим через e^+ и e^- соответственно дуги

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{7}{4} \pi \text{ окружности } |z| = 1 - \frac{1}{3}$$

и

$$-\frac{3}{4} \pi \leq \arg z \leq \frac{3}{4} \pi \text{ окружности } |z| = 1 - \frac{1}{6},$$

а через e_n^+ и e_n^- — совокупность значений функции

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{1}{n} \arg z} \text{ при } z \text{ соответственно на } e^+ \text{ и } e^-.$$

Круг $|z| \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ обозначим через D_n и пусть

$$e_n = e_n^+ + e_n^-$$

$$E_n = D_n + e_n.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \in D_1 \\ d & \text{при } z \in e_1, \end{cases}$$

где d — произвольное комплексное число.

Так как она непрерывна на замкнутом множестве E_1 со связным дополнением и аналитическая в его внутренних точках, то, по теореме С. Н. Мергеляна (²), для каждого $\varepsilon > 0$ найдется полином $P(z)$, такой, что

$$|\varphi(z) - P(z)| < \varepsilon \text{ при } z \in E_1.$$

В дальнейшем такой полином будем обозначать через $P(z, d, \varepsilon)$. Он имеет следующие свойства

$$\text{а) } |P(z, d, \varepsilon)| < \varepsilon \text{ при } z \in D_1$$

$$\text{в) } |P(z, d, \varepsilon) - d| < \varepsilon \text{ при } z \in e_1. \quad (1)$$

Постараемся найти требуемую в теореме функцию в виде суммы полиномов. Последние выберем последовательно.

С этой целью рассмотрим полином $P\left(z, d_1, \frac{\mu(0)}{2}\right)$ и возьмем n_1 настолько большим, чтобы

$$\left| P\left(z^{n_1}, d_1, \frac{\mu(0)}{2}\right) \right| \leq \frac{\mu(|z|)}{2} \text{ при } z \in D_1.$$

Пусть $P_1(z) = P\left(z^{n_1}, d_1, \frac{\mu(0)}{2}\right)$, а $Q_1(z) \equiv 0$.

Начиная с некоторого номера N_1 , выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} > \sqrt[n_1]{1 - \frac{1}{6}}.$$

Возьмем $n > N_1$, настолько большим, чтобы

$$\left| P\left(z^n, d_2, \frac{\mu(0)}{2^{2+1}}\right) \right| < \frac{\mu(|z|)}{2^{2+1}}.$$

Далее обозначим

$$M_1 = \max_{z \in \bar{D}} \left[|P_1(z)| + 1 \right]$$

и рассмотрим полином

$$P\left(z, -1, \frac{\mu(0)}{2^{2+1} M_1}\right).$$

Очевидно, если n достаточно велико — $n > \bar{N}_1$, то

$$\left| P\left(z^n, -1, \frac{\mu(0)}{2^{2+1} M_1}\right) \right| < \frac{\mu(|z|)}{2^{2+1} M_1} \text{ при } z \in D.$$

Выберем $n_2 > \max\{N_1; \bar{N}_1\}$ и за $P_2(z)$ и $Q_2(z)$ возьмем полиномы

$$P_2(z) \equiv P\left(z^{n_2}, d_2, \frac{\mu(0)}{2^{2+1}}\right),$$

$$Q_2(z) \equiv P\left(z^{n_2}, -1, \frac{\mu(0)}{2^{2+1} M_1}\right) [P_1(z) + Q_1(z)].$$

Вообще, если уже найдены полиномы $\{P_k(z)\}$ и $\{Q_k(z)\}$ при $k = 1, 2, \dots, m$, мы построим $(m+1)$ -ый полином следующим образом.

Начиная с некоторого номера N_m ($n > N_m$)

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} > \sqrt[n_m]{1 - \frac{1}{6}}. \quad (2)$$

Возьмем $n > N_m$ настолько большим, чтобы

$$\left| P\left(z^n, d_{m+1}, \frac{\mu(0)}{2^{m+2}}\right) \right| < \frac{\mu(|z|)}{2^{m+2}}. \quad (3)$$

Далее обозначим

$$M_m = \max_{z \in \bar{D}} \left[1 + \sum_{k=1}^m \left(|P_k(z)| + |Q_k(z)| \right) \right] \quad (4)$$

и рассмотрим полином

$$P\left(z, -1, \frac{\mu(0)}{2^{m+2} M_m}\right). \quad (5)$$

Очевидно, если n достаточно велико — $n > \bar{N}_m$

$$\left| P\left(z^n, -1, \frac{\mu(0)}{2^{m+2} M_m}\right) \right| < \frac{\mu(|z|)}{2^{m+2} M_m}. \quad (6)$$

Выберем

$$n_{m+1} > \max\{N_m, \bar{N}_m\} \quad (7)$$

и за $P_{m+1}(z)$ и $Q_{m+1}(z)$ возьмем соответственно полиномы

$$P_{m+1}(z) = P\left(z^{n_{m+1}}, d_{m+1}, \frac{\mu(0)}{2^{m+2}}\right) \quad (8)$$

и

$$Q_{m+1}(z) = P\left(z^{n_{m+1}}, -1, \frac{\mu(0)}{2^{m+2}M_m}\right) \sum_{k=1}^m [P_k(z) + Q_k(z)]. \quad (9)$$

Пусть

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} [P_m(z) + Q_m(z)]. \quad (10)$$

Из (8) и (3) следует, что для всех n

$$|P_n(z)| \leq \frac{\mu(|z|)}{2^{n+1}}.$$

А из (9), (4) и (6) — что

$$|Q_n(z)| \leq \frac{\mu(|z|)}{2^{n+1}}.$$

Эти неравенства с определением (10) функции $\Phi(z)$ приводят к заключению, что

$$|\Phi(z)| \leq \mu(|z|) \text{ при } z \in D,$$

т. е.

$$\Phi(z) \in H(\mu, D).$$

Теперь пусть d_m — один из членов последовательности $\{d_n\}$. Оценим разницу

$$\Phi(z) - d_m$$

при $z \in e_{n_m}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} |\Phi(z) - d_m| &\leq \left| \sum_{k=1}^{m-1} [P_k(z) + Q_k(z)] + Q_m(z) \right| + \\ &+ |P_m(z) - d_m| + \sum_{k=m+1}^{\infty} [|P_k(z)| + |Q_k(z)|]. \end{aligned} \quad (11)$$

Для каждого $z \in e_{n_m}$ из (9), (4) и (1) получим:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{m-1} [P_k(z) + Q_k(z)] + Q_m(z) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{m-1} [P_k(z) + Q_k(z)] \right| \times \\ &\times \left| 1 + P\left(z^{n_m}, -1, \frac{\mu(0)}{2^{m+1}M_{m-1}}\right) \right| \leq M_{m-1} \frac{\mu(0)}{2^{m+1}M_{m-1}} = \frac{\mu(0)}{2^{m+1}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, из (8) и (1) следует, что

$$|P_m(z) - d_m| < \frac{\mu(0)}{2^{m+1}} \text{ при } z \in e_{n_m}. \quad (13)$$

Наконец, из (7) и (2) видно, что $e_{n_m} \subset D_{n_k}$ при $k > m$, так что из (8), (9) и (1) получим

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \left[|P_k(z)| + |Q_k(z)| \right] \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \left[\frac{\mu(0)}{2^{k+1}} + \frac{\mu(0)}{2^{k+1}} \right] = \frac{\mu(0)}{2^m}. \quad (14)$$

Из (11), (12), (13) и (14) окончательно получим

$$|\Phi(z) - d_m| \leq \frac{\mu(0)}{2^{m-1}} \quad (15)$$

при $z \in e_{n_m}$ ($m = 1, 2, \dots$).

Пусть теперь $\xi_0 = e^{i\theta_0}$ — произвольная точка окружности S , d — произвольное комплексное число, а ε и δ — произвольная пара положительных чисел.

Так как для каждого m множество e_{n_m} лежит на окружностях $|z| = \sqrt[n_m]{1 - \frac{1}{3}}$ и $|z| = \sqrt[n_m]{1 - \frac{1}{6}}$ и пересекается со всеми радиусами круга D , то существует номер m_0 такой, что при $m > m_0$ множество e_{n_m} пересекается с радиусом $\theta = \theta_0$ по крайней мере в одной точке (которую мы обозначим α_m), находящейся от точки ξ_0 на расстоянии меньшем, чем δ :

$$\alpha_m \in e_{n_m} \text{ и } |\alpha_m - \xi_0| < \delta \text{ при } m > m_0. \quad (16)$$

Далее, из (15) следует, что при $m > 2 + \log_2 \frac{\mu(0)}{\varepsilon}$

$$|\Phi(\alpha_m) - d_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (17)$$

Наконец, из того, что каждая из подпоследовательностей $\{d_m, d_{m+1}, \dots\}$ последовательности $\{d_m\}$ всюду плотна на плоскости Z , следует, что существует номер $\bar{m}$, такой, что

$$1. \quad \bar{m} > \max \left\{ m_0, 2 + \log_2 \frac{\mu(0)}{\varepsilon} \right\},$$

$$2. \quad |d_{\bar{m}} - d| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих условий и из (16) и (17) получим

$$1. \quad |\Phi(\alpha_{\bar{m}}) - d| \leq |\Phi(\alpha_{\bar{m}}) - d_{\bar{m}}| + |d_{\bar{m}} - d| < \varepsilon$$

$$2. \quad |\alpha_{\bar{m}} - \xi_0| < \delta.$$

Это и значит, что d принадлежит множеству предельных значений функции $\Phi(z)$ на радиусе $re^{i\theta_0}$ ($0 < r < 1$), т. е. $d \in A_{\Phi}(\theta_0)$. Если же $d = \infty$, то можно выбрать последовательность комплексных чисел $\{t_k\}$, стремящуюся к ∞ , и так как, по доказанному выше, каждое из чисел t_k принадлежит множеству $A_{\Phi}(\theta_0)$, то и $d = \infty$, будет принадлежать этому множеству.

Таким образом, теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Շրջանում տրված անալիտիկ ֆունկցիաների սահմանային
բազմությունների մասին

Քող $\mu(r)$ -ը ($\mu(0) > 0$) լինի $[0, 1)$ միջակայքում տրված մի դրական ֆունկցիա, որը մոնոտոն անկումով ձգտում է $+\infty$ երբ $r \rightarrow 1$.

Այստեղ ցույց է տրվում, որ նման ամեն մի $\mu(r)$ -ի համար կարելի է $|z| < 1$ շրջանում կառուցել մի $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիա, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին:

1. $|f(z)| < \mu(|z|)$ երբ $|z| < 1$

2. Ամեն մի A կոմպլեքս թվի համար (վերջավոր կամ անվերջ) և շրջանագծի յուրաքանչյուր $e^{i\theta}$ կետի համար գոյութուն ունի $\{r_n e^{i\theta_n}\}$ կետերի մի հաջորդականություն, որի վրայով $f(z)$ ֆունկցիայի արժեքները ձգտում են A -ին:

Այս արդյունքը ապացուցված էր Mac Lane-ի կողմից, երբ $A=0$ կամ ∞ :

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Mac Lane G. R. Holomorphic functions, of arbitrary slow growth, without radial limits, Michigan Math. J., 21—24; 1962. ² С. Н. Мергелян. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2 (1952).